Ecole Normale Superieure d'Oran

Année Universitaire : 2015/2016 2 éme Année PES Mathématique

Nom de l'enseignant : Noufa Kadda.

Résultat Final du Module : Topologie

N°	NOM	PRENOM	DAT_NAI	ETAT	EMD1	EMD2	Moy CC	Synth	Moy Sy	Sup Sy	rat	Moy R	Moy
1	ACHRATI	DHIAA HOUDDA	08/11/1994		11								
2	ADDA	KARIMA	25/04/1995		12								
3	AMARA	MOHAMMED YOUCEF	10/06/1995		/								
4	AYAD	SAMIA	09/09/1995		12								
5	BELDJILALI	NOUR EL HOUDA	07/12/1995		12								
6	BELFARH	FATIMA ZAHRA	14/02/1995		14								
7	BELHADEF	AHLEM	24/11/1995		15								
8	Beloudane	Rahma	06/04/1995		13								
9	BENABBOU	NOUREDDINE	07/01/1995		13,5								
10	BENCHERIET	AMEL	11/11/1995		15								
11	BENGHENIMA	IMANE	15/07/1995		13,5								
12	Benghia	Batoul	31/03/1996		13								
13	BENNOUR	ABDELLATIF	24/09/1995		12								
14	Bensahla	Radhia	05/04/1994		13,5								
15	BOBOT	CHAIMAA	10/12/1995		11,5								
16	BOUCHAMA	SARAH	25/10/1992		12								
17	BOUDJEMA	HASSIBA	30/07/1995		12								
18	BOUKAAZA	SOUAD	22/09/1995		12,5								
19	BOUKHARI	HOURIA	27/07/1995		13,5								
20	BOURAHLA	HAFSA	21/09/1995		11,5								
21	BOUZERDAB	AICHA	22/06/1995		13,5								
22	BOUZIANE	YEHIA	03/11/1995		13								

23	BOUZIANE	RAHMA	20/08/1995		13,5								
24	CHACHOUA	YASMINE	02/08/1995		11								
25	CHERIFI	OMAR	07/05/1995		10								
26	DAAOU	CHAIMAA	11/12/1995		10,5								
27	DAFFI	NESRINE	13/01/1995		10,5								
28	DJAFRI	SOUMAYA	13/07/1995		11,5								
29	FARES	HANANE	25/10/1995		14								
30	FATAH	WASSILA	18/03/1995		12								
31	Ferrani	CHAIMAA	23/10/1995		16,5								
32	GHARBI	MERIEM	23/01/1994		13								
33	HADJ ALI	MERIEM	17/05/1995		13,5								
34	HADJADJ	SOMIA	28/07/1995		12,5								
35	Halal	Badra	01/01/1995		16								
36	Hameurlaine	FAIROUZ	21/07/1996		12,5								
37	HAMMOUDA	DOUNIA	14/04/1995		12								
38	HAMOUDI	AMINA	18/03/1993		/								
39	Ikhlef	Ferial	13/12/1995		11,5								
40	KADRI	HANENE	02/01/1995		10								
41	KERMOUZI	WISSAM	02/08/1995		13,5								
42	KHALDI	RAHIMA	29/06/1995		12								
43	MAZARI	AFIFA	06/01/1995		14								
44	Mehimda	Hanane	28/10/1995		15								
45	MEKHFI	MOHSINE	18/05/1995		/								
46	MERAH	SARA	06/07/1993		14,5								
47	MESBAH	FAIROUZ	13/01/1996		12,5								
48	NADJI	ASSIA	15/05/1995		13,5								
49	RABHI	ABD ESSAMAD	20/01/1996		15								
50	REDJEM	YASMINE	30/11/1994		14								
51	Sadji	FATIMA ZAHRA	27/12/1995		10,5								
52	Sayah	Soraya	09/03/1995		15								
53	SLIMANI	ABDALLAH	16/12/1995		13								
54	TELLI	ZINEB	20/09/1995		14								
55	ZANNAN	FATMA	17/09/1994		15								

المدرسة العليا للأساتذة بوهران المستوى:السنة الثانية رياضيات	ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE D'ORAN المدرسة العليا للأساتذة بوهران	التاريخ:الأربعاء 2016/03/02 مدة الإمتحان : ساعة و نصف

إمتحان السداسي الأول لمقياس الطبولوجيا

التمرين الأول: (07نقاط)

لتكن المجموعة : $X=\{a,b\}$

1) عين كل الطبولوجيات الممكنة على المجموعة X.

