الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Oran's Higher Teachers College AMMOUR Ahmed
المدرسة العليا للأساتذة بوهران عمور احمد

قسـم العلـوم الدقيـقة

تخصص :ريـاضيات

دروس مفصلة و تمارين مقترحة سنة ثانية رياضيات

تخصص أستاذ تعليم متوسط و تعليم ثانوي

مقياس الطبولوجيا

من إعداد الأستاذ :

- الدكتور مجاهدي براهيم

السنــة الجامعيــة : 2022 / 2023

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم :"من سلك طريقا يلتمس فيه علما سهل الله له طريقا إلى الجنة"

الحمد لله رب العالمين ، حمدا يوافي نعمه و يكافئ مزيده والشكر لله على ما وهبنا من صبر و هدي و توفيق تخطينا به الصعاب لانجاز هذا العمل ، والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين أما بعد

فيسرني أن أقدم هذا العمل المتواضع و أضعه بين أيدي طلبتنا الأعزاء سنة ثانية رياضيات لأجل أن يتزودوا منه سائلا الله أن ينتفعوا به ويكون لهم مرجعا ملما نافعا .

شكرا لكم جميعا

✵ ترميزات ✵

1. $\|.\|$ نظيم .
2. E مجموعة غير خالية .
3. $L(E,F)$ مجموعة التطبيقات الخطية .
4. $\mathscr{L}(E,F)$ مجموعة التطبيقات الخطية المستمرة .
5. E/F فضاء حاصل القسمة .
6. $\emptyset$ مجموعة خالية .
7. $\mathbb{K}$ الحقل .
8. $\sum$ مجموع .
9. $A^{\perp}$ عمود A .
10. d مسافة .
11. τ طوبولوجية .
12. $\overline{A}$ لاصقة A .
13. $\prod_{i=1}^{m} E_i$ الجداء الديكارتي .
14. $dimE$ بعد الفضاء الشعاعي E .
15. $\oplus$ مجموع مباشر .
16. $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ مجموعة الأشكال الخطية .
17. E^{*} الفضاء الثنوي لـ E .

الفهرس

الفهرس

مقدمة

من أهم ما يميز الرياضيات الحديثة كونها تعتنى بصورة أساسية بدراسة البنى الرياضياتية التي تحتل مكان الصدارة فيها، البنى الجبرية و البنى الطبولوجية، فالبنى الطبولوجية يهتم بدراستها علم الطبولوجيا، الذي يضيف إلى البحث في خواص هذه البنى دراسة التطبيقات لبنى طبولوجية في نفسها، أو بنية طبولوجية أخرى، وتمتد جذور علم الطبولوجية إلى الحضارة اليونانية، إذ عمد علماء الرياضيات الإغريقيين إلى استجلاء مفاهيم النهاية و الإستمرار للوقوف على معنى أكثر دقة و تحديدا للعدد، وكانت سنة **1860** م بمثابة البداية الفعلية لهذا العلم، وذلك عندما قام فيرتشراس ***Weirstrass*** بتحليل مفهوم نهاية التطبيقات العددية، وفي سياق هذا التحليل وجد نفسه مرغماً على إعادة بناء فضاء الأعداد الحقيقية الإعتيادي، و ابراز خواص معينة لهذا الفضاء نسميها اليوم بالخواص الطبولوجية، و ذلك يعني استحداث لغة جديدة تتسم بالعمومية و الدقة مؤهلة للتعبير عن هذه الخواص، حيث كان للعالم كانتور الفضل في إيجاد هذه اللغة، وكان ذلك سنة **1870** م، ويطلق على هذه اللغة باسم المجموعات، حيث أصبحت هذه اللغة المعاصرة ليس لعلم الطبولوجية فحسب بل لكل العلوم الرياضياتية الأخرى.

و خلال دراسة كانتور لخواص المجموعات الجزئية، وجد أنه من الضروري إيراد مفهوم المسافة بين نقط كل هذه الفضاءات، وقد التزم بهذه الفكرة العديد من العلماء أمثال: أسكولي ***Ascoli***، فولتيرا ***Volterra***، و آرزيلا ***Arzela***، وقد توج هذه الجهود العالم فرشيه بإيجاد الفضاء المتري و ذلك باستعمال مفهوم المسافة.

لم يتوقف التعميم عند حدود الفضاء المتري، فبعد أعمال فرضيه لاحظ العالم هاوسدورف ***Hausdorff*** أن تابع المسافة غير لازم لكثير من الأغراض، و أن هذه الأغراض يمكن إدراكها بمفهوم آخر و هو الجوار، حيث قام هاوسدورف بتعريف طبولوجيا باستعمال الجوار و المجموعات المفتوحة، بذلك قام بصياغة المسلمات الثلاث التي تسمى بمسلمات هاوسدورف.

بالرغم من كل هذا لم يعترف بالطبولوجيا كفرع مستقل و قائم بذاته بين العلوم الرياضياتية الأخرى إلا في العقود الأخيرة، مع العلم أن تطورها تزايد بصورة غير عادية بدءا من سنة **1930** م، حيث تمتد جذورها

إلى التحليل و الهندسة، كالهندسة التفاضلية و الهندسة الترسيمية، بل إنها تكمن في أسس الهندسات جميعا، و فضلا لما للطبولوجيا من تطبيقات بدرجة كبيرة من الشمول و الأهمية في العديد من العلوم النظرية و التطبيقية، فإنها تسير بخطى ثابتة نحو توحيد الغالبية العظمى لفروع العلوم الأخرى.

و في مطبوعتي هذه دراسة لهذا العلم و بعض خصائصه، حيث تتألف هذه المطبوعة من ستة فصول:

الفصل الأول:

تطرقت في هذا الفصل إلى بعض التعاريف الأساسية حول الفضاءات المترية كَكُل و الفضاءات المترية الجزئية، كما عرفة الكرات المفتوحة و المغلقة و خواص المفتوحات و المغلقات و الجوارات، بإضافة تعريف المجموعات المحدودة و دراسة البعد بين مجموعتين و داخل و خارج مجموعة و تعريف الملاصقة، كما قدمت بعض الخصائص على الفضاءات المترية " المتتاليات ، النهايات و الاستمرار"، تتميما ذلك بالفضاءات المترية التامة.

الفصل الثاني:

تضمن هذا الفصل الطبولوجيا و الفضاء الطبولوجي و كيفية توليد طبولوجيا "طبولوجيا المولدة" مرورا بالجملة الأساسية للجوارات، اختتاما بأصناف الطبولوجيا " الطبولوجيا الإبتدائية، طبولوجيا الجداء، طبولوجيا حاصل القسمة و الطبولوجيا النهائية " مع تعريف الفضاءات الطبولوجية المنفصلة.

الفصل الثالث:

قدمت في هذا الفصل الفضاءات المتراصة و علاقتها بالفضاءات المترية و عرّفت أنواع التراص بمافيه النسبي و المحلي كما وضحت تعريف و طريقة الترصيص.

الفصل الرابع:

يتضمن هذا الفصل مفهوم الترابط و علاقته بالاستمرار و تعريف المركبات المترابطة إضافة إلى الفضاءات المترابطة محليا و الترابط بالأقواس.

الفصل الخامس:

سلكت في تقديم هذه الفضاءات نفس النهج و النسق الذي انتهجته من قبل في الفضاءات المترية ، ذلك لأن الفضاءات النظيمية هي فضاءات مترية خاصة .

الفصل السادس:

تناولت هنا الفضاءات الهيلبرتية التي تعد ضربا هاما آخر من ضروب الفضاءات النظيمية.

و قد اختتمت كل فصل ببعض التمارين المقترحة علّها تفيد طلبة السنة الثانية رياضيات.

" و الله ولي التوفيق "

الفصل الأول

الفضاءات المترية

تمهيد

إرتأيت في منهاجي هذا للبداية بتقديم دروس في الفضاءات المترية و ذلك لما تميز به من إمكانية تقريب و تصوير مفهوم الطبولوجيا لدا الطالب بعيدا عن التجريد حيث يمكنه أن يلتمس ذلك في المجموعات $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ و$\mathbb{R}^3$ و مفهوم الكرات و الغلق و المفتوح ...إلخ .

1.1 تعاريف أساسية

1.1.1 المسافة

تعريف 1.1.1

لتكن E مجموعة كيفية، التطبيق d المعرف من $E\times E$ نحو $\mathbb{R}^+$ يسمى مسافة أو متريك أو بعد على E إذا وفقط إذا حقق :

أ. المطابقة :

$$\forall x,y\in E \qquad d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$$

ب. التناظر:

$$\forall x,y\in E \qquad d(x,y)=d(y,x)$$

ج. المتراجحة المثلثية:

$$\forall x,y,z\in E \qquad d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

نسمي فضاء متري كل زوج (E,d) حيث E مجموعة كيفية و d مسافة.

أمثلة 1.1.1

1. $(\mathbb{R},d_u)$ حيث:

$$d_u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$$

القيمة المطلقة $(x,y)\mapsto d(x,y)=|x-y|$

d_u بعد على $\mathbb{R}$ و يسمى البعد الطبيعي.

2. $(\mathbb{C},d_u)$ حيث: $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة نضع

$$x=x_1+ix_2 \quad ; \quad y=y_1+iy_2,$$

$$d_u:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}^+$$

الطويلة $(x,y)\mapsto d(x,y)=|x-y|$

3. المسافة الإنقطاعية:

$$d:E\times E\to\mathbb{R}^+$$

$$(x,y)\mapsto d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

1.1.2 المسافات الأساسية

1.1.2.1 المسافات الأساسية على $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

من أجل:

$$x,y\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}} \quad ; \qquad x=(x_1,x_2,...,x_n), y=(y_1,y_2,...,y_n)$$

أ.

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{\mathbf{n}}|x_i-y_i|$$

ب.

$$d_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\mathbf{n}}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ج.

$$d_3(x,y)=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i-y_i|)$$

1.1.2.2 المسافات الأساسية على $\zeta([a,b],\mathbb{R})$

حيث $\zeta([a,b]),\mathbb{R})$: هو الفضاء الشعاعي المؤلف من الدوال المستمرة من $[a,b]$ نحو $\mathbb{R}$.

أ.

$$d_1(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|dt$$

ب.

$$d_2(f,g)=\left(\int_a^b(f(t)-g(t))^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ج.

$$d_3(f,g)=\sup_{t\in[a,b]}(|f(t)-g(t)|)$$

نسمي المسافة d_2 بالمسافة الإقليدية، و المسافة d_3 بمسافة التقارب المنتظم كما يرمز لها ب d_∞.

البرهان

1. اثبات أن d_1 مسافة على $\mathbb{R}$:

أ. اثبات خاصية التطابق أي: $x=y \Longleftrightarrow d_1(x,y)=0$ لدينا من أجل كل $x,y\in\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d_1(x,y)=0 &\iff \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=0\\ &\iff |x_i-y_i|=0,\ \forall i\in\{1,2,\dots,n\}\\ &\iff x=y \end{aligned}$$

ب.اثبات خاصية التناظر: من خواص القيمة المطلقة نجد $d_1(x,y)=d_1(y,x)$

ج.اثبات خاصية المتراجحة المثلثية أي نبين أنه: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$

لدينا: $$\sum_{i=1}^{n}(|x_i-y_i|)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i+z_i-y_i|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|+\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|$$

ومنه: $$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

2.اثبات أن d_2 مسافة على $\mathbb{R}^+$: حيث $d_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

أ.اثبات خاصية التطابق أي: $d_2(x,y)=0 \iff x=y$

لدينا من أجل كل $x,y\in\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d_2(x,y)=0 &\iff \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=0\\ &\iff \forall i\in\{1,2,\dots,n\}, x_i-y_i=0\\ &\iff x=y \end{aligned}$$

ب.اثبات خاصية التناظر: خواص المربع $d_2(x,y)=d_2(y,x)$

ج.اثبات المتراجحة المثلثية أي نبين أنه:

$$\forall x,y,z\in E \qquad , \qquad d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

و الذي يؤول إلى اثبات أن:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad ....(\star)$$

نضع: $b_i=z_i-y_i$ $\quad a_i=x_i-z_i$ إذا: $a_i+b_i=x_i-y_i$

نجد $(\star)$ تكافئ:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\times\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

بعد التبسيط نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

تسمى المتراجحة الاخيرة بمتراجحة كوشي شوارتز.

- برهان متراجحة كوشي شوارتز.

لدينا من أجل $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + \lambda b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \lambda^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

نحصل على كثير حدود من الدرجة الثانية ذو المتغير λ و المميز السالب:

$$\Delta' = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} b_i^2 < 0$$

و منه:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \times b_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 الكرات المفتوحة، المغلوقة، المفتوحات، المغلوقات و الجوارات

1.2.1 الكرات المفتوحة و المغلوقة

تعريف 1.2.1

نسمي كرة مفتوحة من E ذات المركز a و نصف القطر $r > 0$ المجموعة الجزئية المرموز لها ب $B_o(a,r)$

$$B_o(a,r) = \{x \in E \quad / \quad d(a,x) < r\}$$

⋆ الكرة المغلقة ذات المركز a و نصف القطر $r > 0$:

$$B_F(a,r) = \{x \in E \quad / \quad d(a,x) \leqslant r\}$$

⋆ الغلاف الكروي أو سطح كرة ذات المركز a و نصف القطر $r > 0$:

$$S(a,r) = \{x \in E \quad / \quad d(a,x) = r\}$$

ملاحظة :

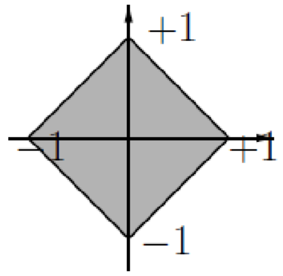
$$B_F(a,r) = B_o(a,r) \cup S(a,r)$$

أمثلة 1.2.1

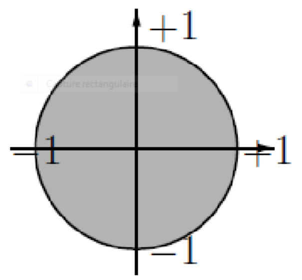
1- في $\mathbb{R}$ تتساوى المسافات الثلاثة $d_1 = d_2 = d_3$ و نجد

$S(a,r) = \{a-r, a+r\}$، $B_o(a,r) =]a-r; a+r[$، $B_F(a,r) = [a-r, a+r]$

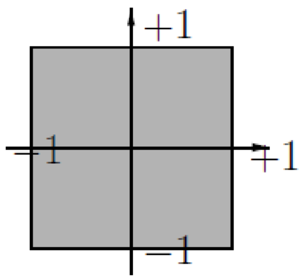
2- التمثيل الهندسي لكرة الوحدة $B_F(0,1)$ في $\mathbb{R}^2$:



$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|, B_F(0,1) : |x_1| + |x_2| \leq 1$$



$$d_2(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}, B_F(0,1) : x_1^2 + x_2^2 = 1$$



$$d_3(x,y) = \sup_{1\leq i\leq 2} (|x_i - y_i|), B_F(0;1) : \sup_{1\leq i\leq 2} (|x_1|, |y_2|)$$

تعريف 2.2.1

(تعريف المفتوحات)

(E,d) فضاء متري، المجموعة U من E تسمى مفتوح من E إذا و فقط إذا كان:

$$U \text{ مفتوح من } E \iff \forall\ x \in U\ ,\ \exists\ r_x > 0\ \ /\ \ B_o(x,r_x) \subseteq U$$

مثال 1.2.1

المجال $]-1,1]$ ليس مفتوح في $\mathbb{R}$ لأنه لا يوجد $r_x > 0$ عند 1 حيث: $B_o(1,r_x) \subset]-1,1]$.

تعريف 3.2.1

(تعريف المغلقات)

نقول عن الجزء F من E أنه مغلق إذا وفقط إذا كان متممه مفتوح.

$$F \text{ مغلق } \iff F^C \text{ مفتوح}$$

مبرهنة 1.2.1

(E,d) فضاء متري، كل كرة مفتوحة من (E,d) فهو مفتوح.

البرهان

لدينا كرة مفتوحة $B_o(a,r) = \{x \in E / d(a,x) < r\}$

نبين أنه:

$$\forall x \in B_o(a,r), \exists r_x > 0 / x \in B_o(x,r_x) \subset B(a,r)$$

لدينا: $r_x = r - d(a,x) > 0 \iff d(a,x) < r$

إذن: r_x موجودة

اثبات أن: $B_o(x,r_x) \subset B(a,r)$

ليكن: $t \in B_o(x,r_x) \iff d(r,t) < r_x$

و لدينا: $d(a,t) \leqslant d(a,x) + d(x,t) \leqslant r - r_x + r_x$

إذن : أي $d(a,t) \leqslant r$: $t \in B_o(a,r)$

ومنه: $B_o(x,r_x) \subset B_o(a,r)$

خصائص : 1. ϕ و E مفتوحات.

2. $(U_i)_{i\in I}$ جملة مفتوحات من E، لدينا: $\bigcup_{i\in I} U_i$ مفتوح (الإتحاد الكيفي لمفتوحات هو مفتوح).

3. $(U_i)_{i=1}^{n}$ عدد منتهي من المفتوحات E، لدينا: $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ مفتوح.

البرهان

أ. اثبات أن $\bigcup_{i\in I} U_i$ مفتوح أي:

$$\forall x \in \bigcup_{i\in I} U_i, \exists r_x > 0\, x \in B_o(x,r_x) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
x \in \bigcup_{i\in I} U_i &\iff \exists i_0 \in I / x \in U_{i0}\\
&\iff \exists r_{x_{i0}} > 0, x \in B_o(x, r_{x_{i0}}) \subset U_{i0}\\
&\iff x \in B_o(x, r_{x_{i0}}) \subset U_{i0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i\\
&\iff \bigcup_{i\in I} U_i \quad \text{مفتوح}
\end{aligned}$$

ب. اثبات أن $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ مفتوح

أي نبين أنه: $\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i, \exists r_x > 0 / x \in B_o(x,r_x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$

لدينا : $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \iff \forall i \in \{1,2,...,n\} x \in U_i$ إذا:

$$\begin{aligned}
i = 1 \longrightarrow x \in U_1 &\iff \exists r_1 > 0, x \in B_o(x,r_1) \subset U_1\\
i = 2 \longrightarrow x \in U_2 &\iff \exists r_2 > 0, x \in B_o(x,r_2) \subset U_2\\
&\vdots\\
i = n \longrightarrow x \in U_n &\iff \exists r_1 > 0, x \in B_o(x,r_n) \subset U_n
\end{aligned}$$

و منه: $\exists r_x = Inf(r_1, r_2, ..., r_n) > 0$

حيث: $x \in B_o\,(x, Inf(r_1, r_2, ..., r_n)) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$

ملاحظة : التقاطع الكيفي لمفتوحات ليس دائما مفتوح.

مثال 2.2.1

لدينا في هذا المثال التقاطع الغير منتهي لمجالات مفتوحة ليس مفتوح كما هو مبين:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, 1[= [0, 1[$$

قضية 1.2.1

بإستعمال المتممات نحصل على :

1. ϕ و E مغلقان.
2. التقاطع الكيفي لمغلقات هو مغلق.
3. الإتحاد المنتهي لمغلقات هو مغلق.

1.2.2 الجوار

تعريف 4.2.1

$(E.d)$ فضاء متري، V مجموعة جزئية من E، نقول أن V جوار ل x إذا وفقط إذا وجد مفتوح U حيث $x \in U \subset V$ و نرمز لمجموعات جوارات x ب $V(x)$

$$V \in V(x) \iff \exists U \text{ مفتوح } / x \in U \subset V$$

ملاحظة :

1. V جوار ل x إذا وفقط إذا وجدت كرة مفتوحة $B_o(x,r)$ محتواة في V و نكتب:

$$V \text{ جوار ل } x \iff \exists B_o(x,r) \quad / \quad B_o(x,r) \subset V$$

2. إذا كان V مفتوح فهو جوار لكل نقطه أي: $\exists B_o(x,r) = U_o \subset V$ /مفتوح $\forall x \in U$

قضية 1.2.2

1. كل جزء A من E يحوي V جوار ل x فهو جوار ل x

$$\forall A, A \subset E, x \in V \subset A \Longrightarrow A \subset V(x)$$

2. الإتحاد الكيفي لجوارات x هو جوار ل x.
3. التقاطع المنتهي لجوارات x هو جوار ل x.

1.3 الفضاءات المترية الجزئية

تعريف 1.3.1

(E,d) فضاء متري و F جزء غير خالي من E، نقول أن (F,d) فضاء متري جزئي إذا كان إقتصار البعد له على F فهو بعد على F.

تعريف 2.3.1

(E,d) فضاء متري و (F,d) فضاء متري جزئي من (E,d)، نقول أن الكرة $B_o^F(a,x)$ كرة مفتوحة من (E,d) إذا وفقط إذا وجدت كرة $B_o^E(a',x')$ من E بحيث :

$$B_o^F(a,x) = B_o^E(a',x') \cap F$$

لا نستطيع القول بأن $B^F(a,x)$ مفتوح في (E,d) لأن F كيفي ليس مفتوح.

مبرهنة 1.3.1

(F,d) فضاء متري جزئي من (E,d)، B جزء مفتوح من (F,d) (على التوالي مغلق من (F,d))إذا وفقط إذا وجد مفتوح A من E على التوالي مغلق حيث $B = A \cap F$.

ملاحظة : إذا كان V مفتوح من (E,d)، لدينا:

$$V = \bigcup_{x\in U} B_o(x,r_x)$$

البرهان

نبين أن:

$$\exists A^o \subset E / B = A \cap B \ ,\ B^o \subset (F,d)$$

1. نبين أن: $\forall B^o \subset F \Longrightarrow \exists A^o \subset E / B = A \cap F$

لدينا:

$$B^o \subset F \Longleftrightarrow \forall a \in B^o, \exists r_a > 0, B^o(a,r_a) \subset F$$

إذا: $B^o(a,r_a) \cap F \subset B$

$$A = \cup B(a,r_a)$$

نجد: $B = A \cap B$

2. نبين الإحتواء الثاني:

$$A\cap F=\bigcup_{a\in B}(B_o(a,r_a))\cap F=\bigcup_{a\in B}(B_o(a,r_a\cap F)$$

ولدينا : $\cup B(a,r_a)$ مفتوح أي $V=\bigcup_{a\in B}B_o(a,r_a)$ مفتوح من E.

1.4 المجموعات المحدودة-البعد بين مجموعتين

تعريف 1.4.1

(المجموعات المحدودة)

(E,d) فضاء متري، A جزء من E، نقول أن A محدودة إذا وفقط إذا وجدت كرة مفتوحة أو مغلقة $B(x,r)$ من E حيث : $A\subset B(x,r)$

تعريف 2.4.1

(القطر)

A جزء من (E,d) نسمي قطر A و نرمز له ب $d(A)$ العدد أكبر مسافة $d(A)=\sup\limits_{x,y\in A}d(x,y)$

مبرهنة 1.4.1

1. A جزء محدود $\Longleftrightarrow$ $d(A)$ منته.
2. $A\subseteq B\Longrightarrow d(A)\leqslant d(B)$.

البرهان

إثبات أن:

A محدود $\Longleftarrow$ $d(A)<+\infty$ منته .

لدينا:

A محدود $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in A,\exists r>0,A\subset B(x,r)$

أي:

$$\forall t,t'\in A,d(x,t)<r\wedge d(x,t')<r\Longrightarrow\begin{cases}d(t,t')\leqslant d(x,t)+d(x,t')<2r\\ \sup\limits_{t,t'\in A}d(t,t')<2r<+\infty\end{cases}$$

إذن: $d(A)$ محدود.

العكس $d(A)<+\infty$ A منته $\Longleftarrow$ A محدود $(\exists B(x,r)/A\subset B)$.

لدينا:

$$d(A)<+\infty\Longrightarrow\forall t,t'\in A,\sup d(t,t')<\infty$$

إذا:

$$\exists r>0/\sup_{t,t'\in A} d(t,t')=r<\infty$$

أي:

$$\forall x\in A, d(x,t)\leqslant r \Longrightarrow \exists B(x,r)/A\subset B(x,r)$$

تعريف 3.4.1

(المسافة بين مجموعتين)

A و B جزءان من (E,d) فضاء متري.

العدد $d(A,B)$ المعرف ب $d(A,B)=\inf\limits_{x,y\in A\times B} d(x,y)$ يسمى المسافة الفاصلة بين A و B

ملاحظة : 1- إذا كان $A=\{x\}$ فإن $d(x,B)=\inf\limits_{y\in B} d(x,y)$, 2- $a\in B\Longrightarrow$ $d(a,B)=0$ و العكس غير صحيح.

1.5 داخل و خارج مجموعة-ملاصقة

تعريف 1.5.1

(داخل مجموعة)

A جزء من (E,d) فضاء متري، نقول أن النقطة x من A نقطة داخل A إذا وفقط إذا وجدت كرة مفتوحة مركزها x و نصف قطرها r حيث : $B_o(x,r)\subset A$

نرمز لمجموعة النقط الداخلية ل A ب $IntA=\mathring{A}$.

$$\begin{aligned} x\in\mathring{A} &\Longleftrightarrow \exists B_o(x,r)/B_o(x,r)\subset A\\ &\Longleftrightarrow \exists V_x\in V(x)/V_x\subset A\\ &\Longleftrightarrow A\subset V(x)\end{aligned}$$

ملاحظة :

⋆ نلاحظ أن $\mathring{A}\subset A$.

⋆إذا كان A مفتوح فإن $A\subset\mathring{A}$ و منه $A=\mathring{A}$.

مبرهنة 1.5.1

1. $A \subseteq B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2. $A = \mathring{A} \Longleftrightarrow$ مفتوح A، $(\mathring{A})^{\circ} = \mathring{A}$.
3. $\mathring{A}$ هو أكبر المفتوحات المحتواة في A.

البرهان

1.إثبات أن : $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

لدينا:

$x \in \mathring{A} \Longrightarrow \exists V_x$ مفتوح$/V_x \subset A \subset B$

أي:

$x \in \mathring{A} \Longrightarrow$ مفتوح $\exists V_x / V_x \subset B$

أي: $x \in \mathring{B}$

ومنه: $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

2.اثبات أن: $A = \mathring{A} \Longleftrightarrow A$ مفتوح.

أ.اثبات أن: $A = \mathring{A} \Longrightarrow A$ مفتوح

لدينا من التعريف $\mathring{A} \subset A$، ونبين أن: $A \subset \mathring{A}$ أي $\forall t \in A / t \in \mathring{A}$

لدينا:

$t \in \mathring{A} \quad t \in V(t) \subset A \quad / \quad \exists V_t \in V(t) \Longrightarrow$ مفتوح $\forall t \in A$

أي: $A \subset \mathring{A}$ ومنه: $A = \mathring{A}$

ب.إثبات أن: $A = \mathring{A} \Longleftarrow A$ مفتوح، بديهي

3.إثبات أن: $\mathring{A}$ هو أكبر المفتوحات المحتواة في A.

نفرض بالتناقض أنه مفتوح يوجد U حيث $\mathring{A} \subset U \subset A$

بما أن U مفتوح فهو جوار لجميع نقاطه.

أي $\forall x \in U \ , \ \exists V_x \subset V(x) \ / \ V_x \subset U \subset A$ حيث V_x مفتوح.

