

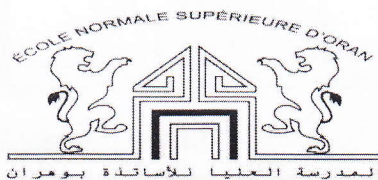
N°	NOM	PRENOM	DAT_NAI	ETAT	EMD1	EMD2	Moy CC	Synth	Moy Sy	Sup Sy	rat	Moy R	Moy
1	ABAR	FATIMA EL ZOHRA	16/03/1996		13,5								
2	ALLAHI	ZINEB	12/09/1995		16								
3	AMAIRI	ASSIA	27/09/1995		10,5								
4	AMARI	HALIMA	09/07/1994		13								
5	AMMARI	SMAIL	06/04/1993		/								
6	ARABI	IMANE	29/07/1995		09,5								
7	BAFDOL	ZAKIYA	21/06/1994		15								
8	BAGHDADI	SID AHMED	03/04/1996		11,5								
9	BARKAT	NOUNA	15/04/1994		13								
10	BELGHIT	Wafa	11/04/1995		12,5								
11	BELHANI	CHAHIRA	18/08/1994		10								
12	BELMENOUEUR	MALIKA	03/10/1995		11								
13	BELOUD	ASMAA	24/12/1995		06,5								
14	BENADJEMIA	WALIYA	29/06/1996		11								
15	BENAMAR	SADIA	10/01/1995		14,5								
16	BENAMARA	LAZREG ABDELBASSET	06/10/1995		0,5								
17	Benameur	Asmaa	08/12/1995		04,5								
18	BENANANE	IBRAHIM	24/01/1995		12,5								
19	BENMAZOUZA	MEBARKA	15/04/1994		08,5								
20	BENNACEUR	MOHAMED ELKHALDI	19/09/1995		11								
21	BENOTSMANE	HAFSA	27/04/1995		12								
22	BENTATA	IMANE	14/02/1995		13,50								

Handwritten signature in red ink.

88	TALHAOUI	ASMAE	26/02/1995	15																
89	TIBA	IMEN	01/10/1994	13																
90	ZAHRAOUI	SOFIANE	28/07/1995	12,5																
91	ZAIANI	SAMIYA	26/03/1995	14																
92	ZANZOU	AYADA	28/05/1995	14,5																
93	ZEMOULI	OUSAMA	11/07/1995	06,5																
94	ZENATI	INSAF	02/11/1995	14,5																
95	ZIANI	MALIKA	04/01/1995	12																

التاريخ: الأربعاء 2016/03/02

مدة الإمتحان : ساعة و نصف



المدرسة العليا للأساتذة بوهران

المستوى: السنة الثانية رياضيات

إمتحان السداسي الأول لمقياس الطبولوجيا

التمرين الأول: (07 نقاط)

لتكن المجموعة: $X = \{a, b\}$

(1) عين كل الطبولوجيات الممكنة على المجموعة X .

(2) لتكن المجموعة: $Y = \{a, b, c, d\}$

* أذكر إن كانت كل من عائلات أجزاء المجموعات التالية تشكل طبولوجية أم لا، (مع التبرير):

$$\tau_1 = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\}$$

$$\tau_3 = \{\emptyset, Y, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\tau_4 = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

ليكن التطبيق d المعرفة من $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ نحو \mathbb{R}_+^* ، كما يلي:

$$\forall x > 0, \forall y > 0 : d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

(1) بين أن d تمثل مسافة على \mathbb{R}_+^* .

(2) عين، عندئذ كل الكرات المفتوحة ذات المركز 1، و نصف القطر r ، في الفضاء المترى (\mathbb{R}_+^*, d) ، حيث $r \in \mathbb{R}_+^*$.

التمرين الثالث: (06 نقاط)

فضاء مترى (E, d) ، مجموعة جزئية من E ، $(A \subset E)$.

* برهن التكافؤ التالي: $(d(x, A) = 0) \Leftrightarrow (x \in \bar{A})$ ، حيث \bar{A} : يُرمز إلى لاصقة $A \subset E$.

.... بالتوفيق

ملاحظة: تخصص نقطة واحدة لتقديم الورقة

تصحيح إمتحان السداسي الأول + سلم التنقيط لقياس الطوبولوجيا

التمرين الأول: (07 نقاط)

(1) تعيين كل الطوبولوجيات الممكنة على المجموعة $X = \{a, b\}$:

$$\tau'_1 = \{\phi, X\} = \tau_g, \quad \tau'_2 = \{\phi, \{a\}, X\}$$

$$02 \quad \tau'_3 = \{\phi, \{b\}, X\}, \quad \tau'_4 = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}\} = P(X) = \tau_d$$

(2) أذكر إن كانت كل من عائلات أجزاء المجموعات التالية تشكل طوبولوجية أم لا (مع التبرير):

1.5 τ_1 لا تشكل طوبولوجية على Y ، لأن: $\{a, b\}, \{b, c\} \in \tau_1$ ،
 لكن: $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\} \notin \tau_1$ ، أي أن لا تحقق الشرط الثالث.

