Ecole Normale Superieure d'Oran

Année Universitaire : 2015/2016 2 éme Année PES Mathématique

Nom de l'enseignant :

Résultat Final du Module : Calcul Différentiel et Equations Différentiel

N°	NOM	PRENOM	DAT_NAI	ETAT	EMD1	EMD2	Moy CC	Synth	Moy Sy	Sup Sy	rat	Moy R	Moy
1	ACHRATI	DHIAA HOUDDA	08/11/1994		12,25								
2	ADDA	KARIMA	25/04/1995		10,75								
3	AMARA	MOHAMMED YOUCEF	10/06/1995		/								
4	AYAD	SAMIA	09/09/1995		13,5								
5	BELDJILALI	NOUR EL HOUDA	07/12/1995		09,5								
6	BELFARH	FATIMA ZAHRA	14/02/1995		12,75								
7	BELHADEF	AHLEM	24/11/1995		12,5								
8	Beloudane	Rahma	06/04/1995		16,5								
9	BENABBOU	NOUREDDINE	07/01/1995		14,25								
10	BENCHERIET	AMEL	11/11/1995		10,25								
11	BENGHENIMA	IMANE	15/07/1995		15,25								
12	Benghia	Batoul	31/03/1996		14,25								
13	BENNOUR	ABDELLATIF	24/09/1995		15,5								
14	Bensahla	Radhia	05/04/1994		17								
15	BOBOT	CHAIMAA	10/12/1995		10								
16	BOUCHAMA	SARAH	25/10/1992		09,25								
17	BOUDJEMA	HASSIBA	30/07/1995		10,75								
18	BOUKAAZA	SOUAD	22/09/1995		13,75								
19	BOUKHARI	HOURIA	27/07/1995		13,75								
20	BOURAHLA	HAFSA	21/09/1995		15								
21	BOUZERDAB	AICHA	22/06/1995		13,25								
22	BOUZIANE	YEHIA	03/11/1995		15,5								

Le 18/09/16
Sahila Asmaa

23	BOUZIANE	RAHMA	20/08/1995		08.5								
24	CHACHOUA	YASMINE	02/08/1995		16,75								
25	CHERIFI	OMAR	07/05/1995		09,25								
26	DAAOU	CHAIMAA	11/12/1995		08,25								
27	DAFFI	NESRINE	13/01/1995		11,75								
28	DJAFRI	SOUMAYA	13/07/1995		10								
29	FARES	HANANE	25/10/1995		13								
30	FATAH	WASSILA	18/03/1995		16,5								
31	Ferrani	CHAIMAA	23/10/1995		16,5								
32	GHARBI	MERIEM	23/01/1994		14								
33	HADJ ALI	MERIEM	17/05/1995		12,5								
34	HADJADJ	SOMIA	28/07/1995		16								
35	Halal	Badra	01/01/1995		14,5								
36	Hameurlaine	FAIROUZ	21/07/1996		14								
37	HAMMOUDA	DOUNIA	14/04/1995		16								
38	HAMOUDI	AMINA	18/03/1993		—								
39	Ikhlef	Ferial	13/12/1995		16								
40	KADRI	HANENE	02/01/1995		10,5								
41	KERMOUZI	WISSAM	02/08/1995		11,5								
42	KHALDI	RAHIMA	29/06/1995		16								
43	MAZARI	AFIFA	06/01/1995		14,5								
44	Mehimda	Hanane	28/10/1995		10								
45	MEKHFI	MOHSINE	18/05/1995		[illegible]								
46	MERAH	SARA	06/07/1993		17								
47	MESBAH	FAIROUZ	13/01/1996		14								
48	NADJI	ASSIA	15/05/1995		17								
49	RABHI	ABD ESSAMAD	20/01/1996		17,5								
50	REDJEM	YASMINE	30/11/1994		16,5								
51	Sadji	FATIMA ZAHRA	27/12/1995		10,5								
52	Sayah	Soraya	09/03/1995		15								
53	SLIMANI	ABDALLAH	16/12/1995		14,5								
54	TELLI	ZINEB	20/09/1995		15								
55	ZANNAN	FATMA	17/09/1994		19								