2) لتكن المجموعة : $Y=\{a,b,c,d\}$

* أذكر إن كانت كل من عائلات أجزاء المجموعات التالية تشكل طبولوجية أم لا ،(مع التبرير) :

$$\tau_1=\{\phi,Y,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$$

$$\tau_2=\{\phi,Y,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,d\},\{a,b,d\}\}$$

$$\tau_3=\{\phi,Y,\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

$$\tau_4=\{\phi,Y,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$$

التمرين الثاني: (06نقاط)

ليكن التطبيق d المعرف من $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}^+$ ، كما يلي :

$$\forall x>0,\forall y>0:d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$$

1) بين أن d تمثل مسافة على $\mathbb{R}_+^*$.

2) عين،عندئذ كل الكرات المفتوحة ذات المركز 1،و نصف القطر r ،في الفضاء المتري $(\mathbb{R}_+^*,d)$، حيث $r\in\mathbb{R}_+^*$.

التمرين الثالث: (06نقاط)

(E,d) فضاء متري ، A مجموعة جزئية من E ، $(A\subset E)$.

* برهن التكافؤ التالي : $(d(x,A)=0)\Leftrightarrow(x\in\overline{A})$ ، حيث $\overline{A}$: يرمز إلى لاصقة $A\subset E$.

ملاحظة : تخصص نقطة واحدة لتقديم الورقة ..... بالتوفيق .....

المدرسة العليا للأساتذة بوهران	ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ORAN	المستوى: السنة الثانية رياضيات

تصحيح إمتحان السداسي الأول+سلم التنقيط لمقياس الطبولوجيا

التمرين الأول: (07نقاط)

1) تعيين كل الطبولوجيات الممكنة على المجموعة $X=\{a,b\}$:

$$\tau_1'=\{\phi,X\}=\tau_g \quad , \quad \tau_2'=\{\phi,\{a\},X\}$$

02 $$\tau_3'=\{\phi,\{b\},X\} \quad , \quad \tau_4'=\{\phi,X,\{a\},\{b\}\}=P(X)=\tau_d$$

2) أذكر إن كانت كل من عائلات أجزاء المجموعات التالية تشكل طبولوجية أم لا (مع التبرير):

1.5
- τ_1 لا تشكل طبولوجية على Y، لأن: $\{a,b\},\{b,c\}\in\tau_1$،
  لكن: $\{a,b\}\cup\{b,c\}=\{a,b,c\}\notin\tau_1$ ، أي أن لا تحقق الشرط الثالث.

01
- τ_2 تشكل طبولوجية على Y، لأنها تحقق جميع الشروط الثلاثة.

1.5
- τ_3 لا تشكل طبولوجية على Y، لأن: $\{a,b\},\{a,c\}\in\tau_3$،
  لكن: $\{a,b\}\cap\{a,c\}=\{a\}\notin\tau_3$

01
- τ_4 تشكل طبولوجية على Y، لأنها تحقق جميع الشروط الثلاثة.