ومنه: $x \in \mathring{A}$ أي: $U \subset \mathring{A}$ تناقض، ومنه: $U = \mathring{A}$

مبرهنة 1.5.2

$(A_i)_{i\in I}$ جملة مجموعات من فضاء متري (E,d)

1. $\bigcup_{i\in I} \mathring{A}_i \subseteq \widehat{\bigcup_{i\in I} A_i}^{\,o}$

2. $\bigcap_{i\in I}\mathring{A}_i \subseteq \widehat{\bigcap_{i\in I}A_i}^{o}$

البرهان

1. اثبات أن: $\widehat{\bigcup_{i\in I}A_i}^{o} \subseteq \bigcup_{i\in I}\mathring{A}_i$

لدينا:

$$\begin{aligned}\forall i\in I, \mathring{A}_i \subseteq A_i &\implies \bigcup_{i\in I}\mathring{A}_i \subseteq \bigcup_{i\in I}A_i\\ &\implies \widehat{\bigcup_{i\in I}\mathring{A}_i}^{o} \subseteq \widehat{\bigcup_{i\in I}A_i}^{o}\\ &\implies \bigcup_{i\in I}\mathring{A}_i \subseteq \widehat{\bigcup_{i\in I}A_i}^{o}\end{aligned}$$

لأن: $\bigcup_{i\in I}\mathring{A}_i$ مفتوح.

ملاحظة :
الإحتواء العكسي غير صحيح على العموم.

مثال مضاد: $(\mathbb{R}, d_u)$ فضاء متري.
ليكن: $A =]-3,2]$ و $B =]2,4]$
إذا: $\mathring{A} =]-3,2[$ و $\mathring{B} =]2,4[$
و لدينا: $A\cup B =]-3,4]$
إذا: $\mathring{A}\cup\mathring{B} =]-3,2[\cup]2,4[$
و لدينا: $\widehat{A\cup B}^{o} =]-3,4[$
و منه العكس غير صحيح لأن: $\widehat{A\cup B}^{o} \not\subseteq \mathring{A}\cup\mathring{B}$

2. إثبات أن: $\bigcap_{i\in I}\mathring{A}_i \subseteq \widehat{\bigcap_{i\in I}A_i}^{o}$

⋆ إذا كان $\widehat{\bigcap_{i\in I}A_i}^{o} = \phi$ فالإحتواء محقق لأن ϕ محتواة في أي مجموعة.

⋆ إذا كان $\overset{o}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} \neq \phi$:

$$\begin{aligned}
\overset{o}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} \neq \phi \iff \exists x \in \overset{o}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} &\iff \exists V \in V(x)/x \in V \subset \bigcap A_i \\
&\implies \forall i \in I, \exists x \in V \subset A_i \\
&\implies \forall i \in I, x \in \mathring{A}_i \\
&\implies \forall i \in I, x \in \bigcap_{i\in I} \mathring{A}_i
\end{aligned}$$

تعريف 2.5.1

(الملاصقة)

(E,d) فضاء متري، A مجموعة جزئية من E، نقول أن $x\in E$ نقطة ملاصقة ل A إذا وفقط إذا كان من أجل كل U جوار مفتوح ل x $(U\cap A\neq\phi)$، و نرمز لها ب $\overline{A}$ و نكتب:

$$\begin{aligned}
x\in\overline{A} &\iff \forall \quad V\in V(x), V\cap A\neq\phi \\
&\iff B_o(x,r)/B_o(x,r)\neq\phi \\
x\notin\overline{A} &\iff \exists V\in V(x)/V\cap A=\phi
\end{aligned}$$

مبرهنة 1.5.3

1. $\forall A \ , \ A\subset\overline{A}$.
2. $\overline{A}$مغلق.
3. $A\subset B\Longrightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$.
4. $\overline{\overline{A}}=\overline{A} \ , \ A=\overline{A}\Longleftrightarrow A$ مغلق.
5. $\overline{A}$ هو أصغر المغلوقات التي تحوي A.

البرهان

1. اثبات أن: $\forall A \ , \ A\subset\overline{A}$.

نستعمل البرهان بالعكس النقيض:

لدينا:

$$\begin{aligned}
x\in A &\implies x\in\overline{A} \\
x\notin\overline{A} &\implies x\notin A \\
x\notin\overline{A} &\iff \exists V\subset V(x), A\cap V=\phi \\
&\iff x\notin A
\end{aligned}$$

2. اثبات أن: $\overline{A}$ مغلق.

لدينا: $\overline{A}$ مغلق $\Longleftrightarrow C_E\overline{A}$ مفتوح.

$$x \in C_E\overline{A} \iff x \notin \overline{A} \iff \exists V \subset V(x), A\cap V=\phi$$
$$\Longrightarrow \exists V \in V(x)/x \in V \subset C_E\overline{A}$$

حيث: $V(x)$ جوار مفتوح ل x

ومنه: $C_E\overline{A}$ مفتوح أي: $\overline{A}$ مغلق.

3. إثبات أن: $\overline{A} \subset \overline{B} \Longrightarrow A \subset B$.

$$x \in \overline{A} \Longrightarrow \exists V \subset V(x),\ A\cap V \neq \phi \Longrightarrow B\cap V \neq \phi$$

ومنه: $B\cap V \neq \phi \quad / \quad \exists V \subset V(x)$

أي: $x \in \overline{B}$ ومنه: $\overline{A} \subset \overline{B}$

4. اثبات أن : A مغلق $\iff A=\overline{A}$ و $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

أ. لدينا تعريفا : $A \subset \overline{A}$

ب. إثبات أن : $\overline{A} \subset A$

لدينا : $x \in A \Longrightarrow x \in \overline{A} \ ,\ \forall x$

العكس النقيض $x \notin \overline{A} \Longrightarrow x \notin A \ ,\ \forall x$

لدينا: $V \not\subset A \quad / \quad \exists V \in V(x)$; (مغلق) $x \notin A$

$$x \in A^c (\text{مفتوح}) \iff \exists V \in V(x)/V \subset A^c$$
$$\Longrightarrow \exists V \in V(x)/V\cap A=\phi \iff x \notin \overline{A}$$

إذا: $x \notin A \Longrightarrow x \notin \overline{A}$ ومنه: $x \in \overline{A} \Longrightarrow x \in A$

أي: Aمغلق $\iff A=\overline{A}$.

الإستلزام العكسي $A=\overline{A} \Longleftarrow A$مغلق بديهي.

تعريف 3.5.1

(خارج / حدودية)

A جزء من (E,d) فضاء متري، نقول أن النقطة x من E نقطة خارج A إذا كانت نقطة داخل أي $C_EA=A^c$ و نرمز لها بالرمز $ExtA$ مجموعة النقط خارج A

$$ExtA=\overset{\circ}{\widehat{A^c}}=\overset{\circ}{\widehat{C_EA}}$$

* نقول أن النقطة x حدودية ل A إذا كانت x نقطة ملاصقة ل A و A^c، نرمز لمجموعة النقط الحدودية ب : $Fr(A)=\overline{A}\cap\overline{A^c}$
* نقول عن نقطة $x \in E$ أنها نقطة حافة (حافية ، حدودية) إذا حققت :

1. $x \notin \mathring{A} \ \bigwedge\ x \notin Ext(A)$
2. $Fr(A)=C_E\left(\mathring{A} \cup Ext(A)\right)$

مبرهنة 1.5.4

1. $\overset{\circ}{\widehat{A^c}} = \left(\overline{A}\right)^c$
2. $\overline{A^c} = \left(\mathring{A}\right)^c$
3. $Fr(A) = \overline{A} - \mathring{A}$

البرهان

1. اثبات أن : $\overset{\circ}{\widehat{A^c}} = \left(\overline{A}\right)^c$.

أ. اثبات الإحتواء (1): $\overset{\circ}{\widehat{A^c}} \subset \left(\overline{A}\right)^c$.

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\widehat{A^c}} \subset A^c &\Longrightarrow A \subset \left(\overset{\circ}{\widehat{A^c}}\right)^c \\ &\Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{\left(\overset{\circ}{\widehat{A^c}}\right)^c} = \left(\overset{\circ}{\widehat{A^c}}\right)^c \\ &\Longrightarrow \overset{\circ}{\widehat{A^c}} \subset \left(\overline{A}\right)^c \end{aligned}$$

ب. اثبات الإحتواء (2): $\left(\overline{A}\right)^c \subset \overset{\circ}{\widehat{A^c}}$.

لدينا:

$$\begin{aligned} A \subset \overline{A} &\Longrightarrow \left(\overline{A}\right)^c \subset A^c \\ &\Longrightarrow \overset{\circ}{\widehat{\left(\overline{A}\right)^c}} \subset \overset{\circ}{\widehat{A^c}} \\ &\Longrightarrow \left(\overline{A}\right)^c \subset \overset{\circ}{\widehat{A^c}} \end{aligned}$$

2. اثبات أن : $\overline{A^c} = \left(\mathring{A}\right)^c$.

لدينا: $\overset{\circ}{\widehat{A^c}} = \left(\overline{A}\right)^c$

نضع : $A^c = B$ أي: $A = B^c$

نجد: $\left(\mathring{B}\right)^c = \overline{A^c} \iff \mathring{B} = \left(\overline{B^c}\right)^c$

3. اثبات أن : $Fr(A) = \overline{A} - \mathring{A}$ $\qquad Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \cap \overline{A^c} &\iff x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{A^c} \\ &\iff x \in \overline{A} \wedge x \in \left(\mathring{A}\right)^c \\ &\iff x \in \overline{A} \wedge x \notin \mathring{A} \\ &\iff x \in \overline{A} - \mathring{A} \end{aligned}$$

تعريف 4.5.1

1. (E,d) فضاء متري، A جزء غير خالي من E، x نقطة من E.
تسمى x نقطة تراكم ل A إذا وفقط إذا كان كل جوار ل x يقطع المجموع A على الأقل عند نقطة تختلف عن x.

$$x \text{ نقطة تراكم ل } A \iff \forall V \in V(x), V \cap (A - \{x\}) \neq \phi$$

نرمز لمجموعة نقط التراكم ب A'.

2. نقول عن x من A أنها نقطة معزولة، إذا وجد جوار V ل x لا يقطع A إلا في النقطة x و نكتب عند ذلك:

$$x \text{ معزولة في } A \iff \exists V \in V(x), V \cap A = \{x\}$$

خصائص :

1. x نقطة منعزلة $\iff$ x ليست نقطة تراكم.
2. كل نقطة من A فهي نقطة ملاصقة ل A لأن $A \subset \bar{A}$.
3. كل نقطة تراكم ل A فهي نقطة ملاصقة ل A لأن $A' \subset \bar{A}$.
4. $\bar{A} = A \cup A'$.

البرهان

اثبات أن: $\bar{A} = A \cup A'$

1. اثبات الإحتواء (1) أي: $A \cup A' \subset \bar{A}$
لدينا :
$$A \subset \bar{A} \wedge A' \subset \bar{A} \Longrightarrow A \cup A' \subset \bar{A}$$

2. اثبات الإحتواء (2) أي: $\bar{A} \subset A \cup A'$
لدينا:
$$x \in \bar{A} \Longrightarrow \exists V \in V(x)/V \cap A \neq \phi \Longrightarrow \exists x_0 \in V \cap A = \{x_0\}$$

نميز حالتين:
⋆ إذا كان $x_0 \neq x$:
نجد: $\forall V \in V(x), V \cap A = \{x_0\} \neq \phi$
ومنه: $x \in A'$
⋆ إذا كان $x_0 = x$:
نجد: $V \cap A = \{x\}$ ومنه $x \in A$

إذا: $x \in \overline{A} \Longrightarrow x \in A \vee x \in A'$
ومنه: $\overline{A} \subset A \cup A'$

ملاحظة : كل جزء A من $\mathbb{R}$ هو إتحاد مجموعة نقاطه التراكمية و المنعزلة.

تعريف 5.5.1
(الكثافة)
(E,d) فضاء متري، A جزء غير خالي من E، نقول أن A كثيفة في E إذا وفقط إذا $\overline{A} = E$

$$\forall V \text{ (مفتوح من } E\text{)}; V \cap A \neq \phi \Longleftrightarrow \overline{A} = E$$

مثال 1.5.1

$(\mathbb{R},d)$ فضاء متري
$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$، $\mathbb{Q}$ هي كثيفة في $\mathbb{R}$.

$$x \in \overline{\mathbb{Q}} \Longleftrightarrow \forall V \in V(x), V \cap \mathbb{Q} \neq \phi$$

1.6 النهايات - الإستمرارية على فضاء متري

تعريف 1.6.1

(E,d)و (F,σ) فضاءان متريان، f تطبيق من E نحو F.
نقول ان f تقبل نهاية ℓ في النقطة x_0 من E إذا و فقط إذا كان:

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=l \iff \forall B_o(l,\varepsilon),\exists B_o(x_0,\eta)/f(B_o(x_0,\eta))\subset B_o(l,\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\ell &\iff \forall\varepsilon>0,\exists\eta>0/\forall x,|x-x_0|<\eta\Longrightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon\\
&\iff \forall\varepsilon>0,\exists\eta>0/\forall x,x_0-\eta<x<x_0+\eta\Longrightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon\\
&\iff \forall\varepsilon>0,\exists\eta>0/\forall x,x\in]x_0-\eta,x_0+\eta[\Longrightarrow f(x)\in]\varepsilon-\ell,\varepsilon+\ell[\\
&\quad\ x\in B_0(x_0,\eta)\Longrightarrow f(x)\in B_o(l,\varepsilon)
\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}
&x\in B_o(x_0,\eta)\Longrightarrow f(x)\in(B_o(l,\varepsilon))\\
&x\in B_o(x_0,\eta)\Longrightarrow f(x)\in f(B_o(x_0,\eta))\\
&f(x)\in B_o(l,\varepsilon)\Longrightarrow x\in f^{-1}B_o(l,\varepsilon)\\
&x\in f^{-1}(x)\Longrightarrow f(x)\in B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=l &\iff \forall B_o(l,\varepsilon),\exists B_o(x_0,\eta)/\forall x,x\in B_o(x_0,\eta)\Longrightarrow x\in f^{-1}B_o(\ell,\varepsilon)\\
&\quad\ /B_o(x_0,\eta)\subset f^{-1}(B_o(l,\varepsilon))\\
&\quad\ f(B_o(x_0,\eta))\subset B_o(l,\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=l \iff \forall U\in V(l),\exists V(x_0)/f(U)\subset V$$

$\iff$ $\forall U$ جوار مفتوح لـ ℓ , $\exists U$ جوار مفتوح لـ x_0 / $f(U)\subset V$

$\iff$ $\forall U\in V(l),\exists U\in V(x_0)/f^{-1}(V)\in V(x_0)$

تعريف 2.6.1
(نهاية تطبيق مركب)
f و g تطبيقان معرفان كما يلي:

$$f: \quad (E,d) \to (F,\sigma_1)$$

$$g: \quad (F,\sigma_1) \to (G,\sigma_2)$$

إذا كانت f تقبل نهاية l عند x_0 و g تقبل نهاية κ عند l فإن $g \circ f$ تقبل نهاية κ عند x_0.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow l} g(x) = \kappa \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} g \circ f = \kappa$$

البرهان

نبين أن :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} g \circ f = \kappa \Longleftrightarrow \forall \omega \in V(\kappa), \exists U \in V(x)/(g \circ f)^{-1}(\omega) \subset U$$

أي :

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(\omega) \subset U$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \omega \in U(l)/\exists U \in V(\kappa)/f^{-1}(V) \subset U \\ \lim_{x \longrightarrow l} g(x) = \kappa \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \omega \in V(\kappa)\exists V \in V(\ell)/g^{-1}(\omega) \subset V \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ U & \longleftarrow & V & \longleftarrow & \omega \end{array}$$

إذا:

$$g^{-1}(\omega) \subset V \Longrightarrow f^{-1}[g^{-1}(\omega)] \subset f^{-1}(V) \subset U$$

و منه:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(\omega) \subset U$$

أي:

$$(g \circ f)^{-1} \subset U$$

و هو المطلوب.

تعريف 3.6.1

(الإستمرارية)

f تطبيق من (E,d) نحو (F,σ) نقول أن f مستمر في x_0 إذا و فقط إذا كان $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)=f(x_0)$ إذا و فقط إذا:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall x\in E, d(x_0,x)<\eta \Longrightarrow \sigma(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

$$\forall V\in V(f(x_0))\ :\ f^{-1}(V)\in V(x_0)$$

مبرهنة 1.6.1

1. f مستمر على E إذا و فقط إذا كانت الصورة العكسية لمفتوح من F (أو مغلق) هو مفتوح (أو مغلق) من E.

f مستمرة على $E \Longleftrightarrow \forall U\in F, f^{-1}(U)\subset E$

2. f مستمرة على $E \Longleftrightarrow \forall A\subset F, f^{-1}(A)\subset E$

(مغلق) (مغلق)

البرهان

1. f مستمر على E يعني f مستمرة عند كل نقطة x من E أي: $\lim\limits_{y\longrightarrow x} f(y)=f(x)$

f مستمرة عند $x \Longleftrightarrow \forall V\in V(f(x)), f^{-1}(V)\in V(x)$

أ. نبين الإستلزام الأول:

f مستمرة عند x من $E \Longleftarrow \forall V\in V(f(x)), f^{-1}(V)\in V(x)$

$\forall V(F$ مفتوح من $)\Longrightarrow f^{-1}(V)(E$ مفتوح من $)$

f مستمر على $E \Longleftarrow (E$ مفتوح من $)\Longrightarrow f^{-1}(V)(F$ مفتوح من $)\forall V$

ليكن U(مفتوح من F) إذا:

$$\begin{cases} f^{-1}(V)=\phi \\ \vee \\ f^{-1}(U)\neq\phi \end{cases}$$

إذا كان $f^{-1}(U)\neq\phi$ إذا $\exists x\in f^{-1}(V)$

$\forall x\in f^{-1}(U)\Longrightarrow f(x)\in V\Longrightarrow U\in V(f(x))$

حيث V (مفتوح من F) وهو جوار لكل نقاطه، و بما أن f مستمر فإن $f^{-1}(V) \subset V(x)$.
ومن هنا $f^{-1}(V)$ جوار لكل نقاطه ومنه $f^{-1}(V)$ (مفتوح من F).
ب. نبين الإستلزام العكسي:
f مستمرة عند x من E $\Longrightarrow \forall V \in V(f(x)), f^{-1}(V) \in V(x)$
لدينا: U جوار ل $f(x)$ أي:
$\exists V($ مفتوح من $F)/ f(x) \in V \subset U \Longrightarrow x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$
حسب المبرهنة أعلاه $f^{-1}(u)$ مفتوح يحوي x.
ومنه $f^{-1}(U)$ جوار ل x حسب تعريف الجوار.

2. f مستمرة على E $\Longleftrightarrow$ (مغلق من E) $f^{-1}(A)$ / (مغلق من F) $\forall A$
أ. نبين الإستلزام الأول:
f مستمرة على E $\Longleftarrow$ (مغلق من E) $f^{-1}(A)$ / (مغلق من F) $\forall A$
ليكن:
A (مغلق من F) $\Longleftrightarrow A^c$ (مفتوح من F) $\Longleftarrow f^{-1}(A^c)$ (مفتوح من E).
و لدينا:
$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \Longleftrightarrow f^{-1}(A)$ مغلق.
ب. نبين الإستلزام العكسي:
f مستمرة على E $\Longrightarrow$ مغلق من E $f^{-1}(A)$ / مغلق من F $\forall A$
ليكن:

$$f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c \text{ (مغلق في } F) \Longleftarrow V^c(F \text{ مغلق من }) \Longleftrightarrow V(F \text{ مفتوح من })$$
$$\Longleftrightarrow f^{-1}(V)(E \text{ مفتوح من })$$

إذن f مستمر على E.

مبرهنة 1.6.2

$$\text{f مستمرة} \Longleftrightarrow \forall A \subset E / f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

البرهان

1. نبين الإستلزام الأول:

$$\text{f مستمرة} \Longleftarrow \forall A \subset E / f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

لتكن المجموعة الجزئية A من E، حيث $\overline{A}$ مغلق من E.

اثبات الإحتواء :

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

$$y \in f(\overline{A}) \Longleftrightarrow \exists x \in \overline{A} / y = f(x)$$

ومنه يجب اثبات أن $y \in \overline{f(A)}$

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall U \in V(x) \quad , \quad V \cap A \neq \phi ....(*)$$

$$y \in \overline{f(A)} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall U \in V(y) \quad , \quad U \cap f(A) \neq \phi$$

ليكن U جوار ل y حيث $(f(x) = y) \Longleftarrow f^{-1}(U)$ جوار ل x.

من $(*)$ نجد

$$f^{-1}(U) \neq \phi$$

$$f(f^{-1}(U) \cap A) \subset f(f^{-1}(U)) \cap f(A) \subset U \cap f(A) \Longrightarrow \; U \cap f(A) \neq \phi \Longrightarrow y \in f(\overline{A})$$

2. نبين الإستلزام العكسي :

$$\forall A \subset E / f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \Longleftarrow \text{مستمرة } f$$

ليكن V مغلق من F ولنبرهن أن $f^{-1}(V)$ مغلق في E أي

$$f^{-1}(V) = \overline{f^{-1}(V)}$$

(الإحتواء الأول بديهي)

نبين الإحتواء الثاني:

$$\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(V)$$

بأخذ

$$f^{-1}(V) = A$$

نحصل حسب المبرهنة المذكورة سابقا على: $\quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

أي:

$$f(\overline{f^{-1}(V)}) \subset \overline{f(f^{-1}(V))} \subseteq V........(1)$$

ومنه : $\quad f(\overline{f^{-1}(V)}) \subset V$

إذن: $\quad \overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(V)$ أي $f^{-1}(V)$ مغلق في E

ومنه:

$$f^{-1}(V) = \overline{f^{-1}(V)}$$

تعريف 4.6.1

f تطبيق من (E,d) نحو (F,σ)، التطبيق f يحافظ على المفتوحات و المغلقات.

1. f تطبيق مفتوح $\iff$ $\forall V$ مفتوح $\subset E \Longrightarrow f(V)$ مفتوح $\subset F$
2. f تطبيق مغلق $\iff$ $\forall A$ مغلق $\subset E \Longrightarrow f(A)$ مغلق $\subset F$

تعريف 5.6.1

f تطبيق من (E,d) نحو (F,σ).

f مستشاكل $\iff$ f تقابلي

f مستشاكل $\iff$ f و f^{-1} مستمرين

ملاحظة :

1. f مفتوح $\iff$ f^{-1} مستمر .
2. f مغلق $\iff$ f^{-1} مغلق .

تعريف 6.6.1

f تطبيق من (E,d) نحو (F,σ) f مستمر بإنتظام على E إذا وفقط إذا :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \exists x', x'' \in E : \ d(x', x'') < \eta \Longrightarrow \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$$

1.7 المتتاليات على الفضاءات المترية

تعريف 1.7.1

(E,d) فضاء متري (x_n) متتالية من E، نقول أن (x_n) متقاربة نحو X إذا و فقط إذا:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n ; X_{n0}) < \varepsilon$$

$$\forall B_o(x,\varepsilon) \ , \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \forall n \in \mathbb{N} \ , n \geq n_0 \ , x_n \in B_o(X_0, \varepsilon)$$

$$\forall V \in V(x) \ , \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \forall x \in \mathbb{N} \ , n \geq n_0, \ x_n \in V$$

تعريف 2.7.1

(متتالية كوشي)

$(x_n)_n$ متتالية كوشي $\iff$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall p, q \in \mathbb{N}; p, q > n_0 \ \Longrightarrow d(n_p ; n_q) < \varepsilon$

تعريف 3.7.1
(الإنفصال)
كل فضاء متري (E,d) منفصل أي :

$$\forall x,y\in E\ ,x\neq y\ \ ,\exists V_x\ ,\exists V_y\ /\ V_x\cap V_y=\phi$$

مبرهنة 1.7.1

1. كل متتالية متقاربة فنهايتها وحيدة.
2. كل متتالية متقاربة فهي لكوشي (العكس غير صحيح).

البرهان

لتكن $(x_{n})_n$ متتالية من فضاء متري (E,d) متقاربة نحو x
نفرض أن $(X_n)_n$ متقاربة نحو t حيث $t\neq x$ إذا:

$$x_1\longrightarrow x\iff\forall\ B_o(x,\varepsilon),\ \exists n_1\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\in\mathbb{N}:\ n>n_1\implies x_n\in B_o(x,\varepsilon)$$

$$x_2\longrightarrow t\iff\forall\ B_o(t,\varepsilon),\ \exists n_2\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\in\mathbb{N}:\ n>n_2\implies x_n\in B_o(t,\varepsilon)$$

إذا:
$$\exists N=\max(n_1,n_2)\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\implies\begin{cases}x_n\in B_o(x,\varepsilon)\\ \wedge\\ x_n\in B_o(t,\varepsilon)\end{cases}$$

$$x\neq t\ \ ,\ \forall B_o(t,\varepsilon)\ ,\ \forall B_o(t,\varepsilon)\ ,\ \ B_o(x,\varepsilon)\cap B_o(t,\varepsilon)\neq\phi$$

و هذا تناقض مع خاصية الإنفصال (كل فضاء متري منفصل) ومنه كل متتالية متقاربة نحو نهاية وحيدة.

مبرهنة 1.7.2

(E,d) فضاء متري A جزء من E.

$$\forall(x_n)_n\subset A\ ,\ x_n(\text{ متقاربة })\ x_n\longrightarrow x\implies x\in A\iff\ A\ \text{مغلق}$$

البرهان

1. اثبات الإستلزام الأول:

$$\forall(x_n)_n\subset A\ ,\ \ x_n\longrightarrow x\implies x\in A\implies\ A\ \text{مغلق}$$

لتكن $(x_n)_n$ متتالية من A / $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$

هل x من A ؟

بإستعمال تعريف النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \iff \forall B_o(x,\varepsilon)\,,\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N} \;:\; n > n_0 \implies x_n \in B_o(x,\varepsilon)$$

نفرض بالخلف: $x \notin A$ بما أن A مغلق $(A = \overline{A})$ نجد $x \notin \overline{A}$ (حسب تعريف الملاصقة)

$$x \notin \overline{A} \iff \exists B_o(x,\eta) \,/\, B_o(x,\eta) \cap A = \phi$$
$$\exists B_o(x,\eta) \,/\, B_o(x,\eta) \subset A^c$$

لكن

$$n > n_0 \implies x_n \in B_o(x,\eta) \subset A^c \implies n > n_0 \;:\; x_n \in A^c \implies x_n \notin A$$

وهذا تناقض.

2. اثبات الإستلزام الثاني:

نبين أن A مغلق أي: $A = \overline{A}$ (نعلم أن $A \subset \overline{A}$)

نفرض أن : A غير مغلق $\iff A \neq \overline{A}$ أو $\overline{A} \not\subset A$

$$\exists t \in \overline{A} \wedge t \notin A \iff \overline{A} \not\subset A$$
$$t \in \overline{A} \iff \forall B_o(t,\varepsilon)\,,\, B_o(t,\varepsilon) \cap A \neq \phi$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad,\, B_o(t,\varepsilon) \cap A \neq \phi$$

$$\exists (x_n)_n \in A$$
$$x_n \in B_o(t,\frac{1}{n}) \iff d(t,x_n) \leq \frac{1}{n}$$
$$x_n \longrightarrow t \implies t \in A$$

ومنه تناقض مع الفرض $(t \in A)$

مبرهنة 1.7.3

(E,d) فضاء متري، A جزء غير خالي من E، x نقطة من E، نقول عن x أنها نقطة ملاصقة إذا وجدت متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من A حيث $(x_n)_n$ متقاربة نحو x

$$x \in \overline{A} \iff \exists (x_n) \subset A \qquad / x_n \longrightarrow x$$

البرهان

1. اثبات الإستلزام الأول:
بنفس طريقة البرهان السابق.

