Ecole Normale Superieure d'Oran

Année Universitaire : 2015/2016 **2 éme Année PES Mathématique**

Nom de l'enseignant : MAMAN Khaldia

Résultat Final du Module : **Géométrie**

N°	NOM	PRENOM	DAT_NAI	ETAT	EMD1	EMD2	Moy CC	Synth	Moy Sy	Sup Sy	rat	Moy R	Moy
1	ACHRATI	DHIAA HOUDDA	08/11/1994		12								
2	ADDA	KARIMA	25/04/1995		08								
3	AMARA	MOHAMMED YOUCEF	10/06/1995		—								
4	AYAD	SAMIA	09/09/1995		09,5								
5	BELDJILALI	NOUR EL HOUDA	07/12/1995		12								
6	BELFARH	FATIMA ZAHRA	14/02/1995		09								
7	BELHADEF	AHLEM	24/11/1995		08,25								
8	Beloudane	Rahma	06/04/1995		10								
9	BENABBOU	NOUREDDINE	07/01/1995		10								
10	BENCHERIET	AMEL	11/11/1995		13								
11	BENGHENIMA	IMANE	15/07/1995		10,25								
12	Benghia	Batoul	31/03/1996		11								
13	BENNOUR	ABDELLATIF	24/09/1995		07,25								
14	Bensahla	Radhia	05/04/1994		12,25								
15	BOBOT	CHAIMAA	10/12/1995		14								
16	BOUCHAMA	SARAH	25/10/1992		07,75								
17	BOUDJEMA	HASSIBA	30/07/1995		08,25								
18	BOUKAAZA	SOUAD	22/09/1995		12								
19	BOUKHARI	HOURIA	27/07/1995		10,75								
20	BOURAHLA	HAFSA	21/09/1995		11,5								
21	BOUZERDAB	AICHA	22/06/1995		13,5								
22	BOUZIANE	YEHIA	03/11/1995		10								

25/03/16

23	BOUZIANE	RAHMA	20/08/1995		09								
24	CHACHOUA	YASMINE	02/08/1995		09								
25	CHERIFI	OMAR	07/05/1995		07,75								
26	DAAOU	CHAIMAA	11/12/1995		06								
27	DAFFI	NESRINE	13/01/1995		05,5								
28	DJAFRI	SOUMAYA	13/07/1995		13,5								
29	FARES	HANANE	25/10/1995		08								
30	FATAH	WASSILA	18/03/1995		12,5								
31	Ferrani	CHAIMAA	23/10/1995		12,75								
32	GHARBI	MERIEM	23/01/1994		12								
33	HADJ ALI	MERIEM	17/05/1995		09								
34	HADJADJ	SOMIA	28/07/1995		07,5								
35	Halal	Badra	01/01/1995		16,5								
36	Hameurlaine	FAIROUZ	21/07/1996		06,5								
37	HAMMOUDA	DOUNIA	14/04/1995		09,5								
38	HAMOUDI	AMINA	18/03/1993										
39	Ikhlef	Ferial	13/12/1995		11,25								
40	KADRI	HANENE	02/01/1995		12,5								
41	KERMOUZI	WISSAM	02/08/1995		13,5								
42	KHALDI	RAHIMA	29/06/1995		06,5								
43	MAZARI	AFIFA	06/01/1995		12,5								
44	Mehimda	Hanane	28/10/1995		18								
45	MEKHFI	MOHSINE	18/05/1995										
46	MERAH	SARA	06/07/1993		13								
47	MESBAH	FAIROUZ	13/01/1996		13								
48	NADJI	ASSIA	15/05/1995		12								
49	RABHI	ABD ESSAMAD	20/01/1996		14								
50	REDJEM	YASMINE	30/11/1994		09								
51	Sadji	FATIMA ZAHRA	27/12/1995		10,75								
52	Sayah	Soraya	09/03/1995		12								
53	SLIMANI	ABDALLAH	16/12/1995		11,5								
54	TELLI	ZINEB	20/09/1995		09,5								
55	ZANNAN	FATMA	17/09/1994		15,25								

05/03/16

ENS D'ORAN

2015 / 2016
2ème PES Maths

EMD I en Géométrie
Durée 1h 30'

Exercice 1 (8 pts)

Soit $\mathbb{R}_2[X]$: l'ensemble des polynômes de degré 2. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$(P|Q) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(x)\,Q(x)\,dx.$$

ⓐ Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire dans $\mathbb{R}_2[X]$.

ⓑ Déterminer $(X^k | X^l)$ où $k, l \in \{0,1,2\}$.

ⓒ Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire.

Exercice 2 (9)

Dans un espace affine muni d'un repère orthonormé, on considère les droites

(D_1) : $x = -2+\lambda$, $y = 1+3\lambda$, $z = \lambda$ $\lambda \in D$

(D_2) : $x = -2-\lambda$, $y = 1+\lambda$, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

① Soit $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$. Déterminer a et b pour que $\vec{N}$ soit orthogonal à D_1 et D_2

② Soit (P) le plan qui contient (D_2) et qui est parallèle à $\vec{N}$. Donner l'équation cartésienne de (P) puis le point d'intersection de (P) et (D_1).

③ Donner les équations paramétriques de la droite (D) qui est orthogonale à (D_1) et à (D_2) et qui passe par le point d'intersection de (P) et (D_1).

Exercice 3 (3 pts)

Prouver : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$

Correction de l'EMD I en Géométrie

Exercice 1. (8 pts)

$E = \mathbb{R}_2[X]$.