التمرين الثاني: (06نقاط)

1) اثبات أن d تمثل مسافة على $\mathbb{R}_+^*$:

- لدينا: لأجل كل x,y من $\mathbb{R}_+^*$:

0.5 (1 $$d(x,y)=0\Leftrightarrow\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{y}\Leftrightarrow 1.y=1.x\Leftrightarrow y=x$$

0.5 (2 $$d(y,x)=\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right|=\left|-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\right|=|-1|\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right|=d(x,y)$$

3) لدينا: لأجل كل x,y,z من $\mathbb{R}_+^*$:

0.5 $$d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\left|\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\right)\right|\le\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right|+\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\right|=d(x,z)+d(z,y)$$

اذن: مسافة

0.5

2) تعيين، كل الكرات المفتوحة ذات المركز 1، و نصف القطر r:

0.5 $$B(1,r)=\{y\in\mathbb{R}_+^*:d(y,1)<r\}$$

$$y\in B(1,r)\Leftrightarrow d(y,1)<r$$

0.5 $$\Leftrightarrow\left|\frac{1}{y}-1\right|<r$$

$$\Leftrightarrow -r < \frac{1}{y} - 1 < r$$

0.5 $$\Leftrightarrow -r < \frac{1-y}{y} < r$$

$$\Leftrightarrow -ry < 1-y < ry$$

$$\Leftrightarrow -1-ry < -y < 1+ry$$

$$\Leftrightarrow 1+ry > y > 1-ry$$

$$\Leftrightarrow 1-ry < y < 1+ry$$

0.5 $$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+r)y > 1 & (E_1) \\ (1-r)y < 1 & (E_2) \end{cases}$$

لنميز حالتين :

0.5 **الحالة الأولى** : لما $0 < 1-r$ ، أي : $0 < r < 1$ ، فان : $(E_2) \Leftrightarrow y < \frac{1}{1-r}$

و: $(E_1) \Leftrightarrow y < \frac{1}{1+r}$

ادن : $y \in \left]\frac{1}{1+r}, \frac{1}{1-r}\right[$

0.5 **الحالة الثانية** : لما $1-r \leq 0$ ، أي : $r \geq 1$ ، فان : $(E_2) \Leftrightarrow y > \frac{1}{1-r}$

و: $(E_1) \Leftrightarrow y > \frac{1}{1-r}$

ادن : $y > \frac{1}{1+r}$

خلاصة :

01 $$\boxed{B(1,r) = \begin{cases} \left]\frac{1}{1+r}, \frac{1}{1-r}\right[& ; \quad 0 < r < 1 \\ \left]\frac{1}{1+r}, +\infty\right[& ; \quad r \geq 1 \end{cases}}$$

التمرين الثالث: (06 نقاط)

(E,d) فضاء متري

1) نبرهن الاستلزام التالي: $(x \in \overline{A}) \Rightarrow (d(x,A) = 0)$:

0,5 نفرض أن: $(x \in \overline{A})$ ، معناه : $\forall \varepsilon > 0, \exists V_x / V_x \cap A \neq \Phi$

0,5 أي أنه : $\forall \varepsilon > 0, \exists V_x = B(x,\varepsilon) / B(x,\varepsilon) \cap A \neq \Phi$

0,5 أي أنه : $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a \in B(x,\varepsilon)$

0,5	أي : $\exists a \in A : 0 \leq d(x,a) < \varepsilon$
0,5	ومنه : $\exists a \in A : 0 \leq d(x,a) < \varepsilon + 0$
0,5	أي : $\inf d(x,A) = 0$
	و بالتالي : $d(x,A) = 0$
	2) نبرهن الاستلزام التالي : $(d(x,A) = 0) \Rightarrow (x \in \overline{A})$:
01	نفرض أن : $d(x,A) = 0$ ، معناه : $\forall \varepsilon > 0, d(x,A) < \varepsilon$
	أي أنه : $\forall \varepsilon > 0, \exists B(x,\varepsilon) : B(x,\varepsilon) \cap A \neq \Phi$
	بأخد : $V_x = B(x,\varepsilon)$
01	ادن : $\forall \varepsilon > 0, \exists V_x / V_x \cap A \neq \Phi$
01	أي أنه : $x \in \overline{A}$
	و منه : $(d(x,A) = 0) \Rightarrow (x \in \overline{A})$
	و من الاستلزامين ، نستنتج أ ن:
	$\boxed{(d(x,A) = 0) \Rightarrow (x \in \overline{A})}$