ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE D'ORAN
المدرسة العليا للأساتذة بوهران

Ecole Normale superieure d'Oran

Année Universitaire : 2015/2016 1 iere Année PES - Sciences Exactes

Nom de l'enseignant : Mostefaoui
Nom du Module: Algèbre 1

N°	NOM	PRENOM	DAT_NAI	ETAT	Emd1	Emd2	Moy CC	Synth	Moy Sy	Sup Sy	rat	Moy R	Moy
1	ABDE LLAOUI	FETH ALLAH	25/03/1996	N	X								
2	AGGOUN	BOUCHRA	22/01/1997	N	05								
3	ALLAOUI	MOSTEFA	21/11/1995	N	05								
4	AMARI	IKRAM FADHILA	14/10/1997	N	05								
5	AMARI	ABDALLAH	21/11/1995	N	10								
6	BEKKOUR	HICHEM	07/03/1997	N	X								
7	BEKRATTOU	RAHMOUNA	24/05/1997	N	05								
8	BELARBI	ABDELALI	28/05/1994	N	08,5								
9	BELLAHOUEL	AHLEM	28/12/1997	N	06,5								
10	BELOUAHRANI	SABRINA	20/11/1996	N	12								
11	BELROUL	MERIEM	08/10/1997	N	12,5								
12	BENABBOUN	SAMIRA	01/03/1995	N	06								
13	BENATTOU	BOUCHRA	11/02/1996	N	07,5								
14	BENCHERIF	ABDELHAK	11/01/1997	N	07,5								
15	BENCHIKH	AMINA	06/07/1997	N	12,5								
16	BENEDDINE	ASMAA	09/06/1996	N	05								
17	BENOURRAD	FEDOUA	12/02/1998	N	08								
18	BENOUSSAAD	ANFAL	13/07/1997	N	11								
19	BENSAFI	MERIEM	18/08/1996	N	07,5								
20	BENSALEM	MOURAD	29/12/1994	N	13								
21	BENSHILA	LEILA	28/05/1996	N	09								
22	BERESSA	ZOHRA	28/10/1997	N	05								
23	BERROUBA	MOKHTARIA	08/10/1996	N	05								
24	BIRECHE	LOUBNA	09/11/1996	N	13								

le 15/02/2016

المدرسة العليا للأساتذة بوهران

25	BOUAZZA	AHMED YACINE	16/10/1995	N	08								
26	BOUCHEKIFA	KHAOULA OUM	29/06/1996	N	14,5								
27	BOUDJEMA	KADA	26/05/1984	N	06,5								
28	BOUDJENANE	HOUCINE	30/01/1997	N	X								
29	BOUMELAH	SARA	23/03/1996	N	09,5								
30	BOUOKKA	AISSA	11/08/1996	N	07,5								
31	BOUSSOUKAIA	KHAOULA	23/12/1996	N	09,5								
32	CHERRAK	BAKHTA CHAIM	24/11/1997	N	16,5								
33	CHIKH	NARIMANE	12/07/1996	N	07,5								
34	DEBA	SARAH	10/10/1996	N	05,5								
35	DJELLAT	MARWA	20/12/1996	N	14,5								
36	ECHIDMI	CHAHINEZ	19/08/1996	N	14,5								
37	FETATI	DJAMEL DINE	18/08/1997	N	09,5								
38	GHALEM	ABDEL HAKIM	23/03/1996	N	07,5								
39	GHEZLI	KHAYRA	23/09/1996	N	10								
40	GOTAI	LATIFA	04/06/1997	N	07								
41	HADRI	WISEM	17/03/1996	N	04,5								
42	HALILOU	MALIKA	13/08/1995	N	14,5								
43	HAMIDI	BENAMEUR	05/02/1995	N	03								
44	KADA BEN FOD	SANAA	24/08/1996	N	05								
45	KADRI	KAWTHER	22/02/1996	N	02,5								
46	KEDDOUR BEN	KHADRA IKRAM	20/01/1996	N	05								
47	KHALDI	ASMAA	10/06/1995	N	03								
48	KOUDID	DJIHENE	09/09/1996	N	08								
49	LAKROUMBE	SALIM	22/12/1997	N	08,5								
50	LAOUAILI	FATIMA	07/09/1991	N	04,5								
51	MAAROUF	YAMIN	16/09/1996	N	13								
52	MANA	SOUMIA	24/04/1996	N	15								
53	MATIKA	AHMED	28/08/1993	N	10								
54	MEHALLI	NOUR EL HOUD	14/10/1997	N	08,5								
55	NEZIHA	IKRAM BAKHTA	24/10/1997	N	13								
56	RAHMANI	AMAL	02/12/1996	N	05								
57	ROUBA	AHLEM	22/01/1996	N	05								

