Ecole Normale superieure d'Oran

Année Universitaire : 2015/2016 1 iere Année PES - Sciences Exactes

Nom de l'enseignant : Mostefaoui

Nom du Module: Analyse 1

N°	NOM	PRENOM	DAT_NAI	ETAT	Emd1	Emd2	Moy CC	Synth	Moy Sy	Sup Sy	rat	Moy R	Moy
1	ABDE LLAOUI	FETH ALLAH	25/03/1996	N	X								
2	AGGOUN	BOUCHRA	22/01/1997	N	02,5								
3	ALLAOUI	MOSTEFA	21/11/1995	N	10,5								
4	AMARI	IKRAM FADHILA	14/10/1997	N	05,5								
5	AMARI	ABDALLAH	21/11/1995	N	07								
6	BEKKOUR	HICHEM	07/03/1997	N	X								
7	BEKRATTOU	RAHMOUNA	24/05/1997	N	06,5								
8	BELARBI	ABDELALI	28/05/1994	N	10								
9	BELLAHOUEL	AHLEM	28/12/1997	N	05								
10	BELOUAHRANI	SABRINA	20/11/1996	N	11,5								
11	BELROUL	MERIEM	08/10/1997	N	10								
12	BENABBOUN	SAMIRA	01/03/1995	N	05								
13	BENATTOU	BOUCHRA	11/02/1996	N	10,5								
14	BENCHERIF	ABDELHAK	11/01/1997	N	08,5								
15	BENCHIKH	AMINA	06/07/1997	N	13,75								
16	BENEDDINE	ASMAA	09/06/1996	N	10,5								
17	BENOURRAD	FEDOUA	12/02/1998	N	09,5								
18	BENOUSSAAD	ANFAL	13/07/1997	N	06,5								
19	BENSAFI	MERIEM	18/08/1996	N	09,5								
20	BENSALEM	MOURAD	29/12/1994	N	07								
21	BENSHILA	LEILA	28/05/1996	N	08								
22	BERESSA	ZOHRA	28/10/1997	N	06,5								
23	BERROUBA	MOKHTARIA	08/10/1996	N	09,25								
24	BIRECHE	LOUBNA	09/11/1996	N	11								

le 14/02/2016

المدرسة العليا للأساتذة بوهران

25	BOUAZZA	AHMED YACINE	16/10/1995	N	08								
26	BOUCHEKIFA	KHAOULA OUM	29/06/1996	N	12,5								
27	BOUDJEMA	KADA	26/05/1984	N	11								
28	BOUDJENANE	HOUCINE	30/01/1997	N	X								
29	BOUMELAH	SARA	23/03/1996	N	08,5								
30	BOUOKKA	AISSA	11/08/1996	N	03,5								
31	BOUSSOUKAIA	KHAOULA	23/12/1996	N	13								
32	CHERRAK	BAKHTA CHAIM	24/11/1997	N	15,5								
33	CHIKH	NARIMANE	12/07/1996	N	15,5								
34	DEBA	SARAH	10/10/1996	N	07								
35	DJELLAT	MARWA	20/12/1996	N	16,5								
36	ECHIDMI	CHAHINEZ	19/08/1996	N	10								
37	FETATI	DJAMEL DINE	18/08/1997	N	06								
38	GHALEM	ABDEL HAKIM	23/03/1996	N	06								
39	GHEZLI	KHAYRA	23/09/1996	N	09,5								
40	GOTAI	LATIFA	04/06/1997	N	07								
41	HADRI	WISEM	17/03/1996	N	08,5								
42	HALILOU	MALIKA	13/08/1995	N	13,5								
43	HAMIDI	BENAMEUR	05/02/1995	N	09,5								
44	KADA BEN FOD	SANAA	24/08/1996	N	05								
45	KADRI	KAWTHER	22/02/1996	N	07								
46	KEDDOUR BEN	KHADRA IKRAM	20/01/1996	N	08,5								
47	KHALDI	ASMAA	10/06/1995	N	10								
48	KOUDID	DJIHENE	09/09/1996	N	05								
49	LAKROUMBE	SALIM	22/12/1997	N	15								
50	LAOUAILI	FATIMA	07/09/1991	N	08,5								
51	MAAROUF	YAMIN	16/09/1996	N	06,5								
52	MANA	SOUMIA	24/04/1996	N	15								
53	MATIKA	AHMED	28/08/1993	N	17,5								
54	MEHALLI	NOUR EL HOUD	14/10/1997	N	14								
55	NEZIHA	IKRAM BAKHTA	24/10/1997	N	15								
56	RAHMANI	AMAL	02/12/1996	N	03								
57	ROUBA	AHLEM	22/01/1996	N	14								

le 14/02/2016

58	SALEM	ABDESSAMAD	03/12/1997	N	10,5								
59	SEKKAL	BELLIL	16/01/1997	N	08,5								
60	TERNI	MERIEM	07/02/1996	N	14								
61	ZIANI	ZAKARIA ABD EL	02/07/1997	N	X								
62	ZIDAN	KHAOULA	12/10/1997	N	12,5								
63	ZIDAN	KHEDIDJA	12/10/1997	N	14								

le 14/02/2016

QA

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بوهران

المدرسة العليا للأساتذة بوهران
سنة أولى علوم دقيقة

2016 - 02 - 01
المدة 1 سا 30 د

الامتحان الأول في مادة التحليل

التمرين الأول: (6 نقاط)