2. إثبات الإستلزام الثاني:

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \,/\quad x_n \longrightarrow x \implies \quad x \in \overline{A}$$

$$\begin{aligned} x_n \longrightarrow x &\iff \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ n > n_0 \implies x_n \in B_o(x,\varepsilon) \\ &\iff \forall B_o(x,\varepsilon)\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n > n_0 \implies x_n \in B_o(x,\varepsilon) \end{aligned}$$

$$n > n_0\,,\ x_n \in B_o(x,\varepsilon)\,,\ x_n \subset A$$

إذا: $\forall B_o(x,\varepsilon)\,,\quad B_o(x,\varepsilon) \cap A \neq \phi \implies x \in \overline{A}$

تعريف 4.7.1

(المتتاليات الجزئية)
(x_n) متتالية كل متتالية من الشكل $(x_{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ حيث φ تطبيق متزايدة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{N}$ (أو جزء من $\mathbb{N}$) نحو $\mathbb{N}$ تسمى متتالية مستخرجة أو متتالية جزئية من (x_n)

$$\begin{aligned} \varphi \,:\ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longrightarrow \varphi(n) \end{aligned}$$

مثال 1.7.1

نعتبر المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ذات الحد العام $(x_n) = n$
نجد أن المتتالية $(x_{2n+1} = 2n+1)$ هي متتالية جزئية من المتتالية $(x_n) = n$ حيث:

$$\begin{aligned} \varphi \,:\ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longrightarrow 2n+1 \end{aligned}$$

تطبيق متزايدة تماما.

تعريف 5.7.1

(x_n) متتالية من فضاء متري (E,d)، x نقطة من E تسمى قيمة ملاصقة ل $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إذا و فقط إذا:

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, n > n_0 \implies x_n \in B_d(x,\varepsilon)$$

مثال 2.7.1

نعتبر المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة ب:

$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ x_n=\dfrac{1+(-1)^n n}{n}$ هل $(x=1)$، $(x=-1)$ قيمة ملاصقة ل (x_n)

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0,\forall\ n_0\in\mathbb{N},\exists\ n\in\mathbb{N}/n>n_0 &\Longrightarrow x_n\in B_d(x,\varepsilon)\\ &\Longrightarrow x_n\ \in\,]1-\varepsilon\ ,\ 1+\varepsilon[\end{aligned}$$

$$\forall n_0\in\mathbb{N},\exists\ n\in\mathbb{N},n=2n_0,n>n_0\ \ 2n_0>n_0\Longrightarrow x_{2n_0}\in\,]1-\varepsilon\ ,\ 1+\varepsilon[,x_{2n_0}=\frac{1+2n_0}{2n_0}=\frac{1}{2n_0}+1$$

$$x=-1,\forall\varepsilon>0,\forall\ n_0\in\mathbb{N}/\exists n\in\mathbb{N}\ /\ n>n_0\Longrightarrow x_n\ \in\,]-1-\varepsilon\ ,\ -1+\varepsilon[$$

$$A=\{x_n\ /n\in\mathbb{N}\}\ ,\ x\in\overline{A}\ =\overline{\{x_n\ /n\in\mathbb{N}\}}$$

مبرهنة 1.7.4

1. كل قيمة ملاصقة ل (x_n) فهي نقطة ملاصقة للمجموعة المتكونة من عناصر المتتالية.
2. العكس غير صحيح على العموم.

البرهان

$$A=\{x_n\ /\ n\in\mathbb{N}\}$$

x قيمة ملاصقة ل (x_n) $\Longrightarrow x\in\overline{A}$

x قيمة ملاصقة ل (x_n) $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\forall\ n_0\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N},n>n_0 \Longrightarrow (x_n)\in B_o(x,\varepsilon)$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow B(x,\varepsilon)\cap A\neq\phi\\ &\Longrightarrow x\in\overline{A}\end{aligned}$$

مثال 3.7.1

لتكن المتتالية $x_n=x$، إذا هل تقبل قيمة ملاصقة؟

نفرض أنها تقبل قيمة ملاصقة x

$$\begin{aligned}\forall\ \varepsilon>0,\forall n_0\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N}\ ,\ n>n_0 &\Longrightarrow x_n\in B_o(x,\varepsilon)\\ &\Longrightarrow x_n=x\in]x-\varepsilon;x+\varepsilon[\end{aligned}$$

إذا كان n_0 كبيرا جدا و لدينا: $n>n_0$ فإن $n\longrightarrow+\infty$

$$\exists n>n_0 \qquad\qquad x_n\in]x-\varepsilon;x+\varepsilon[$$

$x_n = x$ متباعدة و $x_n \in B_o(x,\varepsilon)$ وهذا تناقض (لأن هذا يعني أن (x_n) متقاربة) ومنه $x_n = x$ لا تقبل أي قيمة ملاصقة لها.

$$A = \{n \ / \ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$$

حيث A تقبل عدد لانهائي من النقط الملاصقة

مبرهنة 1.7.5

x ملاصقة ل (x_n) فإنه يوجد متتالية مستخرجة متقاربة نحو x.

مبرهنة 1.7.6

1. كل متتالية لكوشي تقبل على الأكثر قيمة ملاصقة لها.
2. (x_n) متتالية متقاربة نحو x $\Longleftrightarrow$ (x_n) لكوشي.
3. (x_n) متتالية متقاربة نحو x $\Longleftrightarrow$ (x_n) تقبل قيمة ملاصقة x.

1.8 الفضاءات المترية التامة

تعريف 1.8.1

نقول أن (E,d) فضاء متري تام إذا كانت كل متتالية لكوشي متقاربة.

أمثلة 1.8.1

1. $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متري تام $d_u = |x-y|$.
2. $(\mathbb{C},d_u)$ فضاء متري تام $d_u = \left[(x'-y')^2+(x''-y'')^2\right]^{\frac{1}{2}}$،
   حيث: $x = x'+ix''$ و $y = y'+iy''$.
3. $(\mathbb{Q},d_u)$ ليست فضاء متري تام.

البرهان

إثبات أن: $(\mathbb{Q}, d_u)$ ليست فضاء متري تام.
لدينا:

$$\exists (x_n)_n \in \mathbb{Q} \quad (x_n)_n \text{ لكوشي} \quad (x_n)_n \text{ غير متقاربة} \quad x_n \longrightarrow x \notin \mathbb{Q}$$

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \longrightarrow l$$

فهي متقاربة نحو l.
$(x_n)_n$ من $\mathbb{Q}$ فهي من $\mathbb{R}$، و بماأنها متقاربة على $\mathbb{R}$ فهي لكوشي، و لكن $l \notin \mathbb{Q}$.

نظرية 1.8.1

(نظرية كنطور) (E, d) فضاء متري لدينا:

$$(E,d) \text{ فضاء متري تام} \iff \forall (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} d(F_n) = 0 \Longrightarrow \bigcap F_n \neq \phi$$

حيث: $(F_n)_n$ متتالية مغلقات متناقصة و غير خالية.
أي:
(E, d) فضاء متري تام $\iff$ تقاطع كل المتتاليات (F_n) المتناقصة و المغلقة و غير الخالية و التي تحقق $\lim_{n\to+\infty} d(F_n) = 0$ فهي غير خالية.

تعريف 2.8.1

(فضاءات بير)
نقول أن (E, d) فضاء لبيري إذا كان كل إتحاد قابل للعد لمغلقات داخلها خالي فداخله خالي.

$$(E,d) \text{ فضاء لبيري} \iff \forall (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, \overset{o}{F_n} = \phi \Longrightarrow \overset{o}{\overbrace{\bigcup_{n\geq 1} F_n}} = \phi$$

حيث : F_n مغلق و قابل للعد.

نظرية 1.8.2

(بير)
(E, d) فضاء متري لبيري إذا وفقط إذا كان كل تقاطع قابل للعد لمفتوحات كثيفة في E فهو كثيف في E $(\overline{V_n} = E)$.

$$(E,d) \text{ فضاء لبير} \iff \forall (V_n)_{n\in\mathbb{N}}, V_n \text{ (مفتوح) } \overline{V_n} = E \Longrightarrow \overline{\bigcap_{n\geq 0} V_n} = E$$

البرهان

ليكن: $V_2 = E$، لدينا: $V_2 \cap B_o(x_1, r_1) \neq \phi$

ومنه توجد $B_o(x_2, r_2)$ حيث: $B_o(x_2, \frac{r_2}{2}) \subset B_o(x_2, r_2) \subset V_2 \cap B_o(x_1, \frac{r_1}{2})$

إذا:

$$r_2 < \frac{r_1}{2} < \frac{r_0}{2^2} = \frac{r_0}{4}$$

F_2 مغلق غير خالي ومنه:

$$F_n = B_F(x_n, \frac{r_n}{2}) \subset B_o(x_n, r_n) \subset V_n \cap B_o(x_{n-1}, \frac{r_{n-1}}{2})$$

إذا:

$$\frac{r_n}{2} \leqslant \frac{r_{n-1}}{2^2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{r_0}{2^{n+1}} \longrightarrow 0$$

$F_n = B_F(x_n, \frac{r_n}{2})$ متتالية مغلقات $\lim_{n \to +\infty} d(F_n) = 0$ $F_{n+1} \subset F_n?$

$$B_o(x_{n+1}, \frac{r_{n+1}}{2}) \subset B_o(x_n, \frac{r_n}{2}) \subset \ldots \subset B_o(x_2, \frac{r_2}{2}) \subset V_2 \cap B_o(x_2, \frac{r_1}{1})$$

E تام إذا:

$$\bigcap F_n \neq \phi \Longrightarrow \exists x \in \bigcap_{n \geqslant 0} F_n; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} x \in F_0 &\Longrightarrow x \in V_0 \wedge x \in V \\ x \in F_1 &\Longrightarrow B_o(x_1, r_1) \subset B_o(x_0, \frac{r_0}{2}) \cap V_1 \\ x \in F_1 &\Longrightarrow x \in V_1 \end{aligned}$$

إذا:

$$\forall x \in \mathbb{N}, x \in V_n$$

أي:

$$\forall V \ , \ x \in V \wedge x \in \bigcap_{n \geqslant 0} V_n$$

إذا:

$$V \cap \left(\bigcap V_n\right) \neq \phi$$

ومنه:

$$\overline{\cap V_n} = E$$

أي: (E, d) لبير.

مبرهنة 1.8.1

(كنطور)
إذا كان (E,d) فضاء متري تام و $E=\bigcup_{n\geq 0}F_n$ بحيث $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية مغلقات من E فإنه يوجد على الأقل n_0 من $\mathbb{N}$ حيث $\overset{o}{F}_{n_0}\neq\phi$.

البرهان

نبرهن بالخلف:

$$\exists\, n_0\in\mathbb{N}\quad/\quad \overset{o}{F}_{n_0}\neq\phi$$

نفرض العكس أي:

$$\forall\, n\in\mathbb{N}\quad/\quad \overset{o}{F}_{n}\neq\phi$$

(E,d) فضاء متري تام إذا هو لبير و منه: $E=\overset{o}{E}=\widehat{\bigcup_{n\geq 1}F_n}^{\,o}=\phi$

أي: $E=\phi$ وهذا تناقض.

مبرهنة 1.8.2

(E,d) فضاء متري تام، A جزء غير خالي من E، لدينا التكافؤ:

A تام $\Longleftrightarrow A$ مغلق من E

البرهان

(A,d_A) فضاء متري جزئي من (E,d)

1. اثبات أن: A مغلق $\Longrightarrow (A,d_A)$ تام

لدينا:

A مغلق $\Longleftrightarrow \bar{A}=A$ ، $\bar{A}\subset A$ لأن $A\subset\bar{A}$

نأخذ:

$$\forall x\in\bar{A}\Longrightarrow x\in A; x\in\bar{A}\Longleftrightarrow \exists(x_n)_n\in A/\ \ x_n\longrightarrow x$$

$(x_n)_n$ لكوشي على $(A,d)\Longrightarrow (x_n)_n$ لكوشي على $(E,d)\Longrightarrow x\in E\Longrightarrow x_n\longrightarrow x\in F\Longrightarrow x$

مادام (A,d_A) تام، إذا $(x_n)_n$ متقاربة نحو x في A إذا $x\in A$

أي: A مغلق ، ومنه $\bar{A}\subset A$

2. إثبات أن: (A,d_A) تام $\Longrightarrow A$ مغلق

$$A \text{ لكوشي على } (x_n)_n\Longrightarrow E \text{ لكوشي على } (x_n)_n\Longrightarrow x_n\longrightarrow x\wedge x\in A$$

لأن: A مغلق.
$(x_n)_n$ متقاربة في A ومنه: (A,d_A) تام.

مثال 1.8.1

$(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متري تام، لدينا $A=]0,1]$ ليس مغلق إذا حتما ليس تام .
$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \notin A$ ، $x_n=\frac{1}{n} \in A$ لكوشي في A.
إذا غير متقاربة في A.

نظرية 1.8.3

(الإمتداد بالإستمرار)
(E,d) فضاء متري، و (F,σ) فضاء متري تام، A جزء كثيف في E، f تطبيق من A نحو F مستمر بإنتظام على A.
إذن يوجد تطبيق g وحيد مستمر بإنتظام من E نحو F بحيث: $\forall x\in A \quad f(x)=g(x)$

$$f:\quad A\subset E\longrightarrow (F,\sigma)$$

$$\exists\ g:\quad E\longrightarrow F \quad \forall x\in A \quad f(x)=g(x)$$

g إمتداد بالإستمرار ل f على E.

البرهان

$$f:A\subset E\longrightarrow F\ ,\ \overline{A}=E \text{ مستمرة بإنتظام}$$

$$x\in E=\overline{A}\Longleftrightarrow \forall (x_n)\subset A\ /\ x_n\longrightarrow x$$

$$\begin{aligned} g:\ E &\longrightarrow F\\ x &\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)\ ?$$

$(x_n)_n$ لكوشي على E، f مستمر بإنتظام إذا $f(x_n)$ لكوشي على F.
(F,σ) تام، إذا $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $y\in F$.
لتكن العلاقة:

$$\begin{aligned} g:\ E &\longrightarrow F\\ x &\longmapsto f(x)=y\end{aligned}$$

حيث : $x=\lim x_n$ ، $y=\lim f(x_n)$ و $(x_n)\subset A$

$$y \text{ تطبيق} \Longleftrightarrow \forall x\in E,\exists y\in F\ ,\ y=f(x)$$

و

$$x,x' \in E \; ; \; x=x' \Longrightarrow g(x)=g(x')$$

$$x\in E=\overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)\in A, x_n \longrightarrow x \Longrightarrow \exists y/\lim f(x_n)=y=g(x)$$

$$x'\in E=\overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n')\in A, x_n' \longrightarrow x' \Longrightarrow \exists y'/\lim f(x_n')=y'=g(x')$$

نبين أن: $y=y'$: $\forall \varepsilon>0, \delta(y,y')<\varepsilon$

$$\delta(y,y')\leqslant \delta(y,f(x_n))+\delta(f(x_n),f(x_n'))+\delta(f(x_n'),y')$$

$$x_n\longrightarrow x \Longleftrightarrow \forall \varepsilon_1>0, \exists n_1\in\mathbb{N}, n>n_1 \Longrightarrow d(x_n,x)<\frac{\varepsilon_1}{2}$$

$$x_n'\longrightarrow x' \Longleftrightarrow \forall \varepsilon_1>0, \exists n_2\in\mathbb{N}, n>n_2 \Longrightarrow d(x_n',x')<\frac{\varepsilon_1}{2}$$

$$\forall \varepsilon_1>0, \exists n_3=\max(n_1,n_2)/\forall n>n_3 \Longrightarrow \begin{cases} d(x_n,x)<\frac{\varepsilon_1}{2} \\ d(x_n',x')<\frac{\varepsilon_1}{2}\end{cases}$$

$$\forall \varepsilon_1>0, \exists n_3\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}, n>n_3 \Longrightarrow d(x_n,x)+d(x,x')+d(x',x_n')$$

نضع $x=x'$ نجد: $d(x_n,x_n')<\varepsilon_1$

f مستمر بإنتظام على A:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall x',x''\in A; d(x',x'')<\eta \Longrightarrow \delta(f(x'),f(x''))<\varepsilon$$

نضع $\eta=\varepsilon_1$:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta=\varepsilon_1, \forall n\in\mathbb{N}, n>n_3 \Longrightarrow d(x_n,x_n')<\varepsilon_1 \Longrightarrow \delta(f(x_n),f(x_n'))<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_3\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N}, n>n_3 \Longrightarrow \delta(f(x_n),f(x_n'))<\frac{\varepsilon}{3}\cdots\star$$

$$\lim f(x_n)=y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon>0, \exists n_4/\forall n\in\mathbb{N}, n>n_4 \Longrightarrow \delta(f(x_n),y)<\tfrac{\varepsilon}{3}\cdots\star\star$$

$$\lim f(x_n')=y' \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon>0, \exists n_5/\forall n\in\mathbb{N}, n>n_5 \Longrightarrow \delta(f(x_n'),y')<\tfrac{\varepsilon}{3}$$

إذا: $\forall \varepsilon>0, \exists N=\max(n_3,n_1,n_5)/\forall n\in\mathbb{N}, n>N$ فإن:

$$\delta(y,y')\leqslant \delta(y,f(x_n))+\delta(f(x_n),f(x_n'))+\delta(f(x_n'),y')\leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}$$

إذا:

$$0\leqslant \delta(y,y')<\varepsilon$$

ومنه: $y=y'$

نبين أن: $\forall x\in A, f(x)=g(x)$

$$f(x_n)\longrightarrow f(x) \text{ إذا } x_n\longrightarrow x\in A$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x) = f(x) = g(x)$$

g مستمر بإنتظام على E:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in E, d(x,x') < \eta \Longrightarrow \delta(g(x), g(x')) < \varepsilon$$

لدينا من $(\star)$ و $(\star\star)$ نحصل على:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_3 / \forall n > n_3 \Longrightarrow d(x,x') &\leqslant d(x,x_n) + d(x_n,x'_n) + d(x'_n,x') \\ &< \tfrac{\varepsilon_1}{3} + d(x_n,x'_n) + \tfrac{\varepsilon_1}{3} \end{aligned}$$

و منه نأخذ: $\eta = \frac{2\varepsilon_1}{3} + \varepsilon$

نجد: $d(x,x') < \eta$

لدينا: f مستمر بإنتظام على A

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \forall x_1, x_2 \in A, d(x_1,x_2) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

و منه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \forall x, x' \in E, d(x,x') < \eta \Longrightarrow \delta(g(x), g(x') < \varepsilon$$

أي: g مستمر بإنتظام على E

الأبعاد المتكافئة

تعريف 3.8.1

1. d_1 و d_2 متكافئان.

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+ \ , \ \alpha d_2 \leqslant d_1 \leqslant \beta d_2$$

2. d_1 و d_2 متكافئان بإنتظام.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall (x,y) \in E^2 \ , \ d_1(x,y) < \eta \Longrightarrow d_2(x,y) < \varepsilon$$

3. d_1 و d_2 متكافئان طبولوجيا.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists \eta > 0 \ / \ \forall y \in E \ \ d_1(x,y) < \eta \Longrightarrow d_2(x,y) < \varepsilon$$

1.9 تمارين مقترحة

التمرين الأول

(E,d) فضاء متري و $a \in E$ من أجل كل x، y من E نضع:

$$d_a(x,y) = \begin{cases} d(a,x)+d(a,y) & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}$$

1- برهن أن d_a تعرف مسافة على E.
2- برهن أن كل كرة مفتوحة ذات المركز a و نصف القطر r على المسافة d تساوي كرة مفتوحة ذات المركز a و نصف القطر r على المسافة d_a.

التمرين الثاني

ليكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيق متزايد تماما و ليكن التطبيق d المعرف ب:

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longrightarrow & d(x,y) = |f(x)-f(y)| \end{array}$$

⋆ بين أن d تطبيق على $\mathbb{R}$.

التمرين الثالث

1- أذكر المسافات الأساسية على $\mathbb{R}^n$ و بين أنها متكافئة.
2- مثل هندسيا كرة الوحدة $B_o(o,1)$ في كل من $(\mathbb{R}^3, d_1)$ و $(\mathbb{R}^3, d_\infty)$.
3- A جزء من الفضاء المتري (E,d) أعط تعريف وافي لكل من: $\overline{A}$، A'، $\mathring{A}$، $Fr(A)$، $Ext(A)$
4- (E,d) فضاء متري تام A جزء غير خالي من E برهن التكافؤ التالي:

$$A \text{ تام } \Longleftrightarrow A \text{ مغلق من } E$$

الفصل الثاني

الفضاءات الطبولوجية

تمهيد

إن دراسة الفضاءات الطبولوجية من أهم المحاور الأساسية في دراسة الرياضيات و ذلك لما تقتضيه من شموليتها على كل عناصر الرياضيات من تحليل و جبر و هندسة و ما يميز الطبولوجيا هي إعتمادها على البرهان في كل المجالات، كما أنها تعتمد على دراسة تموقع النقط بما فيها الجوارات و حالات المجموعات المفتوحة و المغلقة و نتطرق أيضا إلى بنية فضاء طبولوجي و دراسة خواصه.

2.1 تعاريف و عموميات

تعريف 1.1.2

E مجموعة غير خالية، τ جزء من $P(E)$ مجموعة أجزاء من E، نقول أن τ طبولوجيا على E إذا وفقط إذا حققت الشروط التالية:

1. $\phi, E \in \tau$
2. من أجل كل $U_i \in \tau$ $(i \in I)$ لدينا: $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$
   τ مستقرة بالنسبة للإتحاد الكيفي.(غير منته)
3. من أجل كل $U_i \in \tau$ $(\forall i \in \{1,2,...,n\})$ لدينا: $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$
   τ مستقرة بالنسبة لتقاطع المنته.

-تسمى الثنائية المكونة من المجموعة E ومن الطبولوجيا τ بالفضاء الطبولوجي و نرمز لها بالرمز (E,τ).

-يطلق على عناصر المجموعة τ إسم الأجزاء المفتوحة و أحيانا المفتوحات إختصارا.

- نسمي كل متممة لمفتوح بمغلق.

أمثلة 1.1.2

1. لتكن E مجموعة غير خالية حيث: $E = \{a;b\}$
   و نعتبر المجموعة $\tau_1 = \{\phi;E;\{a\}\}$
   τ_1 تعرف طبولوجيا على E لأنها تحقق مايلي:
   أ. $\phi, E \in \tau_1.$
   ب. $\phi \cup E = E \in \tau_1, \phi \cup \{a\} = \{a\} \in \tau_1, E \cup \{a\} = E \in \tau_1.$
   ج. $\phi \cap E = \phi \in \tau_1, \phi \cap \{a\} = \phi \in \tau_1, E \cap \{a\} = \{a\} \in \tau_1, \phi \cap E \cap \{a\} \in \tau_1.$
   تسمى الثنائية (E,τ_1) فضاء طبولوجي.

2. لتكن E مجموعة غير خالية حيث $E = \{1;2;3\}$
   و نعتبر المجموعة $\tau = \{\phi;E;\{1\};\{2\};\{1;3\}\}$
   $\{1\} \cup \{2\} = \{1;2\} \notin \tau_2:$
   و منه τ_2 ليست طبولوجيا على المجموعة E.

3. لتكن E مجموعة غير خالية:
   -$\tau_d = P(E)$ تعرف طبولوجيا على E، تسمى بالطبولوجيا المتقطعة (القوية)، حيث $P(E)$

مجموعة أجزاء E. (تحوي على أكبر عدد من المفتوحات)

-$\tau_g = \{\phi; E\}$ تعرف طبولوجيا على E، تسمى بالطبولوجيا الضعيفة. (تحوي أقل عدد من المفتوحات)

ملاحظة : إنطلاقا من مجموعة واحدة يمكن تعريف عدة طبولوجيات مختلفة.

مثال 1.1.2

لتكن المجموعة $E = \{a, b\}$ لدينا

$$P(E) = \{E; \phi; \{a\}; \{b\}\}.$$

إذن يمكن تعريف أربع طبولوجيات على نفس المجموعة E و هي:

1. $\tau_1 = \tau_g = \{\phi; E\}.$
2. $\tau_2 = \tau_d = P(E).$
3. $\tau_3 = \{\phi; E; \{a\}\}.$
4. $\tau_4 = \{\phi; E; \{b\}\}.$

ملاحظة : كل فضاء متري (E, d) هو فضاء طبولوجي.

$$\tau = \{\phi; E; U \;/\; U = \bigcup_{x \in U} B_o(x, \tau)\}$$

2.2 المقارنة بين طبولوجيتين

تعريف 1.2.2

لتكن E مجموعة غير خالية، τ_1 و τ_2 طبولوجيتين على E.

نقول عن الطبولوجية τ_1 أنها أدق من الطبولوجية τ_2 (τ_2 أقل دقة من τ_1)

إذا كان:

$$(\tau_2 \subset \tau_1)$$

حيث عدد مفتوحات τ_2 أقل من عدد مفتوحات τ_1.

نتيجة 1.2.2

يتضح مما سبق أن الطبولوجية الأكثر دقة هي الطبولوجية القوية τ_d و أن الطبولوجية الأقل دقة هي الطبولوجية الضعيفة τ_g، وأن جميع الطبولوجيات الأخرى محصورة بين هاتين الأخيرتين.

نتيجة 2.2.2

إذا كانت $(\tau_2 \subset \tau_1)$ و $(\tau_1 \subset \tau_2)$ نقول عندئذ أن τ_1 و τ_2 متكافئين و نكتب: $\tau_1 \approx \tau_2$.

نتيجة 3.2.2

الطبولوجيتين τ_1 و τ_2 غير قابلتين للمقارنة إذا كانت: $\tau_1 \not\subset \tau_2$ و $\tau_2 \not\subset \tau_1$.

أمثلة 1.2.2

1. لتكن: $E = \{a, b\}$ و $\tau_1 = \{\phi; E; \{a\}\}$ ، $\tau_2 = \{\phi; E; \{b\}\}$ طبولوجيتين على E.
ومنه لا نستطيع المقارنة بين الطبولوجيتين τ_1 و τ_2.

2. لتكن: $E = \{1, 2, 3\}$ و $\tau_1 = \{\phi; E; \{1\}; \{1, 2\}\}$ ، $\tau_2 = \{\phi; E; \{1\}\}$ طبولوجيتين على E.
بما أن $(\tau_2 \subset \tau_1)$ فإن: $(\tau_2$ أكثر دقة من $\tau_1)$

ملاحظة : حتى تكون الطبولوجيا τ_2 أدق من الطبولوجيا τ_1 يكفي و يلزم أن يكون كل مغلق في τ_1 هو مغلق في τ_2.