Le 18/02/16
Sahila Asmaa

تصحيح الاختبار الأول في الحساب التفاضلي

تمرين الأول(5 نقاط)

1. نظرية كوشي ليبشينز 3

لتكن مسالة كوشي

$$(*) \quad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

علي المستطيل

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$$

اذا كانت f و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ مستمرتان و محدودتان علي مستطيل R

$$\exists M > 0, K > 0 : |f(x,y)| \le M \quad , \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le K \qquad \forall (x,y) \in R$$

فان مسالة كوشي $(*)$تقبل حل وحيد على المجال $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ بحيث :

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

2. لتكن مسالة كوشي الآتية 2

$$(**) \quad \begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

على المستطيل $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, \ |y| \le 1\}$

مسالة كوشي $(**)$ لا تحقق شروط نظرية كوشي ليبشينز لان

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| = \left|\frac{2}{3y^{\frac{1}{3}}}\right| \to 0 \qquad (2)$$

عندما $y \to 0$ و حيث ان $y=0$ نقطة من S فان المعادلة (1) تبين ان $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ غير محدودة على المستطيل S

تمرين الثاني: (10 نقاط)

$$x^2y' + xy = x+1$$

2,5

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

هي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة 1 والمعادلة المتجانسة المرفقة

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$y=($ هو حل لهده المعادلة المتجانسة

ن اجل $y \neq 0$ لدينا

$$y' + \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln x + c\ ,\quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \frac{k}{x} \qquad k \in \mathbb{R}^*$$

منه الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y = \frac{k}{x} \quad , \qquad k \in \mathbb{R}$$

يجاد الحل الخاص للمعادلة (2) نستعمل طريقة تغيير الثابت

$$y = \frac{k(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{k'x - k}{x^2}$$

تعويض y و y′ في (2) نجد

$$k' = 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow k = x + \ln(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

منه الحل العام للمعادلة (2)

$$y = 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{c}{x} \quad , \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$2xyy' = y^2 - x^2$$

2,5

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) \qquad (1)$$

و هي معادلة متجانسة : نضع

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t$$

نقوم بتعويض y و y' في المعادلة (1) نحصل على

$$t'x + t = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \Rightarrow t'x = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^2+1}{t}\right)$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين

$$\frac{-2tdt}{t^2+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln(t^2+1) = \ln|x| + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$t^2 + 1 = \frac{k}{|x|} \ , \quad k \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{k}{|x|} - 1$$

و بالتالي

$$y^2 = k\frac{x^2}{|x|} - x^2 \qquad , \qquad k \in \mathbb{R}^*$$

$$e^{-x^2+y}y' = x \qquad (3)$$

2,5

هي معادلة ذات متغيرين منفصلين

$$\int e^y dy = \int xe^{x^2}$$

$$e^y = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}$$

$$e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

25

$$(4) \qquad y' + xy'' = x^2$$

بوضع $z = y'$ ومنه $z' = y''$

نحصل على معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى $(E) \quad z' + \frac{1}{x} z = x$

والمعادلة المتجانسة المرفقة $z' + \frac{1}{x} z = 0$

$z = 0$ هو حل لهذه المعادلة المتجانسة

من اجل $z \neq 0$ لدينا

$$z' + \frac{1}{x} z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} z \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = -\ln|x| + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{k}{|x|} \qquad k \in \mathbb{R}^*$$

ومنه الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$z = \frac{k}{|x|} \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة (E) نستعمل طريقة تغيير الثابت توجد حالتان

من اجل $x > 0$

$$y = \frac{k(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{k'x - k}{x^2}$$

بتعويض y و y′ في (E) نجد

$$k' = 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad k = x + \ln(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ومنه الحل العام للمعادلة (E) $\quad c \in \mathbb{R} \quad z = 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{c}{x},$

وبالتالي

$$\begin{cases} y = x + (\ln x)^2 + c\ln x, & si\, x > 0 \\ y = x + (\ln x)^2 - c\ln x, & si\, x < 0 \end{cases}$$

تمرين الثالث(5 نقاط)

