Ecole Normale Superieure d'Oran

Année Universitaire : 2015/2016 2 éme Année PEM Mathématique

Nom de l'enseignant :

Résultat Final du Module : Calcul Différentiel et Equations Différentiel

N°	NOM	PRENOM	DAT_NAI	ETAT	EMD1	EMD2	Moy CC	Synth	Moy Sy	Sup Sy	rat	Moy R	Moy
1	ABAR	FATIMA EL ZOHRA	16/03/1996		16,5								
2	ALLAHI	ZINEB	12/09/1995		17,5								
3	AMAIRI	ASSIA	27/09/1995		14								
4	AMARI	HALIMA	09/07/1994		16,5								
5	AMMARI	SMAIL	06/04/1993		—								
6	ARABI	IMANE	29/07/1995		5,5								
7	BAFDOL	ZAKIYA	21/06/1994		16,5								
8	BAGHDADI	SID AHMED	03/04/1996		16								
9	BARKAT	NOUNA	15/04/1994		17,5								
10	BELGHIT	WAFA	11/04/1995		11								
11	BELHANI	CHAHIRA	18/08/1994		14								
12	BELMENOUER	MALIKA	03/10/1995		14,5								
13	BELOUD	ASMAA	24/12/1995		05								
14	BENADJEMIA	WALIYA	29/06/1996		14								
15	BENAMAR	SADIA	10/01/1995		10,5								
16	BENAMARA	LAZREG ABDELBASSET	06/10/1995		02								
17	Benameur	Asmaa	08/12/1995		12								
18	BENANANE	IBRAHIM	24/01/1995		06								
19	BENMAZOUZA	MEBARKA	15/04/1994		16								
20	BENNACEUR	MOHAMED ELKHALDI	19/09/1995		12,5								
21	BENOTSMANE	HAFSA	27/04/1995		15,75								
22	BENTATA	IMANE	14/02/1995		16								

Le 18/02/2016
Sahila Asmaa

23	BOUBAGUI	BAKHTA	28/12/1993	16,5									
24	BOUCHAKOUR	AHLEM	13/03/1995	14									
25	BOUDELA	BOUCEKRA	16/03/1995	05									
26	Boudlal	Mimouna	01/03/1995	10,5									
27	BOUFADENE	BILLEL	23/04/1995	18									
28	BOUGUENINA	SARA	03/03/1994	/									
29	BOUGUETTAF	HAYAT	14/06/1994	13,5									
30	BOUHALIS	FATIMA	15/01/1995	16,5									
31	BOUHAMADI	HICHAM	01/04/1995	09									
32	BOUHASSOUNE	KAMAL	05/08/1994	14									
33	BOUICH	ALI	24/03/1996	15,5									
34	BOUMEZRAG	AICHA	27/06/1995	14,5									
35	BOUTCHACHA	MAROUA DOUNIA	07/09/1996	18									
36	BOUZEBRA	RABAH	13/05/1994	/									
37	BOUZIDI	HICHAM	04/01/1994	13,5									
38	Brada	sari	03/12/1995	9,5									
39	BRAHIMI	BEKHTA	09/04/1995	16,5									
40	CHAMI	ABIR	11/06/1995	11									
41	CHEKAIEM	NOUREDDINE	05/10/1995	12,5									
42	DEBIB	BAKHTA	17/08/1995	15,5									
43	DERKAOUI	NOUREDDINE	16/10/1995	10									
44	DJEBLI	OUSSAMA	13/07/1994	13									
45	FIHAKHEIR	MOHAMMED ABDELOUAHHAB	29/07/1994	19									
46	GADOUCHE	RIYADH	22/07/1995	14,5									
47	GHANI	AICHA	05/11/1995	19									
48	GHEZALA	FATIMA ZOHRA	06/12/1994	14,5									
49	GUENNOUN	HABIB	15/06/1995	19									
50	GUERNOUG	FADHILA	30/01/1995	16,5									
51	GUIZ	FATIMA	02/04/1995	12,5									
52	HABAIEB	FATIMA	09/02/1995	07									
53	HACHEMI	MOHAMED AMINE	07/04/1995	15,5									
54	HADJ OTHMANE	HAFIDA	10/03/1995	14									