2.3 أساس طبولوجيا

تعريف 1.3.2

(E,τ) فضاء طبولوجي، و لتكن $\beta \subset P(E)$.
نقول عن β أنها أساس للطبولوجيا τ إذا كان كل عنصر من τ يكتب من الشكل إتحاد لعناصر من β.

$$\forall U \in \tau, \exists (V_i)_{i\in I}\ ,\ V_i \in \beta / U = \bigcup_{i\in I} V_i$$

أمثلة 1.3.2

1. في الفضاء الكيفي (E,τ) و المجموعة $\beta = \{\{n\}, n \in E\}$ هي أساس للطبولوجيا τ لأن:

$$\forall U \in \tau, U = \bigcup_{n\in U}\{n\}$$

2. لتكن: $E = \{a,b,c\}$ و $\tau = \{\phi; E; \{a\}; \{c\}; \{a,c\}\}$ طبولوجية على E.
ومنه $\beta = \{\{a\}; \{c\}\}$، تشكل أساسا للطبولوجيا τ.

3. في المجموعة $\mathbb{R}$ مزودة بالطبولوجيا الاعتيادية τ مجموعة المجالات المفتوحة.
ومنه $\beta = \{(]a,b[)_{a,b\in\mathbb{R}}\}$، تشكل أساسا للطبولوجيا τ.

تعريف 2.3.2

نسمي الطبولوجيا الإعتدادية ل $\mathbb{R}$ العائلة المؤلفة من أجزائها المفتوحة.
وبعبارة أخرى الطبولوجيا الإعتيادية ل $\mathbb{R}$ هي العائلة الجزئية من $P(\mathbb{R})$ المؤلفة من المجموعة الخالية و كذا جميع إتحادات المجالات المفتوحة.
نرمز لهذه الطبولوجيا ب $|.|$ يدعى الزوج $(\mathbb{R},|.|)$ بالفضاء الطبولوجي الإعتيادي.

مبرهنة 2.3.1

إن كان كل أساس β لفضاء E متمتع بالميزتين التاليتين:

1. كل نقطة x من E تنتمي على الأقل الى عنصر من Ω من β.
2. إذا كان x عنصرا منتهيا الى تقاطع جزئين Ω_1 و Ω_2 من β فإنه يوجد عندئذ جزء Ω_3 من β حيث: $x \in \Omega_3 \subset \Omega_1 \subset \Omega_2$.

البرهان

1. ليكن β أساس ل E إذا:
$$\forall x \in E, \exists A \subset E, x \in A$$
ولدينا:
$$A = \bigcup_{U_i \in \beta} U_i \implies x \in \bigcup_{U_i \in \beta} U_i$$
$$\implies \exists U_{i_0} \subset \bigcup_{U_i \in \beta} U_i / x \in U_{i_0} = \Omega$$
2. لدينا: $\Omega_1 \bigcap \Omega_2$ مفتوح من β إذا فهو مفتوح من E.
$\exists (U_i)_{i \in I} \subset \beta / \Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \bigcup U_i$
ومنه:
$$x \in \Omega_3 = \bigcup_{U_i \in \beta} U_i.$$

2.4 الطبولوجيا المولدة

تعريف 1.4.2

$\underset{a \subset P(E)}{a}$ جملة أجزاء من E غير خالية توجد عندئذ طبولوجية أصغرية (أقل رفقة) على E تحوي a
تسمى هذه الطبولوجيا المولدة ب a
$$a \subset P(E), \forall U \in a, U \in \tau$$

مبرهنة 2.4.1

1. (τ_i) جملة طبولوجيات على E فان $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ طبولوجيات على E، وهي الأقل دقة منهم.
2. عموما اتحاد طبولوجيات ليس دائما طبولوجيا.

البرهان

من الواضح أن τ تضم E, ϕ ومن جهة أخرى لدينا: $(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})$
τ_i مستقرة بالنسبة الإتحاد و التقاطع إذا يبقى محقق بالنسبة ل τ
وهو واضح كونها أقل رفقة حيث أنها محتواة في كل τ_i

مثال 1.4.2

$$E = \{a, b, c\}$$

لتكن τ_2 , τ_1 طبولوجيتين من E:

$\tau_1 = \{\phi; E; \{a\}\}$

$\tau_2 = \{\phi; E; \{b\}\}$

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\phi; E; \{a\}; \{c\}; \{a, c\}\}$$

ومنه $\tau_1 \cup \tau_2$ ليست طبولوجيا من E.

مبرهنة 2.4.2

a جملة أجزاء من E $(a \in P(E))$ الطبولوجية τ_G المولدة من طرف a هي تقاطع كل الطبولوجيات τ_i على E التي تحتوي على a.

$$\tau_G = \bigcap_{a \in \tau_i} \tau_i$$

البرهان

τ_G الطبولوجيا الأقل رفعة التي تحتوي على a

$$a \subset \tau_G, \forall\, i \in I, \tau_G \in \tau_i$$

2.5 الجملة الأساسية للجوارات

تعريف 1.5.2

(E, τ) فضاء طبولوجي و x نقطة منه ، نقول عن عائلة B من $V(x)$ مجموعة جوارات x أنها جملة أساسية لجوارات x إذا كان كل جوار V من $V(x)$ يوجد β من $B(x)$ حيث $x \in \beta \subset V$

$$\forall V \in V(x), \exists \beta \in B \quad / \quad x \in \beta \subset V$$

أمثلة 1.5.2

1. $V(x)$ هي في حد ذاتها جملة أساسية لجوارات x

2. إذا أخذنا $(E,\tau)=(\mathbb{R},|.|)$ وجدنا أن العائلة

$$\beta(x)=\{(]x-\frac{1}{k},x+\frac{1}{k}[)_{k\in\mathbb{N}}\}$$

تشكل جملة أساسية قابلة للعد لجوارات x و بالفعل، أيا كان الجوار V ل x يوجد (تعريف) عدد حقيقي $r_x>0$ بحيث:

$$]x-r_x,x+r_x[\subset V$$

للحصول على الإحتواء:

$$]x-\frac{1}{k},x+\frac{1}{k}[\subset]x-r_x,x+r_x[$$

يكفي أخذ $(k\geqslant\frac{1}{r_x})$

2.6 الطبولوجيا الإبتدائية

تعريف 1.6.2

E مجموعة كيفية، (F,τ) فضاء طبولوجي.
f تطبيق من E نحو F، نسمي الطبولوجيا الإبتدائية على E هي الطبولوجيا الأقل رفقة على E و التي تجعل f مستمرا، و يرمز لها بالرمز τ_f.

2.7 طبولوجيا الجداء

تعريف 1.7.2

1. (E_1,τ_1) , (E_2,τ_2) فضاءان طبولوجيان $E=E_1\times E_2$ (الجداءالكارتيزي) طبولوجيا الجداء على $E=E_1\times E_2$ هي:

$$\forall U\in\tau_E, U=\bigcup_{i\in I}U_1'\times U_2'$$

بحيث U_1' و U_2' عنصرين من τ_1 و τ_2 على التوالي.

2. $(E_i,\tau_i)_{i=1}^n$ فضاءات طبولوجية، التطبيق:

$$P_i:\Pi E_i\longrightarrow E_i$$

الإسقاط النموذجي ذو الدلالة i.

مبرهنة 2.7.1

$(E_i,\tau_i)_{i=1}^n$ فضاءات طبولوجية، الطبولوجيا الجداء على $\cap E=\Pi_{i=1}^n E_i$ هي الطبولوجية الإبتدائية التي تجعل الإسقاطات p_i مستمرة.

2.8 الطبولوجيا النهائية

تعريف 1.8.2

(E,τ) فضاء طبولوجي، F مجموعة، و f تطبيق من E نحو F.
نسمي الطبولوجية النهائية على F هي الطبولوجية الأكثر رفقة التي تجعل التطبيق f مستمر، ويرمز لها بالرمز τ_f'.

مبرهنة 2.8.1

f: تطبيق بحيث

$$f:(E,\tau)\longrightarrow F$$

الطبولوجيا النهائية على F هي الطبولوجيا المعرفة ب:

$$\tau_f'=\{U\subset F/f^{-1}(U)\in\tau\}$$

البرهان

نبرهن أن τ'_f طبولوجيا:
لدينا:

$$\tau'_f = \{U \subset F / f^{-1}(U) \in \tau\}$$

1. $f^{-1}(F) = E \in \tau'_f \wedge f^{-1}(\phi) = \phi \in \tau'_f$ و منه $E, \phi \in \tau'_f$

2. $(U_i)_{i\in I} \in \tau'_f \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau'_f$ لدينا:

$$\begin{aligned} U_i \in \tau'_f &\Longleftrightarrow f^{-1}(U_i) \in \tau \\ &\Longrightarrow \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i) \\ &\Longleftrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau'_f \end{aligned}$$

3. $U_i \in \tau'_f \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau'_f$ لدينا:

$$\begin{aligned} U_i \in \tau'_f &\Longleftrightarrow f^{-1}(U_i) \in \tau \\ &\Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} U_i) \\ &\Longleftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau'_f \end{aligned}$$

-τ'_f تجعل التطبيق f مستمر.
لتكن τ''_f طبولوجيا على F تجعل f مستمرا حيث τ''_f نهائية
إذن: $\tau'_f \subset \tau''_f$
برهان أن: $\tau''_f \subset \tau'_f$

$$U \in \tau''_f \Longrightarrow f^{-1}(U) \in \tau \Longrightarrow U \in \tau'_f$$

إذن:

$$\tau''_f \subset \tau'_f$$

و منه

$$\tau'_f = \tau''_f$$

تعريف 2.8.2

$(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ فضاءات طبولوجية F مجموعة و f_i تطبيق من E_i نحو F الطبولوجية النهائية المرفقة لجملة التطبيقات f_i هي الطبولوجية الأكثر رفقة التي تجعل التطبيقات f_i مستمرة و هي:

$$\tau'(_{f_i})_{i\in I}=\bigcap \tau'_{f_i}$$

2.9 الطبولوجيا حاصل القسمة

تعريف 1.9.2

(E,τ) فضاء طبولوجي، $\mathfrak{R}$ علاقة تكافؤ على E، $E/_{\mathfrak{R}}$ هي مجموعة أصناف التكافؤ (مجموعة حاصل القسمة)، نعرف طبولوجيا على $E/_{\mathfrak{R}}$ هي الطبولوجيا النهائية التي تجعل العنصر النموذجي p من E نحو $E/_{\mathfrak{R}}$ مستمر أي:

$$p:(E,\tau)\longrightarrow(E/_{\mathfrak{R}},\tau_p)$$

$$\tau_p=\tau_{E/_{\mathfrak{R}}}=\{U\subset E/_{\mathfrak{R}}/p^{-1}(U)\subset\tau\}$$

لدينا

$$p:E\longrightarrow E/_{\mathfrak{R}}$$

$$x\longrightarrow x$$

$$\forall x,y\in x=y\Longleftrightarrow x\mathfrak{R}y$$

U جوار ل x من $E/_{\mathfrak{R}}$ $\Longleftrightarrow \exists V\in\tau_{E/_{\mathfrak{R}}}/x\in V\subset U$

$\{x\}\subset V\subset U\Longrightarrow p^{-1}(\{x\})\subset P^{-1}(V)\subset p^{-1}(U)$

إذن $p^{-1}(U)$ جوار ل $p^{-1}(\{x\})$

2.10 الفضاءات الطبولوجية المنفصلة

تعريف 1.10.2

نقول أن الفضاء الطبولوجي (E,τ) : T_0 منفصل كالمروف إذا و فقط إذا:

$$\forall\,(x,y)\in E^2: x\neq y \qquad \exists\,V_x\in V(x)\ \vee\ \exists\,V_y\in V(y)\,/\,x\notin V_y\ \ \vee\ y\notin V_x$$

أمثلة 1.10.2

1. (E,τ_g) $(\tau_g=\{\phi,E\})$ ليست T_0 منفصل.

$$\forall (x,y)\in E^2 : x\neq y \qquad \forall V_x=E=V_y$$

2. (E,τ_d) $(\tau_d=p(E))$: T_0 منفصل.

$$\forall (x,y)\in E^2 : x\neq y \qquad \exists\ V_x=\{x\}\ \ y\notin V_x$$

تعريف 2.10.2

نقول أن (E,τ) : T_1 منفصل مقبول إذا و فقط إذا:

$$\forall (x,y)\in E^2 : x\neq y \qquad \exists\ V_x\ \wedge\ \exists\ V_y\ /\ x\in V_x\ \wedge\ y\notin V_x$$

أمثلة 2.10.2

1. (E,τ_g) ليس T_1 منفصل.
2. (E,τ_d) : T_1 منفصل بحيث:

$$\exists V_x=\{x\}\cap V_y=\{y\}\ /\ x\notin V_y\cap y\notin V_x$$

تعريف 3.10.2

نقول أن (E,τ) : T_2 منفصل (منفصل فقط) إذا و فقط إذا:

$$\forall(x,y)\in E^2 : x\neq y\quad \exists V(x)\wedge\exists V(y)/V(x)\cap V(y)=\phi$$

أمثلة 3.10.2

1. (E,τ_g) ليست T_2 منفصل.
2. (E,τ_d) : T_2 منفصل.

3. τ طبولوجيا على E حيث:

$$E=\{a;b;c\} \quad \tau=\{\phi;E;\{a\};\{b\};\{a,b\}\}$$

$$V(c)=\{\{a\};\{a,b\};\{a,c\};E\} \quad V(b)=\{\{b\};\{a,b\};\{b,c\}\} \quad V(c)=E$$

$$V\in V(a)\Longleftrightarrow \exists u\in\tau : a\in u\in V$$

$$\forall(x,y)\in E^2 : x\neq y \quad x=c/y=a\wedge b \text{ غير محقق}$$

ومنه(E,τ) ليس T_2 منفصل.

تعريف 4.10.2

نقول أن (E,τ) : T_3 منفصل نظامي إذا و فقط إذا:
1. (E,τ) : T_2 منفصل.
2. $\forall F\ (F \text{ مغلق من } E), \forall x\in E, \exists V_x\in V(x), \exists V_F\ (V_F \text{ جوار لـ } F)/V_x\cap V_F=\phi$

أمثلة 4.10.2

1. (E,τ_g) ليس T_3 منفصل لأنه ليس T_2 منفصل.
2. (E,τ_d) : T_2 منفصل ولدينا:

$$\forall F\left(\text{مغلق}\right)\subset E/x\notin F, \forall x\in E, \exists V_x, \exists V_F/V_x\cap V_F=\phi$$

$$\forall x\notin F, x\in F^C \text{ مفتوح } F^C\cap F=\phi$$

تعريف 5.10.2

نقول أن (E,τ) : T_4 منفصل إذا و فقط إذا:
1. (E,τ) : T_2 منفصل.
2. $\forall F_1,F_2\ \left(\text{مغلقان}\right)\ \exists V_{F_1}, \exists V_{F_2}/V_{F_1}\cap V_{F_2}=\phi$

مبرهنة 2.10.1

$(x_n)_n$ متتالية من (E,τ) إذا كانت $(x_n)_n$ متقاربة و (E,τ) : T_2 منفصل فإن نهايتها وحيدة.

ملاحظة : -(E,τ) ليس T_2 منفصل فعلى العموم نهاية متتالية متقاربة ليست وحيدة.
-المتتالية الثابتة هي المتتالية المتقاربة في كل فضاء طبولوجي و نهايتها وحيدة.

البرهان

لنفرض أن $(x_n)_n$ متتالية من (E,τ) : T_2 منفصل متقاربة نحو a و b

$$\begin{aligned}
\lim x_n = a &\iff \forall V_1 \in V(a), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, n > n_1 &\implies x_n \subset V_1\\
\lim x_n = b &\iff \forall V_2 \in V(b), \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n, n > n_2 &\implies x_n \subset V_2\\
& n_2 = max(n_0; n_1)
\end{aligned}$$

$$\forall V_1 \in V(a), \forall V_2 \in V(b), \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_2 \Longrightarrow x_n \in V_1 \cap V_2$$

أي $V_1 \cap V_2 \neq \phi$ وهذا تناقض كون (E,τ) : T_2 منفصل.

تعريف 6.10.2

نقول أن الفضاء الطبولوجي (E,τ) قابل للفصل إذا و فقط إذا وجد جزء A من E غير خال و قابل للعد و كثيف في E.

$$(E,\tau)\text{قابل للفصل} \Longleftrightarrow A\text{قابل للعد} \wedge \exists A \subset E, A \neq \phi, \overline{A} = E$$

2.11 تمارين مقترحة

التمرين الأول

لتكن لمجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$ و نعتبر τ مجموعة أجزاء من X معرفة بـ:

$$\tau=\{\phi,E,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,e\},\{a,b,c,d\}\}$$

1- بين أن (X,τ) فضاء طبولوجي.
2- لتكن $A=\{a,c,e\}$ أوجد الطبولوجيا الناتجة عن A.
3- أوجد مفتوح (مغلق) من الفضاء الجزئي A بحيث لا يكون مفتوح من الفضاء X .
4- إذا كان (X,τ) فضاء منقطع بين أن كل فضاء جزئي منه منقطع.
5- إذا كان (X,τ) فضاء واسع بين أن كل فضاء جزئي منه واسع.

التمرين الثاني

$\mathbb{Z}$ مزودة بالجملة $\tau=\{\phi\}\cup\{n\mathbb{Z}\}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. هل $(\mathbb{Z},\tau)$ فضاء طبولوجي.

التمرين الثالث

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي A و B جزئين من X، بحيث: $\tau=\{\phi,X,A,B\}$
1- ماهي الشروط التي يلزم أن يحققها A و B.
2- ماذا يمكن القول عن طبولوجيا تتطابق فيها الطبولوجيتين الخشنة و المتقطعة.

التمرين الرابع

لتكن لمجموعة $E=\{a,b,c,d\}$ و نعتبر τ مجموعة أجزاء من E معرفة بـ:

$$\tau=\{\phi,E,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{d,c\},\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$$

1- بين أن (E,τ) فضاء طبولوجي. 2- عين المفتوحات، المغلقات. 3- أوجد جوارات a.

الفصل الثالث

الفضاءات المتراصة

تمهيد

نتطرق في هذا المحور إلى نوع خاص من الفضاءات الطبولوجية و هي الفضاءات المتراصة حيث تعتبر خاصية التراص من الاساسيات في دراسة الفضاءات و كمثال لذلك ترصيص مجموعة الأعداد الحقيقة.
.

3.1 الفضاءات المتراصة

تعريف 1.1.3

$(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ جملة مفتوحات من (E,τ) تسمى تغطية ل E إذا وفقط إذا:

$(U_\alpha) \Longleftrightarrow E=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ تغطية مفتوحة

A جزء من E: $U_\alpha \Longleftrightarrow A\subset\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ تغطية ل A

تعريف 2.1.3

نقول أن الفضاء الطبولوجي (E,τ) فضاء متراص إذا وفقط إذا:

1. $(E,\tau): T_2$ منفصل.
2. من كل تغطية مفتوحة ل E نستطيع استخراج تغطية منتهية.

$$E=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha;\exists\ \alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n/E=\bigcup_{i=0}^{n}U_{\alpha_i}$$

يسمى الشرط الثاني مسلمة بوريل-لوبيق.

أمثلة 1.1.3

1. الفضاء الإعتيادي $(\mathbb{R},|.|)$ ليس متراص لأن الشرط الثاني غير محقق: $(]-n,n[)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(]a,+\infty[)_{a\in\mathbb{R}}$ و $(]-\infty,a[)_{a\in\mathbb{R}}$ تؤلف تغطيات مفتوحة له دون أن يكون ممكن استخراج تغطية منتهية منها.
2. $(\mathbb{R},P(\mathbb{R}))$ غير متراص لنفس السبب فإذا ما إعتبرنا عائلة وحيدات العناصر من $\mathbb{R}$ $(\{x\})_{x\in\mathbb{R}}$ وجدنها تشكل تغطية ل $\mathbb{R}$ يتعذر استخراج تغطية منتهية منها ل $\mathbb{R}$.
بصفة عامة: يكون فضاء طبولوجي إنقطاعي متراص إذا كان منتهي.
3. كل فضاء منتهي متراص شريطة أن يكون T_2 منفصل.

تعريف 3.1.3

نقول عن فضاء (E,τ) أنه متراص إذا كان منفصلا و محققا الشرط:
من كل عائلة مغلقات $(F_i)_{i\in I}$ ذات التقاطع الخالي يمكن استخراج عائلة منتهية تقاطعها خالي.

تعريف 4.1.3

(E,τ) فضاء طبولوجي T_2 منفصل، A جزء من E نقول أن A متراص إذا كان الفضاء الطبولوجي الجزئي (A,τ_A) متراص.
الطبولوجيا الناتجة:

$$\tau_A=\{V\subset E/\ \ \exists\, U\in\tau/V=U\cap A\}=V=\{U\cap A/U\subset\tau\}$$

ملاحظة : A جزء من $(E,\tau): T_2$ منفصل إذا $(A,\tau_E): T_2$ منفصل.
$(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ تغطية مفتوحة من (E,τ_A) $\qquad A=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$

$$V_\alpha=U_\alpha\cap A, A=\bigcup_{\alpha\in I}(U_\alpha\cap A)=(A=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha)\cap A\subset A=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$$

ملاحظة : لنبين جزء A من E متراص يكفي أخذ تغطية مفتوحة من E بحيث: $A\subset E$ و $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ من E
و $A\subset A=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ ونبين أن: $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}$

مبرهنة 3.1.1

هاين-بورال-لوباق
كل مجال مغلق من $\mathbb{R}$ مزود بالطبولوجيا الإعتيادية متراص $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

البرهان

$([a,b],\tau_{[a,b]})$ فضاء طبولوجي T_2 منفصل
لتكن $(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ جملة مفتوحات التي تغطي $[a,b]$ أي: $[a,b]=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$
$A=\{x\in[a,b]\ \ /\ \ V_\alpha=[x,b]$ مغطى بعدد منتهي من الفتوحات$\}$

مبرهنة 3.1.2

(E,τ) و (F,τ_F) فضاءان طبولوجيان، إذا كان f من E نحو F متشاكل و (E,τ) متراص فإن: (F,τ_F) متراص.

البرهان

اثبات أن: (F,τ_F) متراص $\Longleftrightarrow$ $(F,\tau_F): T_2$ منفصل

أ. اثبات أن: $(F,\tau_F): T_2$ منفصل $\Longrightarrow$ (F,τ_F) متراص

لدينا:

$$\forall (U_i)_{i\in I}, U_i \in \tau_F, \exists\, i_1, i_2, ..., i_n \in I / F = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

و (E,τ) منفصل أي:

$$\forall (x,y) \in E^2, x \neq y, \exists\, V_x \in \tau_E, \exists\, V_y \in \tau_E / V_x \cap V_y = \phi$$

f تقابلي:

$$x \neq y \Longrightarrow f(x) = f(y), \exists W_{f(x)} = f(V_x) \in \tau_F, \exists W_{f(y)} = f(V_y) \in \tau_F$$

حيث:

$$f(V_x) \cap f(V_y) = f(V_x \cap V_y) = \phi$$

ومنه: $(F,\tau_F): T_2$ منفصل.

ب. اثبات أن: (F,τ_F) متراص $\Longrightarrow$ $(F,\tau_F): T_2$ منفصل

لتكن $(U_i)_{i\in I}$ تغطية مفتوحة ل F أي: $F = \bigcup_{i\in I} U_i$

$$E = f^{-1}(F) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$$

$f^{-1}(U_i)$ مفتوح من E إذا f مستمر و $f^{-1}(U_i)$ تكون تغطية ل E متراص إذا نستطيع استخراج تغطية جزئية منتهية ل E.

$$\exists\, i_1, i_2, ..., i_n / E = \bigcup_{j=1} f^{-1}(U_{i_j}) = f^{-1}(F)$$

أي:

$$F = f \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^{n} f\left(f^{-1}(U_{i_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$$

ومنه: (F,τ_F) متراص.

مبرهنة 3.1.3

في فضاء طبولوجي متراص كل تقاطع لمتتالية مغلقات غير خالية و متناقصة هو غير خالي

$$\forall (F_i)_{i\in\mathbb{N}}; F_i \neq \phi; F_{i+1} \subset F_i \Longrightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \phi$$

البرهان

نفرض أن: E متراص و $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i = \phi$

لدينا:

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i = \phi \Longleftrightarrow \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i\right)^c = E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i^c$$

إذا : $(F_i^c)_{i\in\mathbb{N}}$ هي عبارة عن تغطية ل E.
و بما أن E متراص إذا يمكن استخراج تغطية جزئية ل E

$$\exists\, i_1, i_2, ..., i_n / E = \bigcup_{j=1}^{n} F_{i_j}^c \Longrightarrow \exists\, j_0 \in \{1,2,...,n\}; \bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = \phi$$

أي: $\exists\, j_0 \in \{1,2,...,n\}; F_{j_0} = \phi$ وهذا تناقض.
إذا: $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \phi$

مثال 1.1.3

$F_{i+1} \subset F_i$ متتالية متناقصة $F_n = [n, +\infty[\subset \mathbb{R}$
نجد: $\bigcap_{n\geqslant 0} F_n = \phi$ لأنّ: $\mathbb{R}$ غير متراص.

مبرهنة 3.1.4

$(E,\tau): T_2$ منفصل، A جزء من E، إذا كان A متراص فإنه مغلق.
(E,τ) منفصل، $A \subset E$، A متراص $\Longrightarrow A$ مغلق

البرهان

اثبات أنّ: A مغلق $\Longleftrightarrow A^c$ مفتوح
علينا أن نبرهن أنّ:
$\forall x \in A^c, \exists\, V \in V(x), x \in V \subset A^c$
أي:

$$x \in A^c, t \in A \Longrightarrow x \neq E \Longleftrightarrow \exists\, V_x \subset V(x), \exists\, W_t \subset V(t) / V_x \bigcap W_t = \phi$$

و بما أنّ (E,τ) منفصل فإن $V_x \subset \tau$ و $W_t \subset \tau$
إذا: $A \subset \bigcup_{t\in A} W_t$
أي $(W_t)_{t\in A}$ تغطية مفتوحة ل A متراص إذا نستطيع استخراج تغطية منتهية

$$\exists\, t_1, t_2, ..., t_n \in A / A \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{t_i}^c \subset A^c (A \subset B \Longrightarrow B^c \subset A^c)$$

أي:

$$x \in A^c, t_1 \in A, x \neq t_1; \exists\, V_x^1 \in V(x), \exists\, W_{t_1} \in V(t) / V_x^1 \cap W_{t_1} = \phi$$

.
.
.

$$x \in A^c, t_n \in A, x \neq t_n; \exists\, V_x^n \in V(x), \exists\, W_{t_n} \in V(t) / V_x^n \cap W_{t_n} = \phi$$

إذا:

$$V_x^i \cap W_{t_i} = \phi \Longrightarrow V_x^i \subset W_{t_i}^c$$

أي:

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_x^i \subset \bigcap_{i=1}^{n} W_{t_i}^c \subset A^c$$

ومنه: $\exists V = \bigcap_{i=1}^{n} V_x^i \in V(x) / V \subset A^c$

مبرهنة 3.1.5

(E, τ) فضاء متراص T_2 منفصل، إذا وفقط إذا من كل تقاطع لجملة مغلوقات (F_i) خال نستطيع استخراج عدد منته من هذه المغلقات تقاطعها خالي:

$$(E,\tau) \text{ متراص} \Longleftrightarrow \forall (F_i)_{i\in I}, \bigcap F_i = \phi \Longleftrightarrow \exists i_1, i_2, ..., i_n \in I / \bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = \phi$$

حيث: F_i مغلق و منفصل من E

البرهان

اثبات أن:

$$(E,\tau) \text{ متراص} \Longleftrightarrow \forall (F_i)_{i\in I}, \bigcap F_i = \phi \Longleftrightarrow \exists i_1, i_2, ..., i_n \in I / \bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = \phi$$

حيث F_i مغلق منفصل من E

لدينا:

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \phi \Longleftrightarrow \bigcup_{i\in I} F_i^c = E$$

إذا:

$$E \text{ متراص} \Longleftrightarrow \exists i_1, i_2, ..., i_n, E = \bigcup_{j=1}^{n} F_{i_j}^c$$

بالمرور إلى المتممة نجد: $\bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = 0$

مبرهنة 3.1.6

كل جزء مغلق من متراص فهو متراص

$$A \text{ متراص} \Longrightarrow A \text{ مغلق (متراص) } \forall A \subset E$$

البرهان

لدينا: A : T_2 منفصل كل جزء من T_2 منفصل فهو T_2 منفصل

لتكن $(V_i)_{i\in I}$ جملة مفتوحات من E $/A=\bigcup_{i\in I} V_i$

$$E=A\bigcup A^c\subset\bigcup_{i\in I} V_i\cup A^c\Longrightarrow E=\bigcup_{i\in I} V_i\cup A^c$$

بماأن E متراص نستطيع استخراج تغطية منتهية لـ E

$$E=\bigcup_{i\in I} V_i\cup A^c\Longrightarrow \exists i_1,i_2,\dots,i_n/E=\bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}\cup A^c$$

ومنه:

$$A\subset E\Longrightarrow A\subset\bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}\cup A^c\Longrightarrow A\subset\bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}$$

مبرهنة 3.1.7

لدينا: (E,τ) : T_2 منفصل

1. كل اتحاد منته لمتراصات فهو متراص.
2. كل تقاطع لمتراصات فهو متراص.

