ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE D'ORAN
المدرسة العليا للأساتذة بوهران

Ecole Normale Superieure d'Oran

Année Universitaire : 2015/2016 1 ére Année PEM Math

Nom de l'enseignant : Mostefaoui
Résultat Final du Module : Analyse

N°	NOM	PRENOM	DAT_NAI	ETAT	Emd1	Emd2	Moy CC	Synth	Moy Sy	Sup Sy	rat	Moy R	Moy
1	ALI ABBASS	AICHA	07/12/1996	N	10,25								
2	ALLELE	ASMA	22/10/1996	N	03,5								
3	AOUADA	KHAWLA	08/10/1996	N	04,5								
4	AZIB	SARA	07/09/1997	N	07,5								
5	AZZOUNI	AKILA	26/11/1996	N	14								
6	BAHRI	ABDELHAFIDH	16/03/1996	N	12								
7	BEKHTI	RADIA	10/02/1997	N	06,25								
8	BEKKOUCHE BENZIA	FATIMA	13/01/1996	N	11								
9	BELBEY	WISSAM	18/04/1997	N	06								
10	BELDJOUHER	NACER	30/10/1996	N	15								
11	BELHADJ	MEHDI	27/03/1996	N	09,25								
12	BELKHENCHIR	CHAHRAZED	11/11/1996	N	03,5								
13	BENAIAD	ABDELHAK	13/07/1995	N	06,25								
14	BENLAZREG	LATIFA	28/06/1997	N	08,75								
15	BESSAILET	FTAIHA	30/01/1996	N	14								
16	BOUFADENE	FATIMA ZOHRA	14/05/1996	N	08,75								
17	BOUNOUAR	SOUMIA	20/03/1997	N	07								
18	BOUOUDA	FATIMA	05/06/1996	N	06								
19	BOUTAIBA	OUAFAA	08/06/1996	N	10,5								
20	CHARIF	IMENE	05/09/1997	N	05								
21	DERKAOUI	ZOHRA	31/03/1997	N	14,5								
22	DJELLOUL CHAOUCH	SAMIA	12/12/1996	N	08,75								

le 14/02/2016

23	DJENINAT	SAKINA	21/06/1996	N	X								
24	FADEL	SOUAAD	01/01/1996	N	16								
25	FERHAYA	BILAL	16/03/1996	N	11								
26	FORLOU	YASMINE NOR EL H(	29/03/1997	N	09								
27	GHARBI	KHALDIA	24/07/1996	N	03								
28	GRINI	ALI	17/04/1998	N	00,5								
29	GUEBLI	RABAB	19/03/1997	N	06								
30	HAMADOUCHE	MOHAMMED	11/11/1995	N	12,25								
31	HAMEURLAINE	FATIMA ZOHRA	20/08/1996	N	03								
32	HAMMAD	RAOUNAK	06/02/1996	N	10,5								
33	HARIZI	ASMAA	04/12/1996	N	11								
34	HASSI	BAKHTA IMENE	07/09/1996	N	X								
35	KAHLOUL	IKRAM	03/07/1997	N	04,75								
36	KEFKEF	FATIMA	06/05/1996	N	12,5								
37	KHELOUL	AWDA	23/04/1997	N	10								
38	KRALIFA	FETHIA	10/04/1996	N	04,5								
39	LACHMI	YOUCEF	21/02/1997	N	11								
40	LAHLAH	ILHAM	05/12/1997	N	10,25								
41	LARIBI	ZINEB	29/07/1996	N	01,25								
42	LAROUCI	FATMA	08/09/1997	N	05,75								
43	LASSAL	IMANE	06/03/1995	N	07								
44	LASSAL	AZIZA	04/12/1996	N	06								
45	MAZOUZ	SIHAM	08/01/1997	N	11								
46	MAZOUZI	HAKIMA	03/04/1996	N	08,5								
47	MERROUCHI	KHADIJA	26/07/1997	N	10								
48	MOKHTAR	ABLA	19/09/1997	N	08,5								
49	NEGADI	DJOHAR	12/02/1996	N	15								
50	NOURA	IMANE	15/06/1997	N	08,25								
51	OUADAH	SAFIA	13/10/1996	N	04,5								
52	REBAI	DJAMEL EDDINE	12/06/1995	N	10,5								
53	SALAH	FATIMA ZOHRA	20/02/1998	N	10,5								
54	SEKKIL	MOHAMMED	17/08/1996	N	07,5								
55	SI LARBI	FOUZIA	05/10/1996	N	14								

le 14/02/2016

المدرسة العليا للأساتذة بوهران

56	SLAMANI	AICHA	29/08/1997	N	01,5								
57	TAOUI	ZAHIRA	18/01/1996	N	11,5								
58	THABET	AMIRA	18/11/1997	N	05,25								
59	YESREF	YOUSSRA	01/06/1997	N	03,75								
60	ZITOUNI	ZOHRA	10/03/1997	N	15,50								

Le 14/02/2016

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة بوهران

المدرسة العليا للأساتذة بوهران 2016 - 02 - 01

سنة أولى علوم دقيقة المدة 1 سا 30 د

الامتحان الأول في مادة التحليل

التمرين الأول: (6 نقاط)

1) بين أن كل متتالية متقاربة محدودة. هل العكس صحيح؟

2) اذا قبلت دالة نهاية من اليمين وأخرى من اليسار، فهل تقبل هذه الدالة نهاية؟

3) هل الدالة المعرفة بـ $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ تقبل نهاية عند 0.