$(F)\ \begin{cases}x'=2x+3y\\ y'=x-2y\end{cases}$ 1,5

المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix}2-r & 3\\ 1 & -2-r\end{vmatrix}=0\Rightarrow -(4-r)^2-3=0$$

$$\Rightarrow r_1=\sqrt{7},\quad r_2=-\sqrt{7}$$

ومنه الحلول العامة للجملة (F)

$$X=\begin{pmatrix}\lambda_1 e^{\sqrt{7}t}\\ \mu_1 e^{\sqrt{7}t}\end{pmatrix}\qquad Y=\begin{pmatrix}\lambda_2 e^{-\sqrt{7}t}\\ \mu_2 e^{-\sqrt{7}t}\end{pmatrix}$$

- ايجاد λ_1 و μ_1

$$\begin{cases}\left(2-\sqrt{7}\right)\lambda_1+3\mu_1=0\\ \lambda_1-\left(2+\sqrt{7}\right)\mu_1=0\end{cases}\Rightarrow \lambda_1=\left(2+\sqrt{7}\right)\mu_1$$

بوضع $\mu_1=1$ نجد $\lambda_1=\left(2+\sqrt{7}\right)$ ومنه

$$X=\begin{pmatrix}\left(2+\sqrt{7}\right)e^{\sqrt{7}t}\\ e^{\sqrt{7}t}\end{pmatrix}$$

- ايجاد λ_2 و μ_2

$$\begin{cases}\left(2+\sqrt{7}\right)\lambda_2+3\mu_2=0\\ \lambda_2+\left(-2+\sqrt{7}\right)\mu_2=0\end{cases}\Rightarrow \lambda_2=\left(2-\sqrt{7}\right)\mu_2$$

بوضع $\mu_2=1$ نجد $\lambda_2=\left(2-\sqrt{7}\right)$ ومنه

$$Y=\begin{pmatrix}\left(2-\sqrt{7}\right)e^{-\sqrt{7}t}\\ e^{-\sqrt{7}t}\end{pmatrix}$$

ومنه الحل العام للجملة (E)

$$\begin{cases}x=c_1\left(2+\sqrt{7}\right)e^{\sqrt{7}t}+c_2\left(2-\sqrt{7}\right)e^{-\sqrt{7}t}\\ y=2c_1e^{\sqrt{7}t}+2c_2e^{-\sqrt{7}t}\end{cases}$$

$(E)\ \begin{cases}x'=4x-y\\ y'=-4x+4y\end{cases}$ 3,5

المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix}4-r & -1\\ -4 & 4-r\end{vmatrix}=0\Rightarrow (4-r)^2-4=0$$

$$\Rightarrow r_1=6,\quad r_2=2$$

ومنه الحلول العامة للجملة (E)

$$X=\begin{pmatrix}\lambda_1 e^{6t}\\ \mu_1 e^{6t}\end{pmatrix}\qquad Y=\begin{pmatrix}\lambda_2 e^{2t}\\ \mu_2 e^{2t}\end{pmatrix}$$

- ايجاد λ_1 و μ_1

$$\begin{cases}-2\lambda_1-\mu_1=0\\ -4\lambda_1-2\mu_1=0\end{cases}\Rightarrow \mu_1=-2\lambda_1$$

بوضع $\lambda_1=1$ نجد $\mu_1=-2$ ومنه

$$X=\begin{pmatrix}e^{6t}\\ 2e^{6t}\end{pmatrix}$$

- ايجاد λ_2 و μ_2

$$\begin{cases}2\lambda_2-\mu_2=0\\ -4\lambda_2+2\mu_2=0\end{cases}\Rightarrow \mu_2=2\lambda_2$$

بوضع $\lambda_2=1$ نجد $\mu_2=2$ ومنه

$$Y=\begin{pmatrix}e^{2t}\\ 2e^{2t}\end{pmatrix}$$

ومنه الحل العام للجملة (E)

$$\begin{cases}x=c_1e^{6t}+c_2e^{2t}\\ y=2c_1e^{6t}+2c_2e^{2t}\end{cases}$$