ملاحظة : اتحاد كيفي لمتراصات ليس دوما متراص.

مثال 2.1.3

$[-a,a]$ متراص من $(\mathbb{R},\tau_a)$ حيث $a>0$ ، $\bigcup_{a\in\mathbb{R}}[-a,a]=\mathbb{R}$ غير متراص.

البرهان

1. اثبات أن كل اتحاد منته لمتراصات فهو متراص:

$(C_i)_{i=1}^{n}$ متراصات من (E,τ) $\Longleftarrow$ $C=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ متراص

C مزود بالطبولوجيا الناتجة منفصل.

لتكن $(V_i)_{i\in I}$ تغطية مفتوحات من E لـ C أي: $C=\bigcup_{i\in I} V_i$

لنبين أن:

$$\exists\ V_{i_1},V_{i_2},\dots,V_{i_n}/C\subset\bigcup_{j=0}^{n} V_{i_j}$$

(C_i متراص) $\quad C=\bigcup_{i=1}^{n}C_i\subset\bigcup_{k\in I}V_k, \forall i\in\{1,2,...,n\}C_i\subset\bigcup_{k=1}V_k$

نستطيع استخراج تغطية منتهية من $(V_k)_{k\in I}$ ل C_1

$$\exists\ V_{k_1},V_{k_2},...,V_{k_m}\ \subset(V_k)_{k\in I}/\forall i\in\{1,2,...,n\}C_i=\bigcup_{j=1}^{m}V_{k_j}$$

ومنه:

$$C=\bigcup_{i=1}^{n}C_i\subset\bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcup_{j=1}^{m}V_{k_j}\right)$$

2. اثبات أن كل تقاطع لمتراصات فهو متراص:

لدينا:

$(C_i)_{i\in I}$ جملة متراصات من E و C_i متراص من $T_2(E,\tau)$ منفصل فهو مغلق.

إذا:

$\bigcap_{i\in I}C_i$ التقاطع الكيفي لمغلقات فهو مغلق $C=\bigcap_{i\in I}C_i\subset C_j, \forall j\in I$

إذا:

C مغلق من متراص.

و منه:

C متراص.

توطئة

1. (E,τ_E) فضاء طبولوجي، (F,τ_F) منفصل إذا كان f من E نحو F مستمر لدينا:
A متراص من $E \Longrightarrow f(A)$ متراص من F
2. (E,τ_E) و (F,τ_F) منفصلان، إذا كان f ثنائي الإستمرارية و كان A مغلق لدينا:
$f(A)$ متراص من $F \Longrightarrow A$ متراص من E

البرهان

1. لتكن $(V_i)_{i\in I}$ تغطية مفتوحات من F ل $f(A)$ أي $f(A)\subset\bigcup_{i\in I}V_i$

$$f(A)\subset\bigcup_{i\in I}V_i\Longrightarrow f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}V_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(V_i)$$

أي:

$$A\subset f^{-1}(f(A))\subset\bigcup_{i\in I}f^{-1}(V_i)$$

f مستمر إذا $f^{-1}(V_i)$ تغطية ل A متراص نستطيع استخراج تغطية منتهية

$$A\subset\bigcup_{j=1}^{n}f^{-1}(V_i)\Longrightarrow f(A)\subset f\left(\bigcup_{j=1}^{n}f^{-1}(V_{i_j})\right)\subset\bigcup_{j=1}^{n}f(f^{-1}(V_{i_j}))$$

ومنه: $f(A)\subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}$
ولدينا كل جزء من منفصل فهو منفصل
(F,τ_F) منفصل فإن $f(A)$ مزود بالطبولوجيا الناتجة منفصل
إذا: $f(A)$ متراص

2. (E,τ_E) منفصل فإن (A,τ_A) منفصل
لتكن $(V_i)_{i\in I}$ تغطية مفتوحات من E ل A أي $A\subset \bigcup_{i\in I} U_i$
بماأن f و f^{-1} مستمرين فإن f مفتوح

$$f(A)\subset f(\bigcup_{i\in I} U_i)=\bigcup_{i\in I} f(U_i)$$

$f(U_i)$ تكون تغطية مفتوحة ل $f(A)$ لأن f^{-1} مستمر و $f(A)$ متراص، نستطيع استخراج تغطية منتهية ل $f(A)$

$$f(A)\subset \bigcup_{j=1}^{n} f(U_{i_j}) \Longrightarrow f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{n} f(U_{i_j})\right)\subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$$

مبرهنة 3.1.8

(E,τ_E) متراص، (F,τ_F) منفصل ، كل تطبيق f تقابلي من E نحو F مستمر فهو مستشا كل.

البرهان

:
اثبات أن:

$$\begin{cases} f: E\longrightarrow E \quad \text{مستمر و تقابلي} \\ E\text{متراص و} F \text{ منفصل} \end{cases} \Longrightarrow f\text{مستشا كل}$$

لدينا:
f^{-1}مستمر $\Longleftrightarrow$ fمغلق
أي نبين أنه مغلق:
ليكن U مغلق من E إذا U متراص.
f مستمر $\Longleftarrow$ $f(x)$ متراص (من فضاء منفصل) إذا $f(x)$ مغلق.
و منه: f مغلق.

مبرهنة 3.1.9

إذا كان f تطبيق مستمر على فضاء طبولوجي E متراص نحو $\mathbb{R}$ فإنه يدرك على الأقل مرة واحدة قيمة قصوى.

$$\exists x_1 \in E / \sup_{x \in E} f(x) = f(x_1), \quad \exists x_2 \in E / \inf_{x \in E} f(x) = f(x_2)$$

تعريف 5.1.3

(E, τ) فضاء طبولوجي منفصل، A جزء من E أصله (card) لا نهائي، النقطة x من E تسمى نقطة تراكم ل A.
إذا كان كل جوار V_x ل x يحتوي على عدد لا نهائي من عناصر A.

مبرهنة 3.1.10

(بولزانر فايشترس)
(E, τ) فضاء طبولوجي متراص كل جزء A لا نهائي من E يقبل على الأقل نقطة التراكم.

البرهان

x نقطة تراكم ل $A \Longleftrightarrow V_x$ يحوي عدد لانهائي من عناصر $\forall V_x \in V(x), A$

نفرض أن:

x ليست نقطة تراكم ل $A \Longleftrightarrow V_x$ يحتوي عدد منتهي من عناصر $x \in E, \exists V_x \in V(x)$

حيث: V_X مفتوح

$$\forall x \in E, \exists V_x \subset E; E = \bigcup V_x$$

$(V_x)_{x \in F}$ تغطية ل E، نستطيع إستخراج تغطية منتهية ل E

V_{x_j} يحتوي على عدد منتهي من عناصر A، $A \subset E = \bigcup_{j=1}^{n} V_{x_j}$

و منه: $\bigcup_{j=1}^{n} V_{x_j}$ يحتوي على عدد منته من عناصر A إذا A منته و هذا تناقض.

3.2 الفضاءات المترية و التراص

توطئة

(لوباق)
(E,d) فضاء متري حيث من كل متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من E نستطيع استخراج متتالية جزئية متقاربة.
من أجل كل تغطية مفتوحة $(V_i)_{i\in I}$ ل $(E=\bigcup_{i\in I}V_i)$ يوجد عدد حقيقي موجب تماما ρ حيث كل كرة مفتوحة نصف قطرها ρ من E محتواة في الأقل في إحدى المفتوحات V_i

$$E=\bigcup_{i\in I}V_i, \exists\rho>0; B_o(x,\rho)\subset V_i$$

ρ يسمى عدد لوباق.

نظرية 3.2.1

(E,d) فضاء متري، الخصائص التالية متكافئة:
1. متراص.
2. كل متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من E تقبل على الأقل قيمة ملاصقة.
3. من كل متتالية من E نستطيع استخراج متتالية جزئية متقاربة.
4. كل جزء لا نهائي A من E يقبل نقطة تراكم.

البرهان

1. اثبات أن: $1\Longrightarrow 2$
$(x_n)_n$ متتالية من (E,d) متراص، هل $(x_n)_n$ تقبل قيمة ملاصقة ؟
نريد أن نبين أنه توجد متتالية جزئية متقاربة نحو القيمة الملاصقة ϕ.

$$A_n=\{x_i\ /\ i\geqslant n\}\ ,\ \overline{A_{n+1}}\subseteq\overline{A_n}$$

$$A_n\neq\ \Longrightarrow\ \overline{A_n}\neq\phi$$

$(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية مغلقات غير خالية متناقصة.
E متراص إذا: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\overline{A_n}\neq\phi$ حسب النظرية.

$$\exists x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\overline{A_n}\Longleftrightarrow\forall x\geqslant 1, x\in\overline{A_n}\Longleftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall B_o(x,\varepsilon)/B_o(x,\varepsilon)\cap A_n\neq\phi$$

$$\forall\varepsilon>0, B_o(x,\varepsilon)\cap A_n\neq\phi\quad\cdots(\star)$$

φ تطبيق متزايد تماما

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^*\\ & p & \longmapsto & \varphi(p)=i_p\end{array}$$

إذا:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, B_o(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \phi$$

فهي صحيحة من أجل:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, B_o(x,\varepsilon) \cap A_{n_k} \neq \phi$$

$$\begin{array}{lll} \varepsilon = 1\,, B(x,1) \cap A_{n_1} \neq \phi & \Longrightarrow & \exists x_{i_1} \in B_o(x,1) \cap A_{n_1} \\ \varepsilon = \frac{1}{2}\,, B(x,\frac{1}{2}) \cap A_{n_2} \neq \phi & \Longrightarrow & \exists x_{i_2} \in B_o(x,\frac{1}{2}) \cap A_{n_2} \\ \vdots & & \\ \varepsilon = \frac{1}{p}\,, B(x,\frac{1}{p}) \cap A_{n_p} \neq \phi & \Longrightarrow & \exists x_{i_p} \in B_o(x,\frac{1}{p}) \cap A_{n_p} \end{array}$$

$$\exists (x_{i_p})_{p\in\mathbb{N}^*} \,/\, x_{i_p} \in B_o(x,\frac{1}{p}) \cap A_{n_p}, \forall p \geqslant 1$$

إذا:

$$x_{i_p} \in B_o(x,\frac{1}{p})$$

إذا:

$$x_{i_p} \longrightarrow x \Longrightarrow (x_n)_n \text{ ملاصقة ل } x$$

2. اثبات أن: $2 \Longleftarrow 3$ (مما سبق).

3. اثبات أن: $3 \Longleftarrow 4$ (مما سبق).

4. اثبات أن: $4 \Longleftarrow 1$

هل (E,d) متراص ؟

لدينا فرضا كل جزء A لانهائي يقبل نقطة تراكم، و لدينا كل فضاء متري هو منفصل.

لتكن $(V_i)_{i\in I}$ تغطية مفتوحة من E حيث $E = \bigcup\limits_{i\in I} V_i$

حسب توطئة لوباق:

$$\forall x \in E, \exists i \in I; B_o(x,\rho) \subset V_i \cdots (\star)$$

كذلك لدينا:

$$E = \bigcup_{x\in E} B_o(x,r) \subset \bigcup_{x\in E} B_o(x,\rho) \subset \bigcup V_i = E$$

إذا المطلوب هو:

$$\exists i_1, i_2, \cdots, i_n \,/\, E = \bigcup_{u=1}^{n} V_{i_u}$$

لهذا الغرض يكفي إيجاد تغطية ل E منتهية مكونة من كرات مفتوحة مركزها x.

إذا نفرض العكس، أي نفرض أنه لا يمكننا تغطية E بعدد منته من الكرات المفتوحة.

لدينا $\rho > r > 0$ إذن من $(\star)$ نستنتج:

$$x_1 \in E \Longrightarrow \exists i_1 \in I; B_o(x_1,\rho) \subset V_{i_1} \Longrightarrow \exists B_o(x_1,r_1) \subset B_o^1(x_1,\rho) \subset V_{i_1}$$

$$x_2 \notin B_o^1(x_1,r_1); x_2 \in E; E \not\subset B_o(x_1,r_1) \;/\; E$$ ليست تغطية منتهية ل $B_o(x_1,r_1)$

$$x_2 \in E \Longrightarrow \exists i_2 \in I; B_o(x_2,\rho) \subset V_{i_2} \Longrightarrow \exists B_o(x_2,r_2) \subset B_o^2(x_2,\rho) \subset V_{i_2}$$

$$x_3 \notin B_o^2(x_2,r_2); x_3 \in E; E \not\subset B_o^2(x_2,r_2); E \not\subset B_o^1(x_1,r_1) \cup B_o^2(x_2,r_2)$$

$$x_n \in E \;/\; \forall i \neq j; d(x_i,x_j) \geqslant r = \max_{i \in I}(r_i)$$

جزء لا نهائي $A = \{x_n / n \in \mathbb{N}^*\} \quad \forall i \neq j; d(x_i,x_j) \geqslant r > 0 \cdots (\star\star)$

و منه : A يقبل نقطة تراكم و حسب النظرية توجد متتالية جزئية مستخرجة من $(x_n)_n$ متقاربة، وهذا يناقض $(\star\star)$.

مبرهنة 3.2.1

في فضاء متري (E,d) كل جزء A متراص من E فهو مغلق و محدود.

ملاحظة :
كل جزء مغلق و محدود من فضاء متري ليس متراص على العموم.

مبرهنة 3.2.2

(E,d) و (F,d) فضاءان متريان كل تطبيق مستمر f من E نحو F فهو مستمر بانتظام على E.

3.3 أنواع التراص

3.3.1 متراص نسبيا

تعريف 1.3.3

(E,τ) فضاء طبولوجي نقول أن الجزء A من E متراص نسبيا إذا كان $\bar{A}$ متراص.

3.3.2 متراص محليا

تعريف 2.3.3

(E,τ) فضاء طبولوجي نقول أن E متراص محليا إذا كان $T_2 : (E,\tau)$ منفصل و كل نقطة x من E تقبل على الأقل جوار متراص.

مثال 1.3.3

$(\mathbb{R},\tau_u)$ متراص محليا و غير متراص
$\overline{V_x}$ متراص إذا:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists V_x ; \overline{V_x} = [x-r, x+r]$$

حيث: $\overline{V_x}$ مغلق و محدود من $\mathbb{R}$.

نظرية 3.3.1

(E,d) فضاء متري، B جزء من E.
نقول أن B محدود كليا إذا كان من أجل $r>0$ نستطيع تغطيته بعدد منته من الكرات المفتوحة ذات نصف القطر r.

مبرهنة 3.3.1

كل جزء B من فضاء متري محدود كليا فهو محدود.

مبرهنة 3.3.2

1. كل فضاء متري متراص فهو محدود كليا.
2. كل فضاء متري محدود كليا فهو قابل للفصل.

مبرهنة 3.3.3

1. كل فضاء طبولوجي متراص فهو متراص محلي.
2. كل فضاء طبولوجي متراص محليا يحقق كل نقطة من E تقبل جملة أساسية لجوارات متراصة لهذه النقطة.

مبرهنة 3.3.4

1. كل جزء A مغلق من (E,τ) متراص محليا فهو متراص محليا.
2. التقاطع المنته لمتراصات محليا فهو متراص محليا.
3. اتحاد متراصات محليا غير متراص محليا على العموم.

3.4 الترصيص

تعريف 1.4.3

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي متراص محليا، الفضاء الطبولوجي المتراص $(\tilde{E},\tilde{\tau})$ يسمى ترصيص ل E إذا وجد تطبيق f حيث $f:E\longrightarrow\tilde{E}$ متباين و مستمر بحيث يكون مستتشا كل من E نحو $f(E)$ و $f(E)$ كثيف في $\tilde{E}$ ($\overline{f(E)}=\tilde{E}$).

$(\tilde{E},f)$ يسمى الترصيص.

إذا كان $f(E)=\{w\}$ مكون من نقطة واحدة هذا الترصيص يسمى Alexandroff.

3.4.1 طريقة الترصيص

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي، لتكن w نقطة لا نهائية لا تنتمي إلى E نضع $\tilde{E}=E\cup\{w\}$، لتكن $\tilde{\tau}=\{u=k/E \text{ متراص من } k\}\cup\tau$

1. $(\tilde{E},\tilde{\tau})$ فضاء طبولوجي.
2. (E,τ) فضاء طبولوجي جزئي من $(\tilde{E},\tilde{\tau})$.
3. $(\tilde{E},\tilde{\tau}):T_2$ منفصل.
4. $(\tilde{E},\tilde{\tau})$ متراص.
5. $\tilde{E}=\overline{E}$.

3.5 تمارين مقترحة

التمرين الأول

(E,τ_E) فضاء طبولوجي متراص، f تطبيق متشاكل من (E,τ_E) نحو (F,τ_F).

⋆ بين أن (F,τ_F) متراص.

التمرين الثاني

(E,τ) متراص، بين مايلي: $\forall (F_i)_{i\in\mathbb{N}} \;\; ; \;\; F_i \neq \phi \;\;\; F_{i+1}\subset F_i \Longrightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \phi$

التمرين الثالث

بين أن كل جزء A مغلق من فضاء طبولوجي متراص (E,τ_E) فهو متراص.

التمرين الرابع

(E,τ_E) متراص، (F,τ_F) منفصل بين أن كل تطبيق f تقابلي من E نحو F مستمر فهو مستتشا كل.

التمرين الخامس

1. (E,τ) فضاء طبولوجي بحيث $Card\ \tau$ منته. بين أن (E,τ) متراص.
   ⋆ استنتج أن كل فضاء طبولوجي منته (بمعنى $Card\ E$ منته) فهو متراص.
2. بين أن كل فضاء منقطع فهو متراص إذا وفقط إذا كان منته.
3. ليكن $\mathbb{R}$ مزود بالطبولوجية الإعتيادية، نضع $U_n =]n-1, n+1[$ من أجل $n\in\mathbb{Z}$.
   ⋆ بين أن $\mathbb{R}$ ليس متراص.
   ⋆ استنتج أن $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ مزودين بالطبولوجيا الناتجة ليس متراصان، لكن الفضاء الجزئي $[0,1]$ متراص من $\mathbb{R}$.

الفصل الرابع

الفضاءات المترابطة

تمهيد

ندرس من خلال هذا المحور ميزة لا تقل أهمية عن التراص ألا و هي الترابط و نظرا لأهمية الفاضاءات الطبولوجية المترابطة في جل ميادين الرياضيات تطرقنا إلى تعريف و خواص الترابط و كل ما يتعلق به في هذا المجال.

4.1 الترابط

تعريف 1.1.4

نقول أن (E,τ) فضاء طبولوجي مترابط إذا كان E و ϕ هما الوحيدين المفتوحين و المغلقين في آن واحد، أي لا توجد أي تجزئة ل E متكونة من مفتوحين (مغلقين) غير خالين من E.

أمثلة 1.1.4

1. $(\mathbb{R},\tau_u)$ مترابط لأن $]1,2[\neq\mathbb{R}$ و $]1,2[\neq\phi$.
2. (E,τ_G) مترابط.
3. (E,τ_D) حيث $E=\{x\}$ مترابط.
4. (E,τ_D) حيث $E=\{x-y\}$ غير مترابط، لأن $E=\{x\}\cup\{y\}$.
5. $(\mathbb{R}^*,\tau_u)$ غير مترابط لأن $\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ (مفتوحان).

ملاحظات

1. $CardE\geqslant 2\Longrightarrow(E,\tau_D)$ غير مترابط

2. E مترابط $\Longleftrightarrow\forall($ مفتوحان $)U,V\in E;\begin{cases}E=U\cup V\\ \wedge\\ U\cap V=\phi\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}U=\phi\\ \wedge\\ V=E\end{cases}$

معناه E لا تقبل تجزئة.

3. E غير مترابط $\Longleftrightarrow\exists($ مفتوحان $)U,V\in E;\begin{cases}E=U\cup V\\ \wedge\\ U\cap V=\phi\end{cases}\wedge\begin{cases}U\neq\phi\\ \wedge\\ V\neq E\end{cases}$

تعريف 2.1.4

(E,τ) فضاء طبولوجي، F جزء من E، نقول أن F مترابط إذا كان الفضاء الطبولوجي الجزئي (E,τ_F) مترابط، إذا لم يوجد U و V من E غير خاليين حيث:

$$A\cap V\neq\phi, A\cap U\neq\phi, A\cap U\cap V=\phi, A\subset U\cup V$$

مبرهنة 4.1.1

(E,τ) فضاء طبولوجي، $(A_i)_{i\in I}$ جملة أجزاء مترابطة من E، إذا كان $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \phi$ فإن $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ مترابط.

البرهان

نفرض أن: $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ غير مترابط.
إذا توجد تجزئة ل $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ متكونة من مفتوحين V_1 و V_2 من $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$
حيث: $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = V_1 \cap V_2$

$$\forall i\in I\,, A_i\subset\bigcup_{i\in I} A_i\,, V_1\in\tau_{\cup A_i}\ ,\ V_2\in\tau_{\cup A_i}$$

نضع:

$$(\star)\begin{cases} U_1 = A_i\cap V_1\in\tau_{A_i}\\ U_2 = A_i\cap V_2\in\tau_{A_i}\end{cases}$$

إذا:

$$U_1\cap U_2 = (A_i\cap V_1)\cap(A_i\cap V_2) = A_i\cap(V_1\cap V_2)\cap A_i = \phi$$

لأن: $V_1\cap V_2=\phi$

$$U_1\cup U_2 = (A_i\cap V_1)\cup(A_i\cap V_2) = A_i\cap(V_1\cup V_2)\cap A_i = A_i$$

لأن: $V_1\cup V_2 = \cup A_i$
بما أن A_i مترابط فإن $U_1=\phi$ أو $U_2=\phi$
المفتوحان هما A_i أو ϕ
من $(\star)$ نحصل على:

$$A_i\cap V_1=\phi\Longrightarrow A_i\subset V_1^c = V_2$$

$$A_i\cap V_2=\phi\Longrightarrow A_i\subset V_2^c = V_1$$

$$\forall i\in I, A_i\subset V_1\vee A_i\subset V_2; \exists I_1, I_2/I = I_1\cup I_2$$

$$\begin{cases} A_i\subset V_1\, si\ \ i\in I_1\\ \\ A_i\subset V_2\, si\ \ i\in I_2\end{cases}\Longrightarrow\bigcap_{i\in I} A_i = \left(\bigcap_{i\in I_1} A_i\right)\cap\left(\bigcap_{i\in I_2} A_i\right)\subset V_1\cap V_2=\phi$$

و منه : $\bigcap\limits_{i\in I} A_i=\phi$، و هذا تناقض مع $\bigcap\limits_{i\in I} A_i\neq\phi$.

مبرهنة 4.1.2

كل مجال من $\mathbb{R}$ جزء مترابط، و العكس صحيح.

أي: I جزء من $\mathbb{R}$ مترابط $\iff$ I مجالا من $\mathbb{R}$

البرهان

1. اثبات أن: I جزء من $\mathbb{R}$ مترابط $\Longrightarrow$ I مجالا من $\mathbb{R}$

ليكن $I=[a,b]$ مجالا من $\mathbb{R}$

بالتناقض نفرض أنه يوجد مفتوحان منفصلان A و B غير خاليين

بحيث $[a,b]=A\cup B$

نفرض أن $a\in A$ و نضع $c=\inf B$ حيث $c\in[a,b]$

⋆ إذا كان $c=b$ فإن $B=[b,b]=\{b\}$ مغلق (غير ممكن).

⋆ بما أن A مفتوح فإنه يوجد $\varepsilon_0>0$ بحيث $[a,a+\varepsilon_0[\subset A$

إذن $a<a+\varepsilon_0\leqslant c<b$

⋆ $c\notin A$ لأنه إذا كان $c\in A$ فإنه يوجد $r>0$ بحيث $]c-r,c+r[\subset A$

لأن A مفتوح.

حسب الخاصية المميزة للحد الأدنى يوجد على الأقل عنصر d من B

حيث $c<d\leqslant c+r$

ومنه $d\in A\cap B$ و هذا غير ممكن ، إذن : $c\notin A$

⋆ $c\notin B$ لأن B مفتوح و عليه يوجد $r'>0$ بحيث إذا كان $c\in B$

فإن $]c-r',c+r'[\subset B$

وهذا تناقض مع كون c هو $\inf B$.

إذا $c\notin[a,b]$ و هذا تناقض كون $a<c<b$

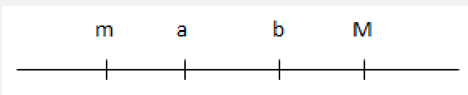
ومنه $[a,b]$ مترابط.

2. اثبات أن : I جزء من $\mathbb{R}$ مترابط $\Longleftarrow$ I مجالا من $\mathbb{R}$

أي نبين أن كل $\phi\neq A\subset\mathbb{R}$ مترابطة فإن A مجال.

1/ إذا كان $A=\{a\}$ فإن A مجال.

2/ نفرض وجود نقطتين $a\in A$ و $b\in A$ و نضع:



$m=\inf A$ و $M=\sup A$ حيث $m\geqslant-\infty$ و $M\leqslant+\infty$

نلاحظ أن: $[a,b]\subset[m,M]$

لإثبات أن $[a,b]\subset A$ يكفي أن نبين أن $[m,M]\subset A$

نفرض بالخلف أن $[m,M]\not\subset A$ أي $\exists x\in[m,M], x\notin A$

$$A=(]-\infty,x[\cap A)\cup(A\cap]x,+\infty[)$$

ليكن $y\in A$ أي $y\in[m,M]$

أي $y<x$ أو $y>x$

$$y\in]-\infty,x[\cap A \quad\vee\quad y\in A\cap]x,+\infty[$$

إذا $A\subseteq(]-\infty,x[\cap A)\cup(A\cap]x,+\infty[)$

والإحتواء العكسي بديهي.