Le 18/02/16
Sahila Asmaâ

55	HASSAM	KELTOUM	04/08/1995		9,5								
56	HASSENE DAOUADJI	ILYES	26/04/1995		11								
57	KACHER	KHEIRA	01/01/1996		16,5								
58	KHADRAOUI	SIHEM	30/09/1996		16,5								
59	KHENATA	SLIMANE	18/03/1994		16,5								
60	KHEROUF	WISSAM	06/08/1995		13								
61	KOUIDER	CHAHRAZAD	28/02/1995		11,5								
62	KRAIFI	FATIHA	06/05/1995		16,5								
63	KRIM ARBI	NACERA	02/01/1995		4,5								
64	LAOURI	SIFEDDINE	06/10/1995		15,5								
65	LARBI DAOUADJI	FATMA	08/09/1995		16								
66	LATRACHE	ISMAIL	23/09/1995		16								
67	MAAMMERI	MAHDJOUBA	13/12/1995		15,5								
68	MADANI	ABDELDJABAR	25/09/1995		2,5								
69	MAKHLOUF	MOHAMED	12/02/1995		18								
70	MECELTI	ILYAS	02/09/1995		16,5								
71	MECHEHOUD	NASSIMA	16/06/1995		16								
72	MEFLAH	SAFIA	29/06/1995		17								
73	MEKHATRI	WAHIBA	24/11/1994		13,5								
74	MEKKI DAOUADJI	NABIL	15/09/1995		12								
75	MENAD	LADJEL	07/06/1995		16								
76	MESSAOUD	FATIHA	28/01/1995		14								
77	MILOUD AMEUR	SAMIRA	22/11/1995		17								
78	MORRACH	RABHIA	11/03/1996		14,5								
79	MOULAI	AMRA HALIMA	01/05/1995		15								
80	MOUNA	ASMA	02/11/1995		17,5								
81	MOUSSAOUI	NARDJIS	15/01/1995		12,5								
82	Nafa	Faiza	14/05/1995		12,5								
83	RAHIS	FATIMA	08/07/1994		/								
84	SAOULA	ZINEB	01/04/1995		12,5								
85	SEBBA	MOHAMMED TAHAR	08/10/1994		17								
86	Senouci	Krima	28/11/1995		15,5								
87	TAIBI	BAKHTA	04/01/1995		7,5								

Le 18/02/16
Sahila Asmaa

88	TALHAOUI	ASMAE	26/02/1995		18								
89	TIBA	IMEN	01/10/1994		16								
90	ZAHRAOUI	SOFIANE	28/07/1995		14								
91	ZAIANI	SAMIYA	26/03/1995		19								
92	ZANZOU	AYADA	28/05/1995		17,5								
93	ZEMOULI	OUSAMA	11/07/1995		10,5								
94	ZENATI	INSAF	02/11/1995		16								
95	ZIANI	MALIKA	04/01/1995		11								

Le 18/02/16
Sahili Asmaâ

تصحيح الاختبار الأول في الحساب التفاضلي

تمرين الأول(5 نقاط)

1. نظرية كوشي ليبشيتز 3

لتكن مسالة كوشي

$$(*)\qquad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

علي المستطيل

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$$

اذا كانت f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرتان و محدودتان علي مستطيل R

$$\exists M > 0, K > 0 : |f(x,y)| \le M \quad , \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le K \qquad \forall (x,y) \in R$$

فان مسالة كوشي $(*)$ تقبل حل وحيد على المجال $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ بحيث :

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

2. لتكن مسالة كوشي الآتية 2

$$(**)\qquad \begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

على المستطيل $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$

مسالة كوشي $(**)$ لا تحقق شروط نظرية كوشي ليبشينز لان

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| = \left|\frac{2}{3y^{\frac{1}{3}}}\right| \to 0 \qquad (2)$$

عندما $0 \leftarrow y$ و حيث ان $y=0$ نقطة من S فان المعادلة (1) تبين ان $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ غير محدودة على المستطيل S

تمرين الثاني: (10 نقاط)

$2xyy' = y^2 - x^2$ 2,5

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) \qquad (1)$$

و هي معادلة متجانسة : نضع

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t$$

نقوم بتعويض y و y' في المعادلة (1) نحصل على

$$t'x + t = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \Rightarrow t'x = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^2+1}{t}\right)$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين

$$\frac{-2tdt}{t^2+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln\left(t^2+1\right) = \ln|x| + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$t^2 + 1 = \frac{k}{|x|} \ , \quad k \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{k}{|x|} - 1$$

و بالتالي

$$y^2 = k\frac{x^2}{|x|} - x^2 \qquad , \qquad k \in \mathbb{R}^*$$

$x^2 y' + xy = x + 1$ 2,5

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

هي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة 1 والمعادلة المتجانسة المرفقة

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$y = 0$ هو حل لهده المعادلة المتجانسة

من اجل $y \neq 0$ لدينا

$$y' + \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln x + c \ , \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \frac{k}{x} \qquad k \in \mathbb{R}^*$$

منه الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y = \frac{k}{x} \qquad , \qquad k \in \mathbb{R}$$

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة (2) نستعمل طريقة تغيير الثابت

$$y = \frac{k(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{k'x - k}{x^2}$$

تعويض y و y′ في (2) نجد

$$k' = 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad k = x + \ln(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