15/02/2016

المدرسة العليا للأساتذة بوهران

58	SALEM	ABDESSAMAD	03/12/1997	N	07,5								
59	SEKKAL	BELLIL	16/01/1997	N	15								
60	TERNI	MERIEM	07/02/1996	N	07,5								
61	ZIANI	ZAKARIA ABD E	02/07/1997	N	X								
62	ZIDAN	KHAOULA	12/10/1997	N	15								
63	ZIDAN	KHEDIDJA	12/10/1997	N	15								

15/02/2016

المدرسة العليا للأساتذة بوهران

السنة الجامعية: 2016/2015 المدرسة العليا للاساتذة بوهران

المدة: 1سا و30د سنة أولى علوم دقيقة

الامتحان الأول في مادة الجبر

التمرين الأول: (7 نقاط)

ليكن E و $\cancel{E}$ فضائين شعاعيين على الجسم التبديلي K و f تطبيق خطي من E نحو E

اثبت ان $kerf \cap Imf = f(kerf^2)$

التمرين الثاني: (6 نقاط)

ليكن E فضاء شعاعي على K بعده منتهي n

اثبت أن $E \simeq K^n$

التمرين الثالث: (7 نقاط)

ليكن f تطبيق معرف كما يلي:

$$f : R^3 \to R^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - Z \\ 0 \end{pmatrix}$$

احسب: Imf و $kerf$ و ما بعداهما

ex01 (6pts)

$\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = f(\mathrm{Ker} f^2)$

"$\subset$" $y \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f \Rightarrow y \overset{?}{\in} f(\mathrm{Ker} f^2)$

$\Rightarrow \overset{?}{\exists} x \in \mathrm{Ker} f^2 / y = f(x)$

$\Rightarrow ? \; f^2(x) = 0 \; / \; y = f(x)$

soit $\begin{cases} y \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(y) = 0 \\ y \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists x \in E / f(x) = y \end{cases}$ (0,75)

$\Rightarrow \exists x \in E / f^2(x) = f(y) = 0$ (1)

$\Rightarrow \exists x \in E / x \in \mathrm{Ker} f^2$ $f(x) = y$ (0,75)

$\Rightarrow \exists x \in \mathrm{Ker} f^2 / y = f(x)$ (0,75)

$\Rightarrow y \in f(\mathrm{Ker} f^2)$

"$\supset$" $y \in f(\mathrm{Ker} f^2) \overset{?}{\Rightarrow} y \overset{?}{\in} \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$

$\Rightarrow f(y) \overset{?}{=} 0$ et $\overset{?}{\exists} x \in E / y = f(x)$

soit $y \in f(\mathrm{Ker} f^2) \Rightarrow \exists x \in \mathrm{Ker} f^2 / y = f(x)$ (0,75)

$\Rightarrow f^2(x) = 0, x \in E / y = f(x)$ (0,75) $\mathrm{Ker} f^2 \subset E$ (0,75)

$\Rightarrow f^2(x) = 0, \; y \in \mathrm{Im} f$ (0,75)

$\Rightarrow f(f(x)) = 0, \; y \in \mathrm{Im} f$ (0,75)

$\Rightarrow f(y) = 0, \; y \in \mathrm{Im} f$ (0,75)

$\Rightarrow y \in \mathrm{Ker} f, \; y \in \mathrm{Im} f$ (0,75)

ex2 (6pts)

(2) $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$ نعتبر التطبيق

$x \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E / f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ $\Leftrightarrow$ خطي f

ليكن $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ و $\{e_1, \dots, e_n\}$ أساسا لـ E و $x,y \in E$

$x \in E \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \mid x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$y \in E \Rightarrow \exists\, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K} \mid y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$

$$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) + \beta(\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n))$$
$$= f((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) e_1 + \dots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) e_n)$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

f متباينة $\Leftrightarrow$ لدينا $\ker f \overset{?}{=} \{0_E\}$

$$\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in E \mid \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0\} = \{0_E\}$$

بما أن $\dim E = \dim \mathbb{K}^n = n$ لأن f تقابلية ومنه $\mathbb{K}^n \cong E$

ex03 7 pts

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-z \\ 0 \end{pmatrix}$$

f خطي

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} y = -2x \\ z = x \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$\ker f$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاع $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ وهو غير معدوم إذن يشكل أساسا لـ $\ker f$ $\boxed{\dim \ker f = 1}$

$$\operatorname{Im} f = \left\{ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-z \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ x \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

نلاحظ أن $u = 2v - w$

$$\operatorname{Im} f = \left\{ x(2v - w) + yv + zw \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ (2x+y)v + (-x+z)w \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

إذن $\operatorname{Im} f$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بـ $\{v, w\}$ والجملة $\{v, w\}$ مستقلة خطيا لأن

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \alpha v + \beta w = 0 \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
$\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
$-\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

إذن تشكل أساسا ومنه

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} f = 2}$$