لكن $A\cap]-\infty,x[\cap]x,+\infty[=\phi$

إذا A غير مترابط و هذا تناقض مع الفرض (A مترابط)

إذا $[m,M]\subset A$ أي $[a,b]\subset A$

ومنه A مجال.

مبرهنة 4.1.3

(E,τ) فضاء طبولوجي، A جزء من E مترابط $\Longleftarrow$ $\bar{A}$ مترابط

البرهان

نفرض أن $\bar{A}$ غير مترابط أي $\bar{A}=V_1\cup V_2/V_1\neq\phi\neq V_2$

$$V_1\in\tau_{\bar{A}},\, V_2\in\tau_{\bar{A}}/V_1\cap V_2=\phi$$

نعلم أن: $A\subset\bar{A}$

$$W_1=V_1\cap A\in\tau_A \;\wedge\; W_2=V_2\cap A\in\tau_A\Longrightarrow W_1\cap W_2=\phi$$

$$W_1\cup W_2=(A\cap V_1)\cup(A\cap V_2)=A\cap(V_1\cup V_2)=A\cap\bar{A}=A$$

تذكير:

A كثيف في E $\Longleftrightarrow \forall V\in\tau_{_E}, V\cap A\neq\phi$

A يقطع كل مفتوحات $\tau_{_E}$.

لدينا A كثيف في $\bar{A}$ و منه: $\begin{cases}W_1=V_1\cap A\neq\phi\\ W_2=V_2\cap A\neq\phi\end{cases}$

أي W_1 و W_2 تكون تجزئة مفتوحة ل A و هذا تناقض كون A مترابط، و منه $\bar{A}$ مترابط.

مبرهنة 4.1.4

(E,τ) فضاء طبولوجي، A جزء مترابط، لدينا: $\forall B/A\subset B\subset \overline{A}$ فإن B مترابط.

البرهان

لنفرض أن B جزء من E يحقق العلاقة و غير مترابط، إذا توجد مجموعتان مفتوحتان V و W بحيث:

$$\begin{cases} B\subset V\cup W \\ B\cap V\cap W=\phi \\ B\cap V\neq\phi \\ B\cap W\neq\phi \end{cases}$$

$$A\subset B \Longrightarrow \overline{A}\subset\overline{B}$$

بما أن $B\cap V\neq\phi$ فإنه توجد نقطة ملاصقة y ل A تنتمي ل $B\cap V$

$$y\in\overline{A}\subset\overline{B}\Longrightarrow \exists V\in V(y)\,/\,V\cap B\neq\phi\ :\ \text{أي}\ V\cap A\neq\phi$$

بنفس الطريقة نجد $W\cap A\neq\phi$
و لدينا:

$$A\subset V\cup W$$

$$A\cap V\cap W=\phi$$

ومنه نجد أن A ليس مترابط و هذا تناقض.

نتيجة 1.1.4

1. إذا كان A جزءا مترابطا و كثيف في E فإن E مترابط.
2. عكس هذه النتيجة غير صحيح.

ملاحظات

1. نعلم أن $\mathbb{R}=\overline{\mathbb{Q}}$ و أن $(\mathbb{R},|.|)$ مترابط في حين أن $(\mathbb{Q},|.|)$ غير مترابط.
2. يخص الداخلية لا يوجد نتيجة محددة لعلاقة الترابط حيث يمكن أن تكون الداخلية لمترابط غير مترابطة و العكس.

أمثلة 2.1.4

1. $A=\{a,b,c\}$، $\tau=\{\phi,E,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$، $E=\{a,b,c,d\}$
نلاحظ أن A مترابط، و لدينا $\mathring{A}=\{a,b\}$ ليست مترابطة.
2. الجزء $A=\{1,2,3\}\cup]4,6[$ ليس مترابط في $(\mathbb{R},|.|)$ في حين أن $\mathring{A}=]4,6[$ مترابط.

4.2 الترابط و الاستمرار

مبرهنة 4.2.1

(بولزانو)
ليكن E و F فضاءين طبولوجيين و f دالة مستمرة من E نحو F، إذا كان E مترابط كانت الصورة $f(E)$ كذلك.

البرهان

لنفرض أن:
$f(E)$ غير مترابط إذا يوجد جزء B مغلق و مفتوح و $B\neq\phi$ و $B\neq f(E)$.
و لدينا:
f مستمرة إذا $f^{-1}(B)$ يكون مفتوح و مغلق، حيث $f^{-1}(B)\neq\phi$ و $f^{-1}(B)\neq E$.
إذا:
E غير مترابط و هذا تناقض.

4.3 المركبات المترابطة

تعريف 1.3.4

(E,τ) فضاء طبولوجي، x عنصر من E، نسمي المركبة المترابطة ل x هي أكبر مترابط من E يحتوي على x، و يرمز لها ب $C(x)$ حيث:

$$C(x)=\{\bigcup A \ / \ x\in A, E \text{ مترابط من } A\}$$

4.4 الترابط بالأقواس

تعريف 1.4.4

(مسار أو قوس)

(E,τ) فضاء طبولوجي، a و b عنصرين من E و $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$، نسمي قوس أو مسار في E الذي يربط النقطة a بالنقطة b كل تطبيق γ مستمر معرف من المجال $[\alpha,\beta]$ نحو E حيث $\gamma(\alpha)=a$ و $\gamma(\beta)=b$.

تسمى النقطتين $\gamma(\alpha)$ و $\gamma(\beta)$ مبدأ أو طرف القوس.

تعريف 2.4.4

(الترابط بالأقواس)

نقول عن A من فضاء طبولوجي (E,τ) أنه مترابط بالأقواس إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

من أجل كل زوج (M,N) من نقطتين من A يوجد مسار في A مبدؤه M و طرفه N.

أمثلة 1.4.4

1. $\mathbb{Q}=\left(]-\infty,\sqrt{3}[\cap\mathbb{Q}\right)\bigcup\left(]\sqrt{3},+\infty[\cap\mathbb{Q}\right)$ ليس مترابط بالأقواس.
2. $(\mathbb{R},\tau_u)$ مترابط بالأقواس.

$$\begin{array}{rccl}\exists\,\gamma: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & \gamma(t)=(1-t)x+ty\end{array}$$

قضية 4.4.1

كل فضاء مترابط بالأقواس فهو مترابط.

البرهان

ليكن E فضاء مترابط بالأقواس و لنفرض أنه يمتع بتجزئة بمفتوحين غير خاليين Ω و $C_E\Omega$، و نبين أن هذا يوصلنا إلى تناقض.

ليكن $a\in\Omega$ و $b\in C_E\Omega$ إذا يوجد مسار f حيث $f(0)=b$ و $f(1)=a$.

لنضع $F=f([0,1])$، نلاحظ أن $F\cap\Omega$ و $F\cap C_E\Omega$ مفتوحين غير خاليين في F أي أنهما يشكلان تجزئة مفتوحة ل F، لكن ذلك غير ممكن إذ أن F مترابط.

و منه: E مترابط.

ملاحظة :

1. عكس النظرية غير صحيح.
2. الترابط بالأقواس ليس صفة وراثية.

4.5 الفضاءات المترابطة محليا

تعريف 1.5.4

نقول أن الفضاء الطبولوجي (E,τ) مترابط محليا إذا كانت كل نقطة x من E تقبل جملة أساسية لجوارات مترابطة.

$$(E,\Omega) \text{ مترابط محليا } \iff \forall x\in E, \exists B(x)=\{U\in V(x)/U(\text{ مترابط })\}$$

جملة أساسية لجوارات مترابطة

$$\iff \forall \text{ غير مترابط } V\in V(x), \exists \text{ مترابط } U\in B(x)/U\subset V$$

مبرهنة 4.5.1

المركبات المترابطة لفضاء طبولوجي (E,τ) مترابط محليا فهي مغلقة و مفتوحة في آن واحد.

البرهان

$C(x)$ هو أكبر مترابط الذي يحوي x.

$$C(x)=\{\bigcup A \;/\; x\in E,\ \text{ مترابط } A\}$$

لدينا مما سبق $C(x)$ مغلق.

نبين أن $C(x)$ مفتوح أي جوار لكل نقاطه، أي نبين أن:

$$\forall y\in C(x), \exists V\in V(y)/V\subset C(x)$$

ليكن $y\in C(x)$:

$(C(x),C(y))$ لدينا E مترابط محليا أي:

$$\exists B(y)=\{U\in V(y)/ \text{ مترابط } U\} \text{ جملة أساسية}$$

$$y\in U \text{ مترابط } \Longrightarrow U\subset C(y)=C(x)\Longrightarrow C(x)\in V(y)$$

$C(y)$ أكبر مترابط.

4.6 تمارين مقترحة

التمرين الأول

E و F فضاءان طبولوجيان. بين أن: $(E\times F,\tau_{E\times F})$ مترابط $\Longleftrightarrow$ E و F مترابطان

التمرين الثاني

ليكن $E=\{a,b,c,d,e\}$ و $\theta=\{\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},E\}$

1. هل E مترابط؟
2. هل الأجزاء $\{a,e\}$ و $\{b,c,d\}$ مترابطة؟
3. ⋆ بين أن كل فضاء منقطع هو مترابط إذا وفقط إذا كان يحتوي على عنصر واحد.
   ⋆ أثبت أن كل فضاء واسع هو مترابط.

التمرين الثالث

(E,τ) فضاء طبولوجي، A جزء من E.

1. أثبت أن: $\forall B\subset E,$ B مترابط ; $B\cap A\neq\phi \ \wedge\ B\cap A^c\neq\phi\Longrightarrow B\cap Fr(A)\neq\phi$
2. أثبت أن: E مترابط $\Longleftrightarrow$ $\forall A\subset E\ ;\ A\neq\phi\Longrightarrow Fr(A)\neq\phi$

التمرين الرابع

(E,τ) فضاء طبولوجي، $C(x)$ المركبة المترابطة ل x. أثبت أن:

1. $C(x)$ مغلق مهما يكن x في E.
2. E مترابط $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in E\ ,\ C(x)=E$

التمرين الخامس

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي مترابط محليا. بين أن المركبات المترابطة ل x هي مغلقة و مفتوحة .

الفصل الخامس

الفضاءات الشعاعية النظمية

تمهيد

إن أول ميزة تحتاج إليها الفضاءات التي نحن مقبلون على دراستها هي أن تكون متمتعة ببنية فضاء شعاعي. لا شك أنه لم يذهب عنك أننا أهملنا هذه الطبيعة الجبرية و لم نكن في حاجة إليها مما سبق من أنماط الفضاءات (الطبولوجية و المترية).

سنسلك في تقديم هذه الفضاءات نفس النهج و النسق الذي انتهجناه من قبل في الفضاءات المترية ، ذلك لأن الفضاءات النظيمية هي فضاءات مترية خاصة .

كما نشير إلى أننا نرمز بـ $\mathbb{K}$ ، في كل ما سيلحق لأحد حقلي الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو العقدية $\mathbb{C}$.

5.1 النظيم

5.1.1 تعاريف و خصائص عامة

تعريف 1.1.5

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.
التطبيق $N : E \to \mathbb{R}^+$ الذي يحقق الشروط :

❶ $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

❷ $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

❸ $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

يسمى N نظيم على E و يرمز له بالرمز $\|.\|_E$ ، و تسمى الثنائية $(E, \|.\|_E)$ بفضاء شعاعي نظيمي.

أمثلة 1.1.5

❶ القيمة المطلقة هي نظيم على $\mathbb{R}$:

$$|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

$(\mathbb{R}, |.|)$ فضاء شعاعي نظيمي .

❷ الطويلة هي نظيم على $\mathbb{C}$:

$$|.| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$$
$$z \mapsto |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$(\mathbb{C}, |.|)$ فضاء شعاعي نظيمي .

❸ الأنظمة الأساسية على $\mathbb{R}^n$:

إذا كان x عنصرا من $\mathbb{R}^n$ ، مركباته $x_1, x_2, ..., x_n$ وضعنا :

• $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

- $\|x\|_2=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$
- $\|x\|_\infty=\sup\limits_{1\le i\le n}|x_i|$
- $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ حيث $1\le p<+\infty$.

يدعى النظيم $\|.\|_2$ بالنظيم الإقليدي ، بينما يدعى النظيم $\|.\|_\infty$ بنظيم التقارب المنتظم ، أما النظيم $\|.\|_p$ فيدعى بنظيم هولدر .

❹ الأنظمة الأساسية على $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$:

من أجل كل عنصر f من $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ نضع :

- $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$
- $\|f\|_1=\int\limits_0^1|f(x)|dx$
- $\|f\|_2=\sqrt{\int\limits_0^1|f(x)|^2dx}$
- $1\le p<+\infty$, $\|f\|_p=\left(\int\limits_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

تعريف 2.1.5

✍ **الخاصية الأساسية للنظيم :**

ليكن E فضاء شعاعي نظيمي ، لدينا:

1. $\forall x,y\in E:\|x-y\|=\|y-x\|$
2. $\forall x,y\in E:|\|x\|-\|y\||\le\|x-y\|$
3. $\forall x_1,\dots,x_n\in E,\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}:\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right\|\le\sum\limits_{i=1}^{n}\|\lambda_i\|\,\|x_i\|$

تعريف 3.1.5

✍ **المسافة المرفقة بنظيم :**

ليكن $(E,\|.\|)$ فضاء نظيمي، نعرف على E المسافة d المرفقة بالنظيم كما يلي :
$\forall x,y\in E:d(x,y)=\|x-y\|$

5.1.2 النظم المتكافئة

تعريف 4.1.5

ليكن $\|x\|_1$ و $\|x\|_2$ نظيمان على E .

$\|x\|_1$ و $\|x\|_2$ متكافئان $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0 : \alpha\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2$

أمثلة 2.1.5

❶ على $\mathbb{R}^n$ ، النظيمان $\|x\|_2$ و $\|f\|_\infty$ متكافئان لأن :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

المتراجحة الأولى محققة ، لأجل المتراجحة الثانية لدينا :

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq n\,\|x\|_\infty^2 \Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

❷ على $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ ، $\|f\|_1$ و $\|f\|_\infty$ غير متكافئان ، واضح أن :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 dt = \|f\|_\infty$$

من جهة أخرى ، المتراجحة العكسية غير محققة :

نضع : $f_n(t) = t^n$

وعليـه : $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

و $\|f_n\|_\infty = 1$

إذن لايوجد أي ثابت K حيث : $\|f\|_\infty \leq K\|f\|_1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

نظرية 5.1.1

كل النظم المعرفة على $\mathbb{R}^n$ متكافئة.

البرهان

للتبسيط نثبت النظرية بالنسبة للنظم المألوفة.

- N_1 و N_∞ :

ليكن K_0 حيث : $\|x\|_\infty = |x_{K_0}|$

وعليه: $|x_K| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

أي: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$

وبما أن $\forall k \in \{1,...,n\} : |x_K| \leq |x_{K_0}|$ لدينا إذن:

$$\sum |x_K| \leq n\, |x_{K_0}|$$

أي: $\|x\|_1 = n\|x\|_\infty$

إذن: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

- N_1 و N_2 :

نذكر أنه إذا كان $a_1, a_2, ..., a_n$ أعداد حقيقية موجبة فإن :

$$\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n} \leq \sqrt{a_1} + ... + \sqrt{a_n}$$

نستنتج أن :

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} + ... + \sqrt{x_n^2} \\ &\geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\end{aligned}$$

وحسب متباينة كوشي شوارتز لدينا :

$$\sum_{K=1}^{n} |x_K| = \sum_{K=1}^{n} |x_K| .1 \leq \sqrt{\sum_{K=1}^{n} |x_K|^2} . \sqrt{\sum 1^2}$$

فإن: $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$

- N_2 و N_∞ :

ليكن K_0 حيث: $\|x\|_\infty = |x_{K_0}|$

$$x_{K_0}^2 \leq \sum_{K=1}^{n} x_K^2$$

ومنه: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$

ومن المتباينة $x_k^2 \leq x_{K_0}^2$ الصحيحة من أجل كل: $k \in \{1, ..., n\}$

نستنتج أن: $\sum_{K=1}^{n} x_K^2 \leq n \left| x_{K_0}^2 \right|$

أي: $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$

إذن: $\forall x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n} \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_\infty$

نتيجة 1.1.5

إذا كان $(E, \|.\|_E)$ فضاء شعاعي نظيمي على $\mathbb{K}$ بعده منته فكل الأنظمة متكافئة .

نتيجة 2.1.5

لكي يكون نظيمان N_1 و N_2 متكافئين على فضاء E ، يلزم ويكفي أن يكون المقدار $\frac{N_1(x)}{N_2(x)}$ أو $\frac{N_2(x)}{N_1(x)}$ محدودا بأعداد موجبة تماما، من أجل x غير معدوم .

مثال 1.1.5

نزود الفضاء الشعاعي $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ بالنظيمين الأساسيين $\|.\|_\infty$ و $\|.\|_1$ ونعتبر فيه المتتالية $(f_n)_n$ المعرفة بـ :

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & ; \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & ; \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

يكون لدينا عندئذ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}, \|f_n\|_\infty = 1.$$

نستخلص أن $\|.\|_\infty$ و $\|.\|_1$ ليسا متكافئين، ذلك لأن النسبة $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n$ ليست محدودة .

نظرية 5.1.2

كل فضاء شعاعي نظيمي $(E, \|.\|_E)$ هو فضاء متري .

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

d يسمى البعد الناتج عن النظيم .

البرهان

ليكن $(E, \|.\|_E)$ فضاء شعاعي نظيمي على الحقل $\mathbb{K}$ وليكن d التطبيق المعرف كما يلي:

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

❶ المطابقة :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E : d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

❷ التناظر :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E : d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|-(y - x)\| \\ &= |-1| \, \|(y - x)\| \\ &= \|(y - x)\| \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

❸ المتراجحة المثلثية :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in E : d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|x - z + z - y\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &\leq d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

نتيجة 3.1.5

E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ ، d بعد لـ E ينتج نظيم على E إذا حقق الخاصيتين التاليتين :

1. خاصية الإنسحاب :
$$\forall x, y, a \in E : d(x, y) = d(x + a, y + a)$$

2. خاصية التحاكي :
$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$$

تعريف 5.1.5

E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ ، τ طبولوجيا على E، نقول أن (E, τ) فضاء شعاعي طبولوجي إذا كان التطبيقين :

$$\cdot : (\mathbb{K} \times E, \tau_p) \to (E, \tau)$$
$$(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

$$+ : (E \times E, \tau_p) \to (E, \tau)$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

مستمرين .

ملاحظة : كل فضاء شعاعي نظيمي $(E, \|.\|)$ هو فضاء شعاعي طبولوجي .

مبرهنة 5.1.1

النظيم هو تطبيق مستمر، حيث :

$$\|.\| : (E, \|.\|) \to (\mathbb{R}^+, |.|)$$
$$x \mapsto f(x) = \|x\|$$

البرهان

لدينا العلاقة التالية :

$$\forall x, y \in E : |f(x) + f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

أي أن f ليبشيزي نسبته 1 ،وعليه f مستمر بانتظام ، إذن فهو تطبيق مستمر .

5.1.3 الفضاءات النظيمية الجزئية

تعريف 6.1.5

ليكن E فضاء نظيميا ، نسمي فضاء نظيميا جزئيا كل فضاء شعاعي جزئي A من E يكون مزودا بطبولوجيا الأثر .
وبعبارة أخرى، يكون الفضاء الشعاعي الجزئي A فضاء نظيميا جزئيا إذا مازود بمقصور نظيم E عليه. وبالطبع، فإن هذا المقصور يعرف نظيما على A .

قضية 5.1.1

إذا كان $(E, \|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي و H فضاء نظيمي جزئي من E ,
فإن $\overline{H}$ فضاء نظيمي جزئي من E .

البرهان

$\overline{H}$ غير خالية لإحتوائها H .

إذا كان $x, y \in \overline{H}$ فإنه توجد متتاليتان $(x_n) \subset H$ و $(y_n) \subset H$ حيث :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow \|x - x_n\| \leq \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \Rightarrow \|y - y_n\| \leq \varepsilon,$$

وإذا كان $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ و بأخذ $\max(n_1, n_2) = n_3$ نجد :

$$\begin{aligned} n \geq n_3 \Rightarrow \|(\alpha x + \beta y) - (\alpha x_n + \beta y_n)\| &= \|\alpha (x - x_n) + \beta (y - y_n)\| \\ &\leq |\alpha| \|x - x_n\| - |\beta| \|y - y_n\| \\ &\leq \varepsilon (|\alpha| + |\beta|). \end{aligned}$$

إذن :

$$\lim_{n \to +\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y$$

وبالتالي :

$$\alpha x + \beta y \in \overline{H}.$$

5.1.4 جداء الفضاءات الشعاعية النظيمية

تعريف 7.1.5

لتكن $(E_i, \|.\|_i)_{1\leq i\leq m}$ عائلة منتهية من فضاءات نظيمية على حقل واحد $\mathbb{K}$ ولنضع:

$$\prod_{i=1}^{m} E_i = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m = E.$$

إذن E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$، ويمكن تزويده بالنظيمات الأساسية التالية:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_i$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq m} \|x_i\|_i$$

نظرية 5.1.3

ليكن E_1 و E_2 فضاءان شعاعيان نظيميان على $\mathbb{K}$. جداء الفضاءان الشعاعيان E_1 و E_2 هو فضاء شعاعي نظيمي معرف بـ :

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|, \quad (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$$

البرهان

نبرهن أن $\|(x_1, x_2)\|$ نظيم على $E_1 \times E_2$:

❶ شرط الفصل :

$$\begin{aligned}
\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : \|(x_1, x_2)\| = 0 &\Leftrightarrow \|x_1\| + \|x_2\| = 0 \\
&\Leftrightarrow (\|x_1\| = 0) \wedge (\|x_2\| = 0) \\
&\Leftrightarrow (x_1 = 0) \wedge (x_2 = 0) \\
&\Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)
\end{aligned}$$

❷ شـرط التجانـس :

$$\begin{aligned}\forall (x_1,x_2)\in E_1\times E_2 : \forall \lambda\in\mathbb{K} : \|\lambda(x_1,x_2)\| &= \|(\lambda x_1,\lambda x_2)\|\\ &= \|\lambda x_1\| + \|\lambda x_2\|\\ &= |\lambda|\,\|x_1\| + |\lambda|\,\|x_2\|\\ &= |\lambda|\,(\|x_1\| + \|x_2\|)\\ &= |\lambda|\,\|(x_1,x_2)\|\end{aligned}$$

❸ شـرط المتباينة المثلثية :

$$\begin{aligned}\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in E_1\times E_2 : \|(x_1,x_2)+(y_1,y_2)\| &= \|(x_1+y_1,x_2+y_2)\|\\ &= \|x_1+y_1\| + \|x_2+y_2\|\\ &\le \|x_1\| + \|y_1\| + \|x_2\| + \|y_2\|\\ &\le (\|x_1\| + \|y_1\|) + (\|x_2\| + \|y_2\|)\\ &\le \|(x_1,x_2)\| + \|(y_1,y_2)\|\end{aligned}$$

نظرية 5.1.4

ليكن E فضاء شعاعي نظيمي على $\mathbb{K}$ إذن التطبيقين المعرفين بـ :

(1

$$\begin{aligned}M : \mathbb{K}\times E &\to E\\ (\lambda,x) &\to M(\lambda,x) = \lambda.x\end{aligned}$$

(2

$$\begin{aligned}S : E\times E &\to E\\ (x,y) &\to S(x,y) = x+y\end{aligned}$$

مستمـران .

البرهان

❶ نبرهـن أن M مستمر :

ليكن $(\lambda_0,x_0)\in\mathbb{K}\times E$, و $\varepsilon>0$ ولنـضع :

$$0 < \delta = \inf\left(1, \frac{\varepsilon}{1+|\lambda_0|+\|x_0\|}\right)$$

إذا كان $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ بحيث :

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \delta \text{ و } \|x - x_0\| \leq \delta$$

فإنه يكون لدينا عندئذ :

$$\begin{aligned}\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| &= \|(\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + \lambda_0 (x - x_0) + (\lambda - \lambda_0) x_0\| \\ &\leq |\lambda - \lambda_0| \|x - x_0\| + |\lambda_0| \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \|x_0\| \\ &\leq \delta^2 + \delta |\lambda_0| + \delta |x_0| \leq (1 + |\lambda_0| + |x_0|) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

إذن M مستمر عند (λ_0, x_0) .

❷ نبرهـن أن S مستمـر :

ليكن $(x_0, y_0) \in E \times E$ و $\varepsilon > 0$. إذا كان $(x, y) \in E \times E$ بحيـث :

$$\begin{aligned}\|x - x_0\| &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ \|y - y_0\| &\leq \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

كان لدينا :

$$\begin{aligned}\|S(x, y) - S(x_0, y_0)\| &= \|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \\ &= \|x - x_0 + y - y_0\| \\ &\leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

وعليه S ليـبشيـزي إذن هو مستمر بانتظام على $E \times E$.

5.2 التطبيقات الخطية على الفضاءات الشعاعية النظيمية

5.2.1 الفضاء $L(E, F)$

تعريف 1.2.5

ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل $\mathbb{K}$.
نقول عن تطبيق u معرف من E نحو F أنه خطي إذا حقق:

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{K} : u(\lambda x + \beta y) = \lambda u(x) + \beta u(y).$$

أمثلة 1.2.5

❶ u_1 خطي :

$$u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto u(x) = ax, (a \in \mathbb{R}).$$

❷ u_2 خطي :

$$u_2 : \Phi^1([a,b],\mathbb{R}) \to \Phi([a,b],\mathbb{R})$$
$$f \mapsto u(f) = f'$$

❸ u_3 خطي :

$$u_3 : \Phi([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto u(f) = \int_a^b f(t)dt$$

ملاحظة :
تؤلف التطبيقات الخطية المعرفة من E نحو F مجموعة يرمز لها بـ $L(E,F)$ حيث :

$$\boxed{L(E,F) = \{f : E \longrightarrow F \,/\, f \text{ تطبيق خطي}\}}$$

5.2.2 إستمرار تطبيق خطي

مبرهنة 5.2.1

$(E, \|.\|_E)$ و $(F, \|.\|_F)$ فضاءان شعاعيان نظيميان على $\mathbb{K}$ ، كل تطبيق خطي من E نحو F حيث بعد E منته $(\dim E < +\infty)$ فهو مستمر .

البرهان

لدينا :

$$\dim E = n < +\infty \Rightarrow \exists B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

حيث B أساس لـ E.
لإثبات أن f مستمر بانتظام يكفي أن نبرهن أنه ليبشيزي، أي :

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$$\exists K > 0 : \|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E$$

لدينا :

لأجل $x \in E$ ، $\exists (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

و لأجل $y \in E$ ، $\exists (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n : y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

لدينا f خطي إذا:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$
$$f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i)$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_F &= \left\|\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) f(e_i)\right\|_F \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\right| \|f(e_i)\|_F \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \|f(e_i)\|_F \end{aligned}$$

بما أن E ذو بعد منته، فإن الأنظمة متكافئة :

نعلم أن :

$$\|x\|_\infty = \sup_{1\le i\le n} |x_i|$$

$$\begin{aligned} |x_i - y_i| &\le \sup_{1\le i\le n} |x_i - y_i| \\ &= \|x-y\|_\infty \end{aligned}$$

وعليه :

$$\begin{aligned} \|f(x)-f(y)\|_F &\le \sum_{i=1}^{n} \sup_{1\le i\le n} |x_i - y_i| \, \|f(e_i)\|_F \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|x-y\|_\infty \|f(e_i)\|_F \\ &\le \|x-y\|_{\mathbb{E}} \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F \end{aligned}$$

نضع :

$K = \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F > 0$ لأن (B أساس و f خطي).