01 τ_2 تشكل طوبولوجية على Y ، لأنها تحقق جميع الشروط الثلاثة.

1.5 τ_3 لا تشكل طوبولوجية على Y ، لأن: $\{a, b\}, \{a, c\} \in \tau_3$ ،

لكن: $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \notin \tau_3$

01 τ_4 تشكل طوبولوجية على Y ، لأنها تحقق جميع الشروط الثلاثة.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

(1) اثبات أن d تمثل مسافة على \mathbb{R}_+^* :

• لدينا: لأجل كل x, y من \mathbb{R}_+^* :

$$0.5 \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow 1 \cdot y = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x \quad (1)$$

$$0.5 \quad d(y, x) = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \left| -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right| = |-1| \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = d(x, y) \quad (2)$$

(3) لدينا: لأجل كل x, y, z من \mathbb{R}_+^* :

$$0.5 \quad d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right) \right| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right| = d(x, z) + d(z, y)$$

الذن: مسافة

0.5 (2) يعين، كل الكرات المفتوحة ذات المركز 1، و نصف القطر r :

$$0.5 \quad B(1, r) = \{y \in \mathbb{R}_+^* : d(y, 1) < r\}$$

$$y \in B(1, r) \Leftrightarrow d(y, 1) < r$$

$$0.5 \quad \Leftrightarrow \left| \frac{1}{y} - 1 \right| < r$$

0.5

$$\Leftrightarrow -r < \frac{1}{y} - 1 < r$$

$$\Leftrightarrow -r < \frac{1-y}{y} < r$$

$$\Leftrightarrow -ry < 1-y < ry$$

$$\Leftrightarrow -1-ry < -y < 1+ry$$

$$\Leftrightarrow 1+ry > y > 1-ry$$

$$\Leftrightarrow 1-ry < y < 1+ry$$

0.5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+r)y > 1 & (E_1) \\ (1-r)y < 1 & (E_2) \end{cases}$$

لنميز حالتين :

0.5

الحالة الأولى: لما $1-r > 0$ ، أي: $0 < r < 1$ ، فإن: $(E_2) \Leftrightarrow y < \frac{1}{1-r}$

$$(E_1) \Leftrightarrow y < \frac{1}{1+r} \quad \text{و:}$$

$$y \in \left] \frac{1}{1+r}, \frac{1}{1-r} \right[\quad \text{ادن:}$$

0.5

الحالة الثانية: لما $1-r \leq 0$ ، أي: $r \geq 1$ ، فإن: $(E_2) \Leftrightarrow y > \frac{1}{1-r}$

$$(E_1) \Leftrightarrow y > \frac{1}{1+r} \quad \text{و:}$$

$$y > \frac{1}{1+r} \quad \text{ادن:}$$

خلاصة:

01

$$B(1,r) = \begin{cases} \left] \frac{1}{1+r}, \frac{1}{1-r} \right[& ; 0 < r < 1 \\ \left] \frac{1}{1+r}, +\infty \right[& ; r \geq 1 \end{cases}$$

التمرين الثالث: (06 نقاط)

فضاء متري (E, d)

(1) نوهن الاستلزام التالي: $(d(x, A) = 0) \Leftrightarrow (x \in \bar{A})$

0,5

فرض أن: $(x \in \bar{A})$ ، معناه: $\forall \varepsilon > 0, \exists V_x / V_x \cap A \neq \Phi$

0,5

أي أنه: $\forall \varepsilon > 0, \exists V_x = B(x, \varepsilon) / B(x, \varepsilon) \cap A \neq \Phi$

0,5

أي أنه: $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a \in B(x, \varepsilon)$

0,5

أي : $\exists a \in A : 0 \leq d(x, a) < \varepsilon$

0,5

ومنه : $\exists a \in A : 0 \leq d(x, a) < \varepsilon + 0$

0,5

أي : $\inf d(x, A) = 0$ وبالتالي : $d(x, A) = 0$ (2) نهن الاستلزام التالي : $(d(x, A) = 0) \Rightarrow (x \in \bar{A})$

01

نفرض أن : $d(x, A) = 0$ ، معناه : $\forall \varepsilon > 0, d(x, A) < \varepsilon$ أي أنه : $\forall \varepsilon > 0, \exists B(x, \varepsilon) : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \Phi$ بأخذ : $V_x = B(x, \varepsilon)$

01

ادن : $\forall \varepsilon > 0, \exists V_x / V_x \cap A \neq \Phi$

01

أي أنه : $x \in \bar{A}$ ومنه : $(d(x, A) = 0) \Rightarrow (x \in \bar{A})$

و من الاستلزامين ، نستنتج أن :

$$(d(x, A) = 0) \Rightarrow (x \in \bar{A})$$