منه الحل العام للمعادلة (2)

$$y = 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{c}{x} \qquad , \qquad c \in \mathbb{R}$$

$e^{-x^2+y} y' = x \qquad (3)$ 2,5

هي معادلة ذات متغيرين منفصلين

$$\int e^y dy = \int x e^{x^2}$$

$$e^y = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2}$$

$$e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

(2.5)

$$y' + xy'' = x^2 \qquad (4)$$

بوضع $z = y'$ ومنه $z' = y''$

نحصل على معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى $\left(E\right) \quad z' + \frac{1}{x}z = x$

والمعادلة المتجانسة المرفقة

$$z' + \frac{1}{x}z = 0$$

$z = 0$ هو حل لهده المعادلة المتجانسة

من اجل $z \neq 0$ لدينا

$$z' + \frac{1}{x}z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}z \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = -\ln|x| + c \;, \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \frac{k}{|x|} \qquad k \in \mathbb{R}^*$$

ومنه الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$z = \frac{k}{|x|} \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة (E) نستعمل طريقة تغيير الثابت توجد حالتان

من اجل $x > 0$

$$y = \frac{k(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{k'x - k}{x^2}$$

بتعويض y و y′ في (E) نجد

$$k' = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow k = x + \ln(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ومنه الحل العام للمعادلة (E) $c \in \mathbb{R}$ $\quad z = 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{c}{x},$

وبالتالي

$$\begin{cases} y = x + (\ln x)^2 + c\ln x, & si\, x > 0 \\ y = x + (\ln x)^2 - c\ln x, & si\, x < 0 \end{cases}$$

تمرين الثالث(5 نقاط)

$$(F)\begin{cases} x' = 2x+3y \\ y' = x-2y \end{cases}$$

1,5

المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 2-r & 3 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(4-r)^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = \sqrt{7}, \quad r_2 = -\sqrt{7}$$

ومنه الحلول العامة للجملة (F)

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\sqrt{7}t} \\ \mu_1 e^{\sqrt{7}t} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{-\sqrt{7}t} \\ \mu_2 e^{-\sqrt{7}t} \end{pmatrix}$$

- ايجاد λ_1 و μ_1

$$\begin{cases} (2-\sqrt{7})\lambda_1 + 3\mu_1 = 0 \\ \lambda_1 - (2+\sqrt{7})\mu_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = (2+\sqrt{7})\mu_1$$

بوضع $\mu_1 = 1$ نجد $\lambda_1 = (2+\sqrt{7})$ ومنه

$$X = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{7})e^{\sqrt{7}t} \\ e^{\sqrt{7}t} \end{pmatrix}$$

- ايجاد λ_2 و μ_2

$$\begin{cases} (2+\sqrt{7})\lambda_2 + 3\mu_2 = 0 \\ \lambda_2 + (-2+\sqrt{7})\mu_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = (2-\sqrt{7})\mu_2$$

بوضع $\mu_2 = 1$ نجد $\lambda_2 = (2-\sqrt{7})$ ومنه

$$Y = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{7})e^{-\sqrt{7}t} \\ e^{-\sqrt{7}t} \end{pmatrix}$$

ومنه الحل العام للجملة (E)

$$\begin{cases} x = c_1(2+\sqrt{7})e^{\sqrt{7}t} + c_2(2-\sqrt{7})e^{-\sqrt{7}t} \\ y = 2c_1 e^{\sqrt{7}t} + 2c_2 e^{-\sqrt{7}t} \end{cases}$$

$$(E)\begin{cases} x' = 4x-y \\ y' = -4x+4y \end{cases}$$

3,5

المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 4-r & -1 \\ -4 & 4-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-r)^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 6, \quad r_2 = 2$$

ومنه الحلول العامة للجملة (E)

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{6t} \\ \mu_1 e^{6t} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{2t} \\ \mu_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

- ايجاد λ_1 و μ_1

$$\begin{cases} -2\lambda_1 - \mu_1 = 0 \\ -4\lambda_1 - 2\mu_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_1 = -2\lambda_1$$

بوضع $\lambda_1 = 1$ نجد $\mu_1 = -2$ ومنه

$$X = \begin{pmatrix} e^{6t} \\ 2e^{6t} \end{pmatrix}$$

- ايجاد λ_2 و μ_2

$$\begin{cases} 2\lambda_2 - \mu_2 = 0 \\ -4\lambda_2 + 2\mu_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_2 = 2\lambda_2$$

بوضع $\lambda_2 = 1$ نجد $\mu_2 = 2$ ومنه

$$Y = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

ومنه الحل العام للجملة (E)

$$\begin{cases} x = c_1 e^{6t} + c_2 e^{2t} \\ y = 2c_1 e^{6t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases}$$