$\forall P, Q \in E : \quad (P, Q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P(x) Q(x)\, dx$

① On montre que
$$\begin{cases} (\,,\,) : \text{symétrique} & 0{,}75 \\ (\,.\,) : \text{bilinéaire} & 0{,}75 \\ (\,.\,) : \text{positive} & 1{,}0 \\ (\,,\,) : \text{défini} & 0{,}5 \end{cases}$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall P_1, P_2, Q \in E :$

$(P_1, P_2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P_1(x) P_2(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P_2(x) P_1(x)\, dx = (P_2, P_1)$

$(\,,\,)$ est symétrique

$(\alpha P_1 + \beta P_2, Q) = \int_{-1}^{1} [\alpha P_1 + \beta P_2](x) Q(x)\, dx$

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [\alpha P_1(x) Q(x) + \beta P_2(x) Q(x)] dx$

$= \frac{\alpha}{m} (P_1, Q) + \frac{\beta}{m} (P_2, Q)$

$(\,,\,)$ est bilinéaire

$\forall P \in E, \ \exists a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tq $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$

$P^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 X + (a_1^2 + 2a_0 a_2) X^2 + 2a_1 a_2 X^3 + a_2^2 X^4$

$(P, P) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P^2(x)\, dx = \frac{1}{2} \left[a_0^2 + \frac{1}{3}(a_1^2 + 2a_0 a_2) + \frac{1}{5} a_2^2 \right]$

$= \frac{1}{3} a_3^2 + \left(a_0 + \frac{a_2}{3}\right)^2 + \frac{4}{45} a_2^2 \geq 0$

d'où $(\,|\,)$ est positive.

$(P|P) = 0 \Leftrightarrow a_3 = a_2 = a_0 = 0 \Leftrightarrow P = 0$

$(\,|\,)$ est défini donc $(\,|\,)$ est un produit scalaire.

② Calcul de $(X^k | X^l)$ si $k, l \in \{0, 1, 2\}$ 1,5

$k = 0$, $(X^0, X^0) = 1$, $(X^0, X) = 0$, $(X^0, X^2) = \frac{1}{3}$) 0,5

$k = 1$ $(X, X^0) = 0$, $(X, X) = \frac{1}{3}$, $(X, X^2) = 0$) 0,5

$k=2$, $(X^2, X^0) = \frac{1}{3}$, $(X^2, X) = 0$, $(X^2, X^2) = \frac{1}{5}$) 0,5 8

3 Recherche d'une base orthonormée. 3,5

1) $\{1, X, X^2\}$ est une base de E qui n'est pas orthonormée 0,5

Determinons une base orthonormée par le procédé de Gram-Shmidt :

$e_0 = X^0 = 1$ 0,5

$e_1 = \lambda e_0 + X$ avec $(e_1, e_0) = 0$, c.à.d : $\lambda = 0$ et $\|e_1\| = 1$

donc $e_1 = \sqrt{3}\, X$ 1

$e_2 = X^2 + \lambda e_1 + \beta e_0$ avec $(e_2, e_1) = 0$ ∧ $(e_2, e_0) = 0$ et $\|e_2\| = 1$

on deduit que $e_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}(3X^2 - 1)$ 1

$\tilde{B} = \{1, \sqrt{3}\, X, \frac{\sqrt{5}}{2}(3X^2 - 1)\}$ 0,5

Exercice 2 (9 pts)

1

$\vec{V}_{D_1}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{V}_{D_2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{N}\begin{pmatrix}a\\1\\b\end{pmatrix}$ 1

$\vec{N} \perp \vec{V}_{D_1}$ et $\vec{N} \perp \vec{V}_{D_2}$ ssi $\langle \vec{N}, \vec{V}_{D_1} \rangle = 0$ et $\langle \vec{N}, \vec{V}_{D_2} \rangle = 0$

c.à.d, ssi $\begin{cases} a + 3 + b = 0 \\ -a + 1 + b = 0 \end{cases}$ 1,5

donc ssi $a = -1$ et $b = -2$ d'où $\vec{N}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

2 $D_2 \subset (P)$ ∧ $(P) \parallel \vec{N}$ donc $\{\vec{V}_{D_2}, \vec{N}\}$ sont des vecteurs directeurs de (P). 1pt

pour $\lambda = 0$, $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \in (P)$ 1pt

$M\begin{pmatrix}x\\y\\3\end{pmatrix} \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & -1 & -1 \\ y-1 & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$ 1pt

3

(3) cherchons $(P)\cap D_1$.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(P)\cap D_1 \Leftrightarrow \begin{cases} z=\lambda \\ y=1+3\lambda \\ x=-2+\lambda \end{cases}$ $\wedge$ $-2+\lambda+1+3\lambda+1=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ z=0 \\ x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

donc $(P)\cap(D_1)=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ (1pt)

. Déterminons les équations paramétriques de (D) :
$\vec{N}$ vecteurs directeur de D.

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in D \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=-\lambda \\ y-1=\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\lambda-2 \\ y=\lambda+1 \\ z=-2\lambda \end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$

d'où (D) : $\frac{-z}{2}=y-1=-x-2$ (1,5 pts)

Exercice III. (3pts)

(1) Sur $\mathbb{R}^n$ on défini le produit scalaire canonique, i.e,

$\forall x\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \forall y\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$: $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ (1pt)

on prend $\check{Y}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\|\check{Y}\|=\sqrt{n}$ (0,5)

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$\forall X\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\langle X,\check{Y}\rangle^2\leq n(x_1^2+\cdots+x_n^2)$ (1,5)