ومنه، f ليبشيزي على E إذن f مستمر بانتظام على E فهو مستمر .

ملاحظة :

إذا كان $\dim E = \infty$ فالبرهنة ليست صحيحة دوما على العموم .

مثال 1.2.5

$$E = \{f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \text{تطبيق خطي مستمر} \quad f\} = \varphi([0,4], \mathbb{R})$$

E بعده لانهائي، لنعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned} \psi : E &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \psi(f) = f(1) \end{aligned}$$

ψ خطي لأن :

$$\psi(f+g) = (f+g)(1) = f(1) + g(1) = \psi(f) + \psi(g)$$

$$\psi(\lambda f) = (\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda \psi(f)$$

لدينا $\|f\|_E = \sup\limits_{x\in[0,4]} |f(x)|$

إذن $(E,\|\|)$ فضاء شعاعي نظيمي على $\mathbb{R}$ بعده لانهائي (هو فضاء متري) فنستطيع التكلم عن المتتاليات ، معناه لكي نبرهن الإستمرار، نبرهن الإستمرار المتتالي لأننا في فضاء متري. حيث :

$$\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E : f_n \to 0_E \wedge \psi(f_n) \nrightarrow \psi(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f_n : [0,4] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x) = \left(\frac{x-3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

(f_n) متقاربة نحو 0 لأن :

$$\|f_n - 0_E\| = \|f_n\| = \sup_{x\in[0,4]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,4]} \left|\left(\tfrac{x-3}{2}\right)^n\right| = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ψ غير مستمر لأن : $\|\psi(f_n) - \psi(0)\| = |f_n(1)| = (-1)^n$ و هي غير متقاربة.

تعريف 2.2.5

$(E,\|\|_E)$ و $(F,\|\|_F)$ فضاءان شعاعيان نظيميان على $\mathbb{K}$ ، المجموعة $\mathscr{L}(E,F)$ هي مجموعة التطبيقات الخطية المستمرة على E .

$$\mathscr{L}(E,F) = \{ f : E \longrightarrow F \ / \ f \ \text{تطبيق خطي مستمر} \}$$

قضية 5.2.1

إذا كان E فضاء نظيمي ذو بعد منته، فإنه من أجل كل فضاء نظيمي F يكون :

$$\mathscr{L}(E,F) = L(E,F)$$

البرهان

ليكن $(e_i)_{1\le i\le p}$ الأساس القانوني لـ E المزود بالنظيم الأساسي $\|\|_1$ و u تطبيق خطي من E نحو فضاء نظيمي F . نكتب عندئذ :

$$\|u(x)\| = \left\| u\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{p} x_i u(e_i)\right\| \le \sum_{i=1}^{p} |x_i|\,|u(e_i)|$$

و بوضع $\max\limits_{1\le i\le p} \|u(e_i)\| = M$ تأتي العلاقة الضامنة للإستمرار :

$$\|u(x)\| \leq M\|x\|_1$$

مبرهنة 5.2.2

إذا كان E و F فضاءين نظيميين على $\mathbb{K}$ و u عنصرا من $L(E,F)$ فإن لكي يكون u مستمرا على E يلزم ويكفي أن يوجد عدد موجب a بحيث :

$$\forall x \in E : \|u(x)\|_F \leq a\|x\|_E$$

البرهان

❖ لـزوم الشـرط :

إن إستمرار u على E يستلزم إستمراره عند الصفر بالخصوص .

نكتب عندئذ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0 : \|x\|_E \leq \rho \Rightarrow \|u(x)\|_F \leq \varepsilon$$

لنثبت $\varepsilon = 1$ و لنضع، من أجل كل x غير معدوم :

$$z = \frac{\rho}{\|x\|_E}x$$

يأتي أن $\|z\|_E = \rho$ و عليه :

$$\|u(z)\|_F \leq 1$$

إذن :

$$\|u(z)\|_F = \left\|u\left(\frac{\rho}{\|x\|_E}x\right)\right\| = \frac{\rho}{\|x\|_E}\|u(x)\|_F \leq 1$$

أي :

$$\|u(x)\|_F \leq \frac{1}{\rho}\|x\|_E$$

يكفي عند ذلك أخذ $a = \frac{1}{\rho}$.

❖ كفايـة الشـرط :

من أجل كل x و y من E يكون لدينا :

$$\|u(x)-u(y)\|_F = \|u(x-y)\|_F \le a\|x-y\|_E$$

u لـيـبشيــزي على E نسبته a، ومنه u مستمر بانتظام على E أي أن u مستمر .

نتيجة 1.2.5

من أجل كل عنصر u من $L(E,F)$ القضايا الثلاث متكافئة :

❶ u مستمر على E ،

❷ u مستمر عند الصفر ،

❸ u مستمر بانتظام على E .

مبرهنة 5.2.3

$(E,\|\|_E)$ ، $(F,\|\|_F)$ فضاءان شعاعيان على $\mathbb{K}$ ، f خطي من E نحو F ،
الخاصيات التالية متكافئة :

1. f مستمر على E .
2. $\forall A \subset E, A$ محدود $\Rightarrow f(A)$ محدود .
3. f مستمر على كرة الوحدة المغلقة :

$$B_F(0,1)=\{x\in E, d(x,0)=\|x\|\le 1\} .$$

4. f مستمر على سطح كرة الوحدة :

$$S(0,1)=\{x\in E, d(x,0)=\|x\|=1\} .$$

البرهان

لإثبات التكافؤات نبين الإستلزامات التالية :

$$1\Rightarrow 2\Rightarrow 3\Rightarrow 4\Rightarrow 1$$

✐ نبين $1\Rightarrow 2$:

بما أن A محدود فإن :

$$\forall x\in A, \exists M>0 : \|x\|\le M$$

ولدينا f مستمر إذن هو ليبشيـــزي، أي :

$$\exists r>0,\forall x\in E:\|f(x)\|_F\leq r\|x\|_E$$

لدينا مما سبق $\|x\|\leq M$ أي :

$$\|f(x)\|_F\leq r\,\|x\|\leq rM$$

بوضع $\delta=rM$ نجد :

$\|f(x)\|_F\leq\delta$ إذن f محدود .

✐ نبين $3\Rightarrow 2$:

نأخذ $A=B_F(0,1)$ حيث A محدودة .

لأجل A من E إذا كانت A محدودة فإن $f(A)$ محدود أي :

$$\exists M>0,\forall x\in B_F(0,1):\|f(x)\|\leq M$$

نضع :

$$x\neq 0, t=\frac{\alpha x}{\|x\|}\Rightarrow\|t\|=\alpha\leq 1$$

لدينا :

$$\|f(t)\|=\left\|f\left(\frac{\alpha x}{\|x\|}\right)\right\|\leq M\Leftrightarrow|\alpha|\frac{f(\|x\|)}{\|x\|}\leq M$$

$$\exists M>0,\forall x\in B_F(0,1):\|f(x)\|_F\leq M\|x\|_E$$

$$\exists r>0,\forall x\in B_F(0,1):\|f(x)\|_F\leq r\|x\|_E\leq r$$

$$\exists M>0,\forall x\in B_F(0,1)\Rightarrow\|f(x)\|_F\leq M\,.........(*)$$

$$\exists r>0,\forall x\in B_F(0,1):\|f(x)\|_F\leq r\|x\|_E$$

لدينا فرضا :

$$\exists r>0,\forall x\in B_F(0,1):\|f(x)\|_F>r\|x\|_E$$

$$r=\frac{M}{\|x\|},\quad\exists x\in B_F(0,1),\quad\|f(x)\|_F>\mathrm{M}$$

تناقض مع $(*)$.

✐ نبين $4 \Rightarrow 3$:

بديهي لأن :

$$S_{\|x\|=1} \subset B_F(0,1)$$

✐ نبين $1 \Rightarrow 4$:

f مستمر على $S(0,1)$ أي :

$$\exists r > 0, \forall t \in S(0,1) : \|f(t)\| \leq r\|t\|$$

نضع :

$$x \neq 0, t \in S(0,1); t = \frac{\alpha x}{\|x\|}.$$

و عليه :

$$\begin{aligned}\|t\| &= |\alpha| = 1\\ \|f(t)\| &= \left\|f\left(\frac{\alpha x}{\|x\|}\right)\right\|\\ &= \frac{1}{\|x\|}\|f(x)\| < r\end{aligned}$$

و منه :

$$\exists r > 0 : \|f(x)\| \leq r\|x\|$$

إذن f ليبشيزي ومنه f مستمر على E .

5.2.3 نظيم الفضاء $\mathscr{L}(E,F)$

قضية 5.2.2

إذا كان E و F فضاءين نظيميين على $\mathbb{K}$ و u عنصرا من $\mathscr{L}(E,F)$ ، كانت الأعداد الأربعة

عندئذ متساوية :

$$\sup_{x\in E\backslash\{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = a,$$
$$\sup_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F = b,$$
$$\sup_{\|x\|_E\leq 1} \|u(x)\|_F = c,$$
$$\inf\{K>0/\|u(x)\|_F \leq K\|x\|_E\} = d.$$

وبالتالي نعرف نظيم u بالشكل التالي :

$$\|u\| = a \vee b \vee c \vee d.$$

قضية 5.2.3

إن التطبيق :

$$N : \mathscr{L}(E,F) \to \mathbb{R}$$

$u \mapsto N(u) = \|u\| = a = b = c = d$ يعرف نظيما على $\mathscr{L}(E,F)$.

البرهان

لنضع :

$$\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{E\backslash\{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

لدينا :

❶ شـرط الفـصل :

$$\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)} = 0 \Leftrightarrow \sup_{E\backslash\{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0 \Leftrightarrow \|u(x)\|_F = 0, \forall x \in E\backslash\{0\}$$
$$\Leftrightarrow u(x) = 0, \forall x \in E\backslash\{0\} \Leftrightarrow u \equiv 0.$$

لاحظ أن $u(0) = 0$ من خطية u .)

❷ شـرط التجـانس :

$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall u\in\mathscr{L}(E,F):\|\lambda u\|_{\mathscr{L}(E,F)}=\sup_{E\backslash\{0\}}\frac{\|(\lambda u)(x)\|_F}{\|x\|_E}$$
$$=\sup_{E\backslash\{0\}}\frac{\|\lambda u(x)\|_F}{\|x\|_E}=\sup_{E\backslash\{0\}}\frac{|\lambda|\,\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$
$$=|\lambda|\sup_{E\backslash\{0\}}\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}=|\lambda|\,\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

❸ شـرط المتباينـة المثلثيـة :

$$\forall u,v\in\mathscr{L}(E,F):\|u+v\|_{\mathscr{L}(E,F)}=\sup_{E\backslash\{0\}}\frac{\|(u+v)(x)\|_F}{\|x\|_E}=\sup_{E\backslash\{0\}}\frac{\|u(x)+v(x)\|_F}{\|x\|_E}$$
$$\leq\sup_{E\backslash\{0\}}\frac{\|u(x)\|_F+\|v(x)\|_F}{\|x\|_E}$$
$$\leq\sup_{E\backslash\{0\}}\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}+\sup_{E\backslash\{0\}}\frac{\|v(x)\|_F}{\|x\|_E}$$
$$\leq\|u\|_{\mathscr{L}(E,F)}+\|v\|_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

مبرهنة 5.2.4

إذا كان E و F و G ثلاثة فضاءات نظيمية على $\mathbb{K}$ وكان f عنصرا من $\mathscr{L}(E,F)$ و g عنصرا من $\mathscr{L}(F,G)$ فإن :

❶ $\|Id_E\|=1$

❷ $g\circ f$ عنصر من $\mathscr{L}(E,G)$

❸ $\|g\circ f\|\leq\|f\|\,\|g\|$

❹ f تقابلي و $f\in\mathscr{L}(E,F)$ ، إذا كان f^{-1} مستمر فإن :

$$\|f^{-1}\|_{\mathscr{L}(E,F)}\geq\|f\|^{-1}_{\mathscr{L}(E,F)}=\frac{1}{\|f\|_{\mathscr{L}(E,F)}}$$

البرهان

❶ $\|Id\|_E\overset{?}{=}1$

$$Id:E\to E$$
$$x\to Id(x)=x$$

لدينا :

$$\|Id_E\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Id(x)\|}{\|x\|_E} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|x\|_E}{\|x\|_E} = 1$$

❷ أ. $g\circ f$ خطي :

$$\begin{aligned}\forall \lambda,\beta\in\mathbb{K}, \forall x,y\in E : (g\circ f)(\lambda x+\beta y) &= g\left(f(\lambda x+\beta y)\right)\\ &= g\left(\lambda f(x)+\beta f(y)\right)\\ &= \lambda(g\circ f)(x)+\beta(g\circ f)(x).\end{aligned}$$

ب. $g\circ f$ مستمر :

$$\begin{aligned}\forall x\in E : \|(g\circ f)(x)\|_G = \|g(f(x))\|_G &\leq \|g\|_{\mathscr{L}(F,G)}\|f(x)\|_F\\ &\leq \|g\|_{\mathscr{L}(F,G)}\|f\|_{\mathscr{L}(E,F)}\|x\|_E.\end{aligned}$$

❸ $\|g\circ f\| \overset{?}{\leq} \|f\|\,\|g\|$

$$\begin{aligned}\|(g\circ f)(x)\|_G = \|g(f(x))\|_G &\leq \|g\|_{L(F,G)}\|f(x)\|_F\\ &\leq \|g\|_{\mathscr{L}(F,G)}\|f\|_{\mathscr{L}(E,F)}\|x\|_E\end{aligned}$$

إذن :

$$\frac{\|(g\circ f)(x)\|_G}{\|x\|_E} \leq \|g\|_{\mathscr{L}(F,G)}\|f\|_{\mathscr{L}(E,F)} \Rightarrow \|g\circ f\| \leq \|f\|_{\mathscr{L}(E,F)}\|g\|_{\mathscr{L}(F,G)}$$

❹ بما أن f تقابلي و f^{-1} التطبيق العكسي لـ f :

نعلم أن :

$$Id = f\circ f^{-1}$$

و عليه :

$$\begin{aligned}1 = \left\|f\circ f^{-1}\right\| \leq \left\|f^{-1}\right\|\|f\| &\Rightarrow \frac{1}{\|f\|} \leq \left\|f^{-1}\right\|\\ &\Rightarrow \|f\|^{-1} \leq \left\|f^{-1}\right\|\end{aligned}$$

5.3 فضاءات بناخ (Les espaces de Banach)

تعريف 1.3.5

نقول عن فضاء نظيمي E أنه بناخي إذا كانت كل متتالية كوشية منه متقاربة, أي أنه تام باعتباره فضاء متري مزود بالمسافة المرفقة بنظيم.

أمثلة 1.3.5

1) $(\mathbb{R},|.|)$ و $(\mathbb{K},|.|)$ بناخيان.

2) $(\varphi([a,b],\mathbb{R}),\|\|_\infty)$ بناخي.

3) الفضاء $L^p([a,b])$ حيث $1\leq p \prec \infty$ بناخي.

4) $\mathbb{R}^n$ مزود بالنظيم $\|x\|=\sqrt{x_1^2+....+x_n^2}$ هو فضاء بناخ ذو بعد n .

5) الفضاء $E=\varphi([-1,1],\mathbb{R})$ مزود بالنظيم $\|.\|_2$ ليس بناخي ، لتكن المتتالية:

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 \quad , & -1\leq x\leq \frac{1}{2}, \\ nx-\frac{n}{2} \quad , & \frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \\ 1 \quad , & \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leq x\leq 1. \end{cases}$$

نتأكد أن المتتالية $(f_n)_n$ كوشية.إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p\succ q$ حصلنا على:

$$\begin{aligned}
\left\|f_p-f_q\right\|_2 &= \sqrt{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}(f_p(x)-f_q(x))^2 \quad dx+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}(f_p(x)-f_q(x))^2 \quad dx} \\
&= \sqrt{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}(p-q)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \quad dx+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}\left(1-q\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2 \quad dx} \\
&= \sqrt{\frac{(p-q)^2}{3p^3}+\frac{(p-q)^3}{3p^3q}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3q}\left(1-\frac{p}{q}\right)^2} \\
&< \sqrt{\frac{1}{3q}}
\end{aligned}$$

وعليه، إذا كان ε عدد موجب تماما فإن المتتالية $(f_n)_n$ كوشية لأجل الرتبة $n_0=\left[\frac{1}{3\varepsilon^2}\right]+1$. المتتالية المعتبرة تتقارب وفق النظيم المعطى نحو الدالة المعرفة بـ:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad -1\leq x\leq \frac{1}{2}\\ 1 & ; \quad \frac{1}{2}<x\leq 1\end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_2=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\left(n\left(x-\frac{1}{2}\right)-1\right)^2dx}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{3n}}=0$$

نلاحظ أن الدالة f غير مستمرة عند $\frac{1}{2}$. وبالتالي هي لا تنتمي إلى E ومنه E ليس بناخي.

5.3.1 نظيم حاصل القسمة

تعريف 2.3.5

ليكن $(E,\|.\|)$ فضاء نظيمي و F فضاء شعاعي جزئي منه, نفترض أن F مغلق ونعرف على E علاقة التكافؤ التالية: $x\mathscr{R}y\Leftrightarrow x-y\in F$
نرمز بـ E/F لفضاء حاصل القسمة و بـ S للغمر القانوني حيث :

$$\begin{aligned}S: E &\to E/F\\ x&\mapsto S(x)=\dot{x}\end{aligned}$$

قضية 5.3.1

إن التطبيق المعرف بـ :

$$\begin{aligned}S: E/F &\to \mathbb{R}\\ \dot{x}&\mapsto N\left(\dot{x}\right)=\left\|\dot{x}\right\|=\inf\left\{\|y\|: y\in\dot{x}\right\}\end{aligned}$$

نظيم على E/F .

البرهان

.1

$$\begin{aligned}\left\|\dot{x}\right\| = 0 &\Leftrightarrow \inf\{\|y\| : y - x \in F\} = 0\\ &\Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists y \in E : y - x \in F \wedge \|y\| < \varepsilon\}\\ &\Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists y - x \in F : \|x - (x - y)\| < \varepsilon\}\\ &\Leftrightarrow x \in \overline{F}\\ &\Leftrightarrow x \in F\\ &\Leftrightarrow \dot{x} = \dot{0}\end{aligned}$$

.2 من أجل كل $\dot{x}$ و $\dot{y}$ من E/F لدينا:

$$\left\|\dot{x} + \dot{y}\right\| = \left\|\dot{\widehat{x + y}}\right\| = \inf\{\|z\| : z - (x + y) \in F\}$$

$$t + u - (x + y) \in F$$
$$\|t + u\| \leq \|t\| + \|u\|$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\left\|\dot{\widehat{x + y}}\right\| &= \inf\{\|z\| : z - (x + y) \in F\}\\ &\leq \|t + u\|\\ &\leq \|t\| + \|u\|\end{aligned}$$

وعليه:

$$\begin{aligned}\left\|\dot{\widehat{x + y}}\right\| &\leq \inf\{\|t\| : t - x \in F\} + \inf\{\|u\| : u - y \in F\}\\ &\leq \left\|\dot{x}\right\| + \left\|\dot{y}\right\|\end{aligned}$$

.3 من أجل λ من $\mathbb{K}$ و $\dot{x}$ من E/F لدينا:

$$\begin{aligned}\left\|\lambda\, \dot{x}\right\| &= \left\|\dot{\widehat{\lambda x}}\right\|\\ &= \inf\left\{\|y\| : y \in \dot{\widehat{\lambda x}}\right\}\\ &= \inf\{\|y\| : y - \lambda x \in F\}\end{aligned}$$

ليكن z من E حيث يكون $z - x$ عنصرا من F لدينا:

$$\lambda z - \lambda x \in E,$$
$$\left\|\lambda \dot{x}\right\| \leq \|\lambda z\| = |\lambda|\,\|z\|\cdot$$

ومنه:

$$\left\|\dot{\widehat{\lambda x}}\right\| = \inf\{\|z\| : z - x \in F\} = |\lambda|\left\|\dot{x}\right\|$$

قضية 5.3.2

إن الغمر القانوني $x \mapsto S(x) = \dot{x}$ مستمر بانتظام على E .

البرهان

نزود E بالنظيم :

$$\left\|\dot{x}\right\| = \inf\left\{\|y\| : y \in \dot{x}\right\}$$

من أجل كل x, y من E لدينا:

$$\begin{aligned}\|S(x) - S(y)\| &= \left\|\dot{x} - \dot{y}\right\| \\ &= \left\|\dot{\widehat{x - y}}\right\| \\ &= \inf\{\|z\| : z - (x - y) \in F\}\end{aligned}$$

بأخذ $z = x - y$ نجد:

$$x - y - (x - y) = 0 \in F$$

وعليه : $\left\|\dot{x} - \dot{y}\right\| \leq \|x - y\|$

إذن S ليبشيـزي نسبته 1، فهو مستمر بانتظام.

قضية 5.3.3

إذا كان E فضاء بناخ فإن E/F كذلك فضاء بناخي.

البرهان

لتكن $\left(\dot{y}_n\right)_n$ متتالية كوشية من E/F . ولنرمز بـ $\psi(0)$ لأصغر عدد طبيعي يسمح بالكتابة :

$$n > m \geq \psi(0) \quad \Rightarrow \quad \left\|\dot{y}_n - \dot{y}_m\right\| \leq \tfrac{1}{2}.$$

ونرمز بالمثل، بـ $\psi(1)$ لأصغر عدد طبيعي يفوق $\psi(0)$ و يتحقق بموجبه :

$$n > m \geq \psi(1) \quad \Rightarrow \quad \left\|\dot{y}_n - \dot{y}_m\right\| \leq \tfrac{1}{2^2}.$$

بالإستمرار في هذه العملية, تمكن شيئا فشيئا, من إنشاء متتالية متزايدة $(\psi(k))_k$ في $\mathbb{N}$ بحيث :

$$\left\|\dot{y}_n - \dot{y}_m\right\| \leq \tfrac{1}{2^{k+1}}, \forall n, m \geq \psi(k).$$

وبالخصوص، ونظرا لكون $\psi(k+1) > \psi(k)$ ، يمكن الحصول على :

$$\left\|\dot{y}_{\psi(k+1)} - \dot{y}_{\psi(k)}\right\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad (*)$$

نشرع حاليا في إنشاء متتالية x_n في E تحقق :

من أجل كل دليل طبيعي k يكون x_k عنصرا من $\dot{y}_{\psi(k)}$ و :

$$\|x_{k+1} - x_k\| < \tfrac{1}{2^{k+1}}$$

نأخذ x_0 من $\dot{y}_{\psi(0)}$. ولنفترض أننا أنشأنا هكذا، العناصر $x_k, \ldots, x_1, x_0$ إذا إستندنا إلى العلاقة $(*)$ ، تبين وجود عنصرين x في $\dot{y}_{\psi(k+1)}$ و x' في $\dot{y}_{\psi(k)}$ بحيث :

$$\left\|x - x'\right\| < \tfrac{1}{2^{k+1}}$$

ولما كان x_k من $\dot{y}_{\psi(k)}$ أضحى العنصر $z = x_k - x'$ منتميا إلى F ; وإذا وضعنا $x_{k+1} = x + z$ حصلنا على :

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \left\|x + x_k - x' - x_k\right\| = \left\|x - x'\right\| < \tfrac{1}{2^{k+1}}$$

يترتب عن هذه النتيجة أن المتتالية $(x_n)_n$ كوشية في E التام. إنها تمتع إذن بنهاية نرمز لها بـ l. ولما كان الغمر القانوني S مستمرا بانتظام وجب على $\left(\dot{y}_{\psi(k)}\right)$ أن تتقارب نحو $S(l)$ في E/F . نستخلص من هذا أن للمتتالية الكوشية $\left(\dot{y}_n\right)_n$ قيمة ملاصقة. وبالتالي فهي متقاربة .

5.3.2 الفضاء الثنوي (Espace Dual)

الأشكال الخطية :

تعريف 3.3.5

ليكن E فضاء شعاعي نظيمي على الجسم التبديلي $\mathbb{K}$ ، نسمي شكلا خطيا على E كل تطبيق خطي مستمر من E نحو $\mathbb{K}$.

تعريف 4.3.5

نقول عن تطبيق $p : E \to \mathbb{R}$
أنه شكل نصف خطي إذا حقق:

- $\forall x, y \in E : p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

ترميز :
نرمز لمجموعة الأشكال الخطية المعرفة على E بـ

$$E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = \left\{ f : E \longrightarrow \mathbb{K} / \ f \ \text{شكل خطي} \right\}$$

نرمز لعناصر E^* بالرمز x^*

$$\begin{aligned} x^* : E &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto x^*(x) \end{aligned}$$

حيث:

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : x^*(\alpha x + \beta y) = \alpha x^*(x) + \beta x^*(y)$$

نسمي E^* بالفضاء الثنوي لـE.

تمديد الأشكال الخطية

5.3.3 نظرية هان بناخ (Hahn - Banach)

الشكل الحقيقي:

نظرية 5.3.1

إذا كان E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ ،
و p شكل نصف خطي من E نحو $\mathbb{R}$ ،
و G فضاء شعاعي جزئي من E ،
و u_0 شكل خطي على G حيث:

$$\forall x \in G : u_0(x) \leq p(x)$$

فإنه يوجد شكل خطي u على E بحيث $u/G = u_0$ و:
$\forall x \in E : u(x) \leq p(x)$

البرهان

نقوم بذلك على مرحلتين .

❶ المـرحلة الأولى :

ننشئ عائلة $\mathscr{F} = ((G_i, u_i))_i$ من تمديدات u_i لـ u_0 إلى G_i المحتوية G ثم نرتبها كما يلي :

$$(G_i, u_i) \subseteq (G_j, u_j) \Leftrightarrow \begin{cases} G_i \subseteq G_j, \\ u_{j/G_i} = u_i. \end{cases}$$

❷ المـرحلة الثانية :

نطبق فيها مسلمة زورون على العائلة $\mathscr{F}$.

نستهل المرحلة الأولى بالإشارة إلى أن $\mathscr{F}$ غير خالية لضمها (G, u_0) . ومن جهة أخرى، يستلزم كون $G \neq E$ وجود عنصر y_0 من E لا ينتمي إلى G . لنضع :

$$G_1 = [G, y_0] = G \oplus \mathbb{R}y_0,$$

الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بواسطة G و y_0 أي أن :

$$G_1 = \{z \in E : z = x + ty_0; t \in \mathbb{R}, x \in G\}.$$

إنشاء u_1 :

لو أن u_1 مدد u_0 إلى G_1 محققا الشرط :

$$u_1(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G_1, \tag{i}$$

نكتب عندئذ :

$$u_1(x+ty_0)=u_0(x)+tu_1(y_0).$$

و إذا وضعنا $u_1(y_0)=a$ نحصل على :

$$u_1(z)=u_0(x)+ta$$

وعليه، فإن تحديد a يعين u_1 تعيينا جيدا. إن إحترام الشرط (i) يتكفل بذلك. لدينا :

$$u_1(z)=u_0(x)+ta\le p(x+ty_0).$$

إذا كان $t=0$ فالنتيجة واضحة غير أنها لا تنبئ عن a .