4) أذكر نظرية القيم المتوسطة وما تفسيرها الهندسي؟

التمرين الثاني: (5 نقاط)

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 1}{3 - U_n} \end{cases}$$

1) بين أنه $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n < 1$

2) أدرس رتابة $(U_n)_n$

3) ماذا تستنتج؟

4) أوجد النهاية ℓ لـ $(U_n)_n$ إن وجدت

التمرين الثالث: (4 نقاط)

باستعمال نظرية التزايدات المنتهية أثبت أن:

$$|\sin x - \sin y| < |x-y| \quad , \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

التمرين الرابع: (5 نقاط)

لنعتبر الدالة

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^{1/x} & x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ a & x = 0 \end{cases}$$

أدرس حسب قيم a استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة f.

تصحيح الامتحان الأول في التحليل

التمرين 1: (6pts)

① كل متتالية متقاربة محدودة فعلا لنكن $(U_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ أي

$\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l|<\varepsilon$

ليكن ε لدينا

(1) $|U_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < U_n - l < \varepsilon$

$\Leftrightarrow l-\varepsilon < U_n < l+\varepsilon \Rightarrow \underset{A}{l-\varepsilon} < U_n < \underset{B}{l+\varepsilon} \Rightarrow (U_n)_n$ محدودة

② العكس غير صحيح تعتبر المتتالية $(U_n)_n$ لأن الحد العام $(-1)^n$ $(U_n)_n$ محدودة لكنها ليست (1)

لا لأن ③ هل إذا قبلت دالة حد من اليمين واخرى من اليسار ان f تقبل نهاية

(1) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$

لا تقبل نهاية عند 0 لأن لدينا.

④ الدالة $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ لا تقبل نهاية عند (0.25) $\lim \sin\frac{1}{x} \nexists \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \in \mathbb{R}^+ / x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{x_n} \nexists$

نضع متتالية $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$ (0.25) ومنه (0.25) $\sin\frac{1}{x_n} = \sin(\frac{\pi}{2}+n\pi) = (-1)^n$

ومنه $\lim f(x) \nexists$ (0.25) لأن (1) مبرهنة القيم المتوسطة.
(1) التفسير

التمرين 2: (6pts)

1) بالتراجع $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 1$ $\quad U_0 = 0 < 1$

(2) نفرض أن $U_n < 1$ ونبين أن $U_{n+1} = \dfrac{U_n+1}{3-U_n} < 1$?

لدينا

$U_{n+1} - 1 = \dfrac{U_n+1}{3-U_n} - 1 = \dfrac{U_n+1-3+U_n}{3-U_n} = \dfrac{-2+2U_n}{3-U_n} = \dfrac{2(-1+U_n)}{3-U_n} < 0$

لأن $U_n < 1 \Rightarrow -U_n > 1$ $\quad U_n < 1 \Rightarrow U_n - 1 < 0$

$\Rightarrow 3 - U_n > 2 > 0$

② دراسة الرتابة (1.5)

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n+1}{3-U_n} - U_n = \dfrac{(U_n-1)^2}{3-U_n} > 0$

لأن $U_n < 1 \Rightarrow 3-U_n > 2 > 0$ أن $U_{n+1} - U_n > 0 \quad \forall n$

ومنه $(U_n)_n$ متزايدة تماما

(0.5) $(U_n)_n$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى ب 1 اذن فهي متقاربة نحو نهاية l

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n+1}{3-U_n} \Leftrightarrow l = \dfrac{l+1}{3-l}$

التمرين 3 (4 pts)

$\forall x,y \in \mathbb{R}, |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

نظرية التزايدات المنتهية

إذا كان $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ و $a<b$ فإن

يوجد على الأقل $c \in]a,b[$ بحيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ (1)

نعتبر الدالة $f : x \mapsto \sin x$ f مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ أو بالخصوص

على $[y,x]$ حسب النظرية لدينا $\exists c \in]y,x[\;/\; f(x)-f(y)=(x-y)f'(c)$ (1)

ومنه $\sin x - \sin y = (x-y)\cos c$ أي

$|\sin x - \sin y| = |(x-y)\cos c|$ (1)

$= |x-y||\cos c|$ (1)

لأن $|\cos c| \leq 1$ $\leq |x-y|$

التمرين 4 (1 pt)

f دالة مستمرة وقابلة ~~للاشتقاق على~~ على $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ كحداء وتركيب دوال مستمرة (0.25)

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e$ (1)

لأن $\frac{1}{x}\ln(1+x) \to 1$ $x \to 0$

إذا كان $a=e$ فإن f مستمرة على $\mathbb{R}$ f قابلة للاشتقاق لأنها جداء وتركيب دوال المستمرة (0.25) (0.25)

دراسة قابلية الاشتقاق على 0

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} - e}{x}$

(0.25)

$\overset{\text{hop}}{=} e\lim\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x(x+1)}\right] =$

$= e\lim_{x\to 0} \frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2(x+1)}$

(0.25) $\overset{\text{hop}}{=} e\lim_{x\to 0} \frac{1-\ln(1+x)-1}{3x^2+2x}$

(0.25) $\overset{\text{hop}}{=} e\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x+1}}{6x+2}$

$= -\frac{e}{2}$

إذن من أجل $a=e$ f قابلة للاشتقاق و $f'(0) = -\frac{e}{2}$ (1)

إذا كان $a \neq e$ f ليست مستمرة وبالتالي غير قابلة للاشتقاق (1)