1) بين أن كل متتالية متقاربة محدودة . هل العكس صحيح ؟
2) اذا قبلت دالة نهاية من اليمين وأخرى من اليسار، فهل تقبل هذه الدالة نهاية ؟
3) هل الدالة المعرفة بـ $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ تقبل نهاية عند 0 .
4) أذكر نظرية القيم المتوسطة وما تفسيرها الهندسي؟

التمرين الثاني: (5 نقاط)

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 1}{3 - U_n} \end{cases}$$

1) بين أنه $U_n < 1$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$
2) أدرس رتابة $(U_n)_n$
3) ماذا تستنتج ؟
4) أوجد النهاية ℓ لـ $(U_n)_n$ إن وجدت

التمرين الثالث: (4 نقاط)

باستعمال نظرية التزايدات المنتهية أثبت أن :

$$|\sin x - \sin y| < |x-y| \ , \ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

التمرين الرابع: (5 نقاط)

لنعتبر الدالة

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^{1/x} & x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ a & x = 0 \end{cases}$$

أدرس حسب قيم a استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة f.

تصحيح الامتحان الأول في التحليل

التمرين 1: (6 pts)

① كل متتالية متقاربة محدودة فعلا لتكن $(u_n)_n$ $\xrightarrow[n\to\infty]{} l$ أي

$$\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

ليكن ε لدينا

(1) $|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon$

$\Leftrightarrow l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon \Rightarrow A < u_n < B \Rightarrow (u_n)_n$ محدودة

② العكس غير صحيح نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ ذات الحد العام $u_n = (-1)^n$، $(u_n)_n$ محدودة لكن ليست متقاربة (1)

③ هل إذا قبلت دالة من اليمين واليسار نهايات فإن f تقبل نهاية ؟ لا لأن

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

④ الدالة $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ لا تقبل نهاية عند 0 لأن لدينا

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \nexists \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \in \mathbb{R}^+ / x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} \nexists$ (0,25)

نضع $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$ (0,25) ومنه $\sin\frac{1}{x_n} = \sin(\frac{\pi}{2}+n\pi) = (-1)^n$ (0,25)

ومنه $\lim f(x) \nexists$ (0,25) (1) نظرية القيم المتوسطة (1)

(0) التفسير (1)

التمرين 2: (4 pts)

1) بالتراجع $\forall n\in\mathbb{N}, u_n < 1$

$u_0 = 0 < 1$

(2) نفرض أن $u_n < 1$ ونثبت أن $u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{3-u_n} < 1$?

لدينا

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+1}{3-u_n} - 1 = \frac{u_n+1-3+u_n}{3-u_n} = \frac{-2+2u_n}{3-u_n} = \frac{2(-1+u_n)}{3-u_n} < 0$$

لأن $u_n < 1 \Rightarrow u_n - 1 < 0$ | $u_n < 1 \Rightarrow -u_n > -1 \Rightarrow 3-u_n > 2 > 0$

② دراسة الرتابة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+1}{3-u_n} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{3-u_n} > 0$$ (1,5)

لأن $u_n < 1 \Rightarrow 3-u_n > 2 > 0$ إذن $u_{n+1} - u_n > 0 \quad \forall n$

ومنه $(u_n)_n$ متزايدة تماما

(0,5) $(u_n)_n$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 1 إذن فهي متقاربة نحو نهاية l

لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n+1}{3-u_n} \Leftrightarrow l = \dfrac{l+1}{3-l}$

$\Leftrightarrow l(3-l) = l+1$

$\Leftrightarrow l^2 - 2l \ldots$ (1)

التمرين 3 (4 pts)

$\forall x,y \in \mathbb{R}, |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

نظرية التزايدات المنتهية

لتكن $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ حيث $a<b$ فإن

يوجد على الأقل $c \in]a,b[$ بحيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ (1)

لنعتبر التابع $f: x \mapsto \sin x$ مستمر وقابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ أو بالخصوص

على $[y,x]$ حسب النظرية لدينا $\exists c \in]y,x[$; (1) $f(x)-f(y)=(x-y)f'(c)$

ومنه $\sin x - \sin y = (x-y)\cos c$ أي

(1) $|\sin x - \sin y| = |(x-y)\cos c|$

$= |x-y||\cos c|$ (1)

$\leq |x-y|$ لأن $|\cos c| \leq 1$

التمرين 4 (1 pts)

f تابع مستمر ~~وقابل للاشتقاق على~~ على $]0,+\infty[$ و $]-1,0[$ كجداء وتركيب دوال مستمرة (0.25)

لأن $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} = e$ (1)

$\frac{1}{x}\log(1+x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

. اذا كان $a=e$ فإن f مستمرة على $\mathbb{R}$ (0.25) $e=f(0)$ قابل للاشتقاق كجداء وتركيب دوال مستمرة (0.25)

دراسة قابلية الاشتقاق على 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} - e}{x}$$

(0.25)

$$\underset{\text{Hop}}{=} e\lim\left[-\frac{1}{x^2}\log(1+x) + \frac{1}{x(x+1)}\right] =$$

$$= e\lim_{x\to 0} \frac{x-(x+1)\log(1+x)}{x^2(x+1)}$$

(0.25)

$$\overset{\text{hop}}{=} e\lim_{x\to 0} \frac{1-\log(1+x)-1}{3x^2+2x}$$

(0.25)

$$\overset{\text{hop}}{=} e\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x+1}}{6x+2}$$

$$= -\frac{e}{2}$$

إذن من أجل $a=e$ f قابلة للاشتقاق و $f'(0)=-\frac{e}{2}$ (1)

. اذا كان $a \neq e$ f ليست مستمرة وبالتالي غير قابلة للاشتقاق !