و إذا كان $t>0$ فالشرط (i) يصبح :

$$a\le p\left(\tfrac{x}{t}+y_0\right)-u_0\left(\tfrac{x}{t}\right).$$

و إذا كان $t<0$ أعطى الشرط ذاته :

$$a\ge -p\left(\tfrac{x}{|t|}-y_0\right)+u_0\left(\tfrac{x}{|t|}\right).$$

لنبين أن عددا a يحقق هذين الشرطين مضمون الوجود. نلاحظ لأجل y' و y'' من G يكون لدينا :

$$\begin{aligned}u_0(y'')-u_0(y')=&u_0(y''-y')\le p(y''-y')=p((y''+y_0)-(y'-y_0))\\ \le& p(y''+y_0)+p(-y'-y_0).\end{aligned}$$

وعليه يأتي :

$$-u_0(y'')+p(y''+y_0)\ge -u_0(y')-p(-y'-y_0).$$

لنضع :

$$\alpha=\inf_{y''\in G}(-u_0(y'')+p(y''+y_0)),$$
$$\beta=\sup_{y'\in G}(-u_0(y')-p(-y'-y_0)).$$

لما كان العنصران y' و y'' كيفيين في G نتج عن ذلك أن $\beta\le\alpha$. فإذا إخترنا a من المجال $[\beta,\alpha]$ أصبح u_1 معرفا جيدا و محققا الشروط الموضوعة. هكذا يمكن شيئا فشيئا إستكمال إنشاء العائلة $\mathscr{F}$.

نشرع في المرحلة الثانية :

قمنا بإنشاء العائلة $\mathscr{F}=((G_i,u_i))_i$ التي تحقق عناصرها :

$$\begin{cases} G\subseteq G_i, \\ u_{i/G}=u_0, \\ u_i(x)\leq p(x) \quad \forall x\in G_i. \end{cases}$$

نعرف على $\mathscr{F}$ علاقة الترتيب التالية :

$$(G_i,u_i)\subseteq (G_j,u_j)\Leftrightarrow \begin{cases} G_i\subseteq G_j, \\ u_{j/G_i}=u_i. \end{cases}$$

من السهل التأكد من أن هذه العلاقة تجعل $\mathscr{F}$ مرتبة و إستقرائية [أ] . وبالتالي حسب مسلمة زورون [ب] ، فهي تقبل عنصرا أعظميا نرمز له بـ $\left(\bigcup_i G_i,u_i\right)$ بحيث :

$$\begin{aligned} u(x) &= u_i(x) \quad \forall x\in G_i, \\ u(x) &\leq p(x) \quad \forall x\in \bigcup_i G_i. \end{aligned}$$

وعليه $\bigcup_i G_i=E$. فلو كان عكس ذلك لوجد عنصر y_0 من E لا ينتمي إلى $\bigcup_i G_i$. نضع :

$$\widetilde{E}=\bigcup_i G_i\oplus \mathbb{R}y_0$$

ونعيد البرهان من أوله. فنجد أن u يقبل تمديدا $\tilde{u}$ إلى $\widetilde{E}$ وهو ما يتناقض مع كون $\left(\bigcup_i G_i,u_i\right)$ أعظميا.

[أ] مجموعة إستقرائية ⇔ لكل جزء مرتب ترتيبا جيدا منها حاد أعلى .
[ب] مسلمة زورون : لكل مجموعة مرتبة و إستقرائية وغير خالية عنصر أعظمي .

✍ الشكل المركب :

نظرية 5.3.2

إذا كان E فضاء شعاعي على $\mathbb{C}$ ،
و p شكل نصف خطي من E نحو $\mathbb{C}$ ،
و G فضاء شعاعي جزئي من E ،
و u_0 شكل خطي على G حيث:

$$|u_0(x)| \leq p(x), \forall x \in G$$

فإنه يوجد شكل خطي u على E بحيث $u/G = u_0$ و:
$|u(x)| \leq p(x), \forall x \in E$

البرهان

لنضع من أجل كل x من G :

$$v_0(x) = Reu_0(x).$$

يأتي أن v_0 شكل خطي على G المعتبر فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي E على $\mathbb{R}$. نلاحظ أن:

$$v_0(ix) = Reu_0(ix) = -\text{Im}u_0(x).$$

وعليه:

$$u_0(x) = Reu_0(x) + iImu_0(x) = v_0(x) - iv_0(ix).$$

من جهة أخرى, لدينا:

$$v_0(x) \leq |v_0(x)| \leq |u_0(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in G.$$

يوجد إذن v شكل خطي على $\mathbb{R}$ من, E نحو $\mathbb{C}$, يمدد v_0 إلى E كله ويحقق:

$$v(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

لنضع, الآن :

$$u(x) = v(x) - iv(ix).$$

يأتي أن u خطي على $\mathbb{C}$. وفعلا، يكفي من أجل ذلك أن نتأكد من أن :

$$\forall x \in E \quad u(ix) = iu(x).$$

لدينا :

$$u(ix) = v(ix) - iv(-x) = v(ix) + iv(x) = i(v(x) - iv(ix)) = iu(x).$$

يتبين، هكذا أن u شكل خطي, يمدد u_0 إلى E العقدي. بقي أن نتأكد من أن :

$$|u(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

من أجل ذلك نضع :

$$u(x) = re^{i\theta} \quad (r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]).$$

نستخلص عندئذ :

$$\begin{aligned}|u(x)| =& r = u(x)e^{-i\theta} = \mathrm{Re}\left(u(x)e^{-i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(u\left(xe^{-i\theta}\right)\right)\\ =& v\left(xe^{-i\theta}\right) \leq p\left(xe^{-i\theta}\right) = p(x).\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

لازمة 1.3.5

E فضاء شعاعي نظيمي على $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ ، F فضاء شعاعي جزئي من E . f شكل خطي مستمر من F نحو $\mathbb{K}$ ، يوجد إذن شكل خطي مستمر $\tilde{f}$ على E يمدد f بحيث : $\|\tilde{f}\|_E = \|f\|_{\mathscr{L}(F,\mathbb{K})}$.

لازمة 2.3.5

E فضاء شعاعي نظيمي على $\mathbb{K}$ إذا كان x_0 من E حيث $x_0 \neq 0$ يوجد شكل خطي مستمر $\tilde{f}$ على E بحيث : $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$ ، $\|\tilde{f}\| = 1$.

لازمة 3.3.5

E فضاء شعاعي نظيمي على $\mathbb{K}$ ، F فضاء شعاعي مغلق ، $x_0 \notin F$ ، يوجد شكل خطي مستمر $\tilde{f}$ على E حيث : $\tilde{f}(x_0) = 1, \tilde{f}(F) = \{0\}, \|\tilde{f}\|_E = \frac{1}{d(x_0,F)}$

لازمة 4.3.5

E فضاء شعاعي نظيمي على $\mathbb{K}$ ، F فضاء شعاعي جزئي من E إذا كان $x_0 \notin \overline{F}$ ، يوجد شكل خطي $\tilde{f}$ مستمر على E ويحقق : $\|\tilde{f}\| = 1, \tilde{f}(F) = \{0\}$

توطئة 1.3.5

E و F فضاءان لبناخ، f تطبيق خطي مستمر و غامر من E نحو F فإن صورة كل كرة مفتوحة من E مركزها 0_E فإنها تحتوي على كرة مفتوحة من F مركزها 0_F .

$$\forall B_0(0_E,\varepsilon), \exists B_0(0_F,\delta) / B_0(0_F,\delta) \subset f(B_0(0_E,\varepsilon))$$

التطبيق المفتوح :

نظرية 5.3.3

E و F فضاءان لبناخ، f تطبيق خطي مستمر و غامر من E نحو F فإن f مفتوح .

البرهان

$$\forall v \in \tau_E : f(v) \in \tau_F \Leftrightarrow \text{مفتوح } f$$

$$\forall x \in v, \exists B_0(x,\varepsilon) : B_0(x,\varepsilon) \subset v \Leftrightarrow \text{مفتوح من E } v$$

$$\forall y \in f(v), \exists B_0(y,\delta) : B_0(y,\delta) \subset f(v) \Leftrightarrow \text{مفتوح من F } f(v)$$

$$x \in v \Rightarrow \exists B_0(x,\varepsilon) / B_0(x,\varepsilon) \subset v \Rightarrow f(B_0(x,\varepsilon)) \subset f(v)$$

$$B_0(x,\varepsilon) = x + B_0(0_E,\varepsilon)$$

لأن :

$$t \in B_0(x,\varepsilon) \Leftrightarrow d(t,x) < \varepsilon \Leftrightarrow \|t-x\| < \varepsilon \Leftrightarrow \|t-x-0_E\| < \varepsilon$$

وعليه :

$$t-x \in B_0(0_E,\varepsilon) \Leftrightarrow t \in x + B_0(x,\varepsilon)$$

حسب التوطئة :

$$\forall B_0(0_E,\varepsilon), \exists B_0(0_F,\delta) / B_0(0_F,\delta) \subset f(B_0(0_E,\varepsilon))$$

$$\begin{aligned} B_0(x,\varepsilon) = x + B_0(0_E,\varepsilon) \Rightarrow f(B_0(x,\varepsilon)) &= f(x + B_0(0_E,\varepsilon)) \\ &= f(x) + f(B_0(0_E,\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$f(x) + B_0(0_F,\delta) \subset f(B_0(0_E,\varepsilon)) + f(x) \subset f(v)$$

وعليه :

$$y + B_0(0_F,\delta) \subset f(v)$$

إذن :

$$B_0(y,\delta) \subset f(v), \forall y \in f(v) : \exists B_0(y,\delta) / B_0(y,\delta) \subset f(v)$$

لازمة 5.3.5

E و F فضاءان لبناخ، fمن E نحو F تطبيق خطي مستمر و تقابل فإنه متشاكل .

مبرهنة 5.3.1

E و F فضاءان لبناخ، f من E نحو F تطبيق خطي غامر لدينا :

f مستمر $\Leftrightarrow Gr(f) = \{(x, f(x)) / x \in E\}$ مغلق من $E \times F$

البرهان

نعرف النظيم :

$$\|\|_{E\times F} : E \times F \to \mathbb{R}^+$$
$$(x, y) \to \|(x, y)\| = \sup_{(x,y)\in E\times F} (\|x\|, \|y\|)$$

$(E \times F, \|\|_{E\times F})$ فضاء لبناخ لأن E و F كذلك .

❖ برهان الإستلزام $\Leftarrow$:

f مستمر .

ليكن :

$$P_1 : E \times F \to E$$
$$(x, y) \to P_1(x, y) = x$$

$$P_2 : E \times F \to F$$
$$(x, y) \to P_2(x, y) = y$$

P_1 و P_2 خطيان و مستمران .

$$Gr(f) = \{(x, y) \in E \times F / y \in f(x)\}$$
$$y = P_2(x, y) = f \circ P_1(x, y) = f(x)$$
$$Gr(f) = \{(x, y) \in E \times F / P_2(x, y) = f \circ P_1(x, y)\}$$
$$Gr(f) = \{(x, y) \in E \times F / (P_2 - f \circ P_1)(x, y) = 0_F\}$$
$$Gr(f) = \{(x, y) \in E \times F / g(x, y) = 0_F\} = g^{-1}\{0_F\}$$

g مستمر، لأن $g = P_2 - f \circ P_1$.

$\{0_F\}$ مغلق لأن F فضاء شعاعي نظيمي وعليه F فضاء متري فهو .

إذن $Gr(f)$ مغلق .

❖ برهان الإستلزام $\Rightarrow$:

$$Gr(f) = \{(x,y) \in E \times F / y = f(x)\}$$

إذن : $Gr(f)$ فضاء شعاعي جزئي من $E \times F$ ؟

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in Gr(f), \forall (x',y') \in Gr(f) : \alpha(x,y) + \beta(x',y') \in Gr(f)$$

$y = f(x)$ ، $y' = f(x')$ ، $\alpha y + \alpha y' = f(\alpha x + \beta x')$

$Gr(f)$ مغلق من $E \times F$ تام، إذن $Gr(f)$ لبناخ .

مثال مضاد : $]0,1[\subset (\mathbb{R}, \tau_u)$

$$\begin{aligned} P_1 : Gr(f) &\to E \\ (x,y) &\to P_1(x,y) = x \end{aligned}$$

حسب لازمة التطبيق المفتوح P_1 متشاكل وعليه $P_1(Gr(f)) = E$

f مركب من تطبيقين خطيين مستمرين فهو مستمر $f = P_2 \circ P_1^{-1}$

$$f(x) = (P_2 \circ P_1^{-1})(x) = P_2(x, f(x)) = f(x)$$

P_1^{-1} و P_2 مستمرين فإن f مستمر .

5.4 تمارين مقترحة

التمرين الأول

ليكن $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ فضاء التطبيقات المستمرة من $[0,1]$ نحو $\mathbb{R}$.

❶ أثبت أن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

❷ من أجل $f\in E$ نضع :
$$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$$

- بين أن $(E,\|\|_1)$ فضاء نظيمي و البعد الناتج عنه (أو المرفق له) هو d بحيث :

$$\forall f,g\in E: d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$$

التمرين الثاني

ليكن E و F فضاءان نظيميان على نفس الجسم $\mathbb{K}$.

❶ لنبين أن $\mathscr{L}_c(E,F)$ فضاء التطبيقات الخطية المستمرة هو فضاء شعاعي جزئي من $\mathscr{L}(E,F)$ فضاء التطبيقات الخطية .

❷ ليكن E فضاء المتتاليات المركبة $(x_n)_{n\geq0}$ بحيث تكون السلسلة $\sum\limits_{n\geq0}n!|x_n|$ متقاربة،نضع $\|x_n\|=\sum\limits_{n\geq0}n!|x_n|$.

- بين أن $(E,\|\|)$ فضاء نظيمي .
- ليكن $f:l^1\to E$ بحيث l^1 هو فضاء المتتاليات المركبة $(x_n)_{n\geq0}$. بحيث تكون السلسلة $\sum\limits_{n\geq0}|x_n|$ متقاربة ،نعرف f بـ : $f(x_n)=\left(\frac{x_n}{n!}\right)_{n\geq0}$.

⋆ أثبت أن $f\in\mathscr{L}_c(l^1,E)$ ، ثم أحسب نظيمه .

⋆ إستنتج أن E هو فضاء لبناخ .

الفصل السادس

فضاء هيلبرت

تمهيد

نتناول هنا الفضاءات الهيلبرتية التي تعد ضربا هاما آخر من ضروب الفضاءات النظيمية،المؤلفة دراستها هدف فصلنا الثالث هذا .

6.1 الجداء السلمي و خصائصه

6.1.1 الأشكال الهرميتية

تعريف 1.1.6

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K}=\mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.
نسمي شكلا شبه ثنائي الخطية معرفا من E^2 نحو $\mathbb{K}$ كل تطبيق U يكون خطيا بالنسبة للمتغير الأول و نصف خطي بالنسبة للمتغير الثاني ،أي :

$$U : E \times E \to \mathbb{K}$$

❶ الخطية بالنسبة للمركبة الأولى :

$$\forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : U(\alpha x + \beta y, z) = \alpha U(x, z) + \beta U(y, z)$$

❷ شبه الخطية بالنسبة للمركبة الثانية :

$$\forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : U(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} U(x, y) + \bar{\beta} U(x, z)$$

حيث $\bar{\alpha}$ و $\bar{\beta}$ مرافقا α و β على الترتيب .

ملاحظة : إذا كان $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ أصبح U شكلا ثنائي الخطية .

تعريف 2.1.6

نقول عن الشكل شبه ثنائي الخطية U أنه هيرميتي إذا حقق :

$$\forall x, y \in E : U(y, x) = \overline{U(x, y)}$$

E المزود بشكل هيرميتي يسمى فضاء هيرميتي

قضية 6.1.1

إذا كان U شكلا شبه ثنائي الخطية على E^2 فإنه يكون لدينا عندئذ :

$$U \text{ هيرميتي } \Leftrightarrow \forall x \in E : U(x, x) \in \mathbb{R}$$

البرهان

✐ نبين الإستلزام $\Leftarrow$:

إذا كان U هيرميتي فإن :

$$\overline{U(x,x)} = U(x,x) \Rightarrow U(x,x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$$

✐ نبين الإستلزام $\Rightarrow$:

نعتبر العلاقتين التاليتين:

$$U(x+y,x+y) = U(x,x) + U(y,y) + U(x,y) + U(y,x) \quad (*)$$
$$U(ix+y,ix+y) = U(x,x) + U(y,y) + i\left[U(x,y) - U(y,x)\right] \quad (**)$$

نلاحظ أن في هاتين العلاقتين أن العناصر :

$$U(x+y,x+y); U(ix+y,ix+y); U(x,x); U(y,y)$$

أعداد حقيقية فرضا .نستخلص من $(*)$ أن:

$$\alpha = U(x,y) + U(y,x) \in \mathbb{R}$$

ومن $(**)$:

$$\beta = i[U(x,y) - U(y,x)] \in \mathbb{R}$$

وعليه :

$$U(x,y) = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)$$
$$U(y,x) = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)$$

ومنه : $\overline{U(y,x)} = U(x,y)$ (أي أنU هيرميتي).

تعريف 3.1.6

نقول عن الشكل الهيرميتي U إنه موجب إذا حقق:

$$\forall x \in E : U(x,x) \geq 0;$$

ويكون U معرفا موجبا إذا حقق:

$$\forall x \in E \setminus \{0\} : U(x,x) > 0.$$

تعريف 4.1.6

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ إذا حقق التطبيق U الخاصيات التالية :

❶ $\forall x \in E : U(x,x) \geq 0, U(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

❷ $\forall x, y \in E : U(x,x) = \overline{U(y,x)}$

❸ $\forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} (\alpha x + \beta y, z) = \alpha U(x,y) + \beta U(y,z)$

فإن U يسمي **جداء سلمي** نرمز له عادة بـ $\langle , \rangle$ و نكتب :

$$\begin{aligned} E \times E &\to \mathbb{K} \\ (x,y) &\mapsto U(x,y) = \langle x,y \rangle . \end{aligned}$$

و (E,U) يسمى فضاء شبه هيلـبـرتي .

أمثلة 1.1.6

❶ على $\mathbb{R}^n$ ، التطبيق U_1 جداء سلمي :

$$\begin{aligned} U_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto U_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \end{aligned}$$

❷ على $\mathbb{C}^n$ ، التطبيق U_2 جداء سلمي :

$$\begin{aligned} U_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\to U_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \end{aligned}$$

❸ على $\varphi([0,1],\mathbb{C})$ ، التطبيق U_3 جداء سلمي :

$$\begin{aligned} U_3 : \varphi([0,1],\mathbb{C}) \times \varphi([0,1],\mathbb{C}) &\to \mathbb{C} \\ (f,g) &\to u_3(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt \end{aligned}$$

متباينة كوشي-شوارتز (Inégalité de Cauchy-Schwarz):

قضية 6.1.2

إذا كان U شكلا هيرميتيا موجبا فإن :

$$\forall x,y\in E : |U(x,y)|^2 \leq U(x,x).U(y,y)$$

البرهان

من أجل كل λ من $\mathbb{K}$ نكتب :

$$0\leq U(\lambda x+y,\lambda x+y)=\lambda\overline{\lambda}U(x,x)+U(y,y)+\lambda U(x,y)+\overline{\lambda}U(y,x)\quad (*)$$

لنضع :

$$U(x,x)=a, U(x,y)=b, U(y,y)=c.$$

تأخذ بذلك العلاقة $(*)$ الشكل التالي :

$$a\lambda\overline{\lambda}+\lambda b+\overline{b\lambda}+c\geq 0.\quad (**)$$

إذا كان $a=c=0$ حصلنا من $(**)$ على:

$$-b\overline{b}-b\overline{b}=-2|b|^2\geq 0.$$

وعليه، $b=0$. العلاقة المدروسة صحيحة في هذه الحالة.

إذا كان $a\neq 0$ حصلنا من أجل $\lambda=-\frac{\overline{b}}{a}$ على :

$$a\left(-\frac{\overline{b}}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)-\frac{\overline{b}}{a}b-\frac{\overline{b\overline{b}}}{a}+c\geq 0.$$

أي:

$$-\frac{|b|^2}{a}+c\geq 0.$$

وعليه:

$$|b|^2\leq ac.$$

متباينة مينكوفسكي (Inégalité de MinKowsKy):

قضية 6.1.3

إذا كان U جداء سلميا على E كان لدينا عندئذ :

$$\forall x, y \in E : [U(x+y, x+y)]^{\frac{1}{2}} \leq [U(x,x)]^{\frac{1}{2}} + [U(y,y)]^{\frac{1}{2}}.$$

البرهان

نعلم أن :

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

و

$$\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} = 2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle$$

إذن :

$$\begin{aligned}|\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle| &= 2\,|\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle| \leq 2\,|\langle x,y\rangle| \\ &\leq 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}\end{aligned}$$

من جهة أخرى :

$$|\langle x+y, x+y\rangle| \leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$$
$$|\langle x+y, x+y\rangle| \leq \left(\sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2$$

أي :

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

تعريف 5.1.6

نسمي فضاء شبه هيلبرتي كل فضاء شعاعي E يكون مزودا بنظيم ملحق بجداء سلمي .

أمثلة 2.1.6

❶ $E=\mathbb{C}^n$ المزود بالجداء السلمي $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$ فضاء شبه هيلبرتي .

❷ $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ المزود بالجداء السلمي $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ فضاء شبه هيلبرتي .

ملاحظة : كل فضاء شبه هيلبرتي فضاء نظيمي ، فهو إذن فضاء طبولوجي .

قضية 6.1.4

ليكن $(E,\langle.\rangle)$ فضاء شبه هيلبرتي ،إذن التطبيق :

$$\begin{aligned}N:E&\to\mathbb{R}^+\\ x&\mapsto N(x)=\sqrt{\langle x,x\rangle}\end{aligned}$$

يشكل نظيم .

البرهان

بما أن الجداء السلمي $\langle.\rangle$ موجب إذن N معرف جيدا ،و لدينا :

❶ $\forall x\in E: N(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{\langle x,x\rangle}=0\Leftrightarrow\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$

❷

$$\begin{aligned}\forall x\in E,\forall\lambda\in\mathbb{K}:N(\lambda x)&=\sqrt{\langle\lambda x,\lambda x\rangle}\\&=\sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x,x\rangle}=\sqrt{|\lambda|^2\langle x,x\rangle}\\&=|\lambda|\langle x,x\rangle\\&=|\lambda|N(x)\end{aligned}$$

❸ لأجل كل x ، y من E ومن متباينة مينكوفيسكي لدينا :

$$N(x+y)=\sqrt{\langle x+y,x+y\rangle}\leq\sqrt{\langle x,x\rangle}+\sqrt{\langle y,y\rangle}=N(x)+N(y)$$

تعريف 6.1.6

نسمي فضاء هيلبرتي كل فضاء شبه هيلبرتي تام.

ملاحظة :

يترتب عن هذا التعريف بالخصوص أن كل فضاء هيلبرتي فضاء بناخي متميز. نستخلص مما سبق أن الفضاءات $L^p([a,b])$ ، $1 \leq p$ فضاءات بناخية في حين لا يكون منها هيلبرتيا سوى $L^2([a,b])$

أمثلة 3.1.6

1. إن الفضاء $\mathbb{C}^n$ هيلبرتي إذا ما زود بجداءه السلمي التقليدي $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$.

2. إن الفضاء $l^2(\mathbb{K})$ ، المؤلف من متتاليات الأعداد $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{K}$ التي يكون من أجلها المجموع $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ منتهيا ، فضاء هيلبرتي إذا ما زودناه بالجداء السلمي $\langle x,y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n}$.

6.2 التعامد

تعريف 1.2.6

ليكن x و y عنصرين من فضاء شبه هيلبرتي E، نقول عنهما أنهما متعامدان إذا كان جداؤهما السلمي معدوما،ونكتب :

$$\langle x,y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$$

أمثلة 1،2،6

❶ نأخذ $E = \mathbb{C}^n$ مزودا بجدائه السلمي التقليدي $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$

ونعتبر عائلة الأشعة :

$$(e_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n} = \left(\left(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ \alpha}}{1},0,\dots,0\right)\right).$$

من أجل كل سلميين مختلفين α و β لدينا $e_\alpha \perp e_\beta$ ذلك لأن $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = 0$.

❷ نضع $E = \varphi([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ ، مع $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) \quad dt$. نعتبر في E العائلة $(f_n)_n$ بحيث :

$$f_n(t) = \cos nt; n \geq 0.$$

من أجل عددين طبيعيين مختلفين m و n لدينا :

$$\langle f_n, f_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)t + \cos(m-n)t]dt = 0.$$

خصائص :

❶ $\forall x \in \mathrm{E} : x \perp 0$

❷ $\forall x,y \in E, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}^* : x \perp y \Leftrightarrow \alpha x \perp \beta y$

❸ $\forall x, y_i \in E, \forall \alpha_i \in \mathbb{K} : x \perp y_i \Leftrightarrow x \perp \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i; (1 \leq i \leq n)$

تعريف 2.2.6

ليكن F جزءا غير خالي من فضاء شبه هيلبرتي E . نقول عن عنصر y من E إنه عمودي على F إذا كان عموديا على كل عنصر x من F. ونكتب :

$$x \perp F \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in F.$$

تعريف 3.2.6

ليكن F_1 و F_2 جزأين غير خاليين من فضاء شبه هيلبرتي E .
نقول عنهما أنهما متعامدان إذا كان كل عنصر من أحدهما عموديا على كل عنصر من الآخر .ونكتب :

$$\forall x \in F_1, \forall y \in F_2 : \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow F_1 \perp F_2$$

ونسمي عمودي جزء E من F مجموعة العناصر من E العمودية على F ، ونرمز له بـ $F^{\perp}$. نكتب عندئذ :

$$F^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in F\}$$

قضية 6.2.1

ليكن A و B جزءان غير خاليين من E ، لدينا العلاقات التالية :

1. $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
2. $E^{\perp} = \{0\}$.
3. $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ إذا كان $0 \in A$ أو $A \cap A^{\perp} = \{\emptyset\}$ إذا كان $0 \notin A$.
4. من أجل كل جزء غير خال A من E يكون العمودي $A^{\perp}$ فضاء شعاعيا جزئيا مغلقا.

البرهان

1. إذا كان $A \subset B$ لدينا :

$$x \in B^{\perp} \Rightarrow \forall b \in B; \langle x, b\rangle = 0 \Rightarrow \forall a \in A; \langle x, a\rangle = 0 \Rightarrow x \in A^{\perp}$$

2. $\langle x, 0\rangle = 0, \forall x \in E$ إذن $\{0\} \subset E^{\perp}$.

عكسيا، إذا كان $y \in F^{\perp}$ إذن

$$\forall x \in E, \langle x, y\rangle = 0$$

بصفة خاصة لأجل $x = y$ ، نجد $\langle y, y\rangle = 0$ أي $y = 0$ ، وعليه $E^{\perp} = \{0\}$.

❸ ليكن $x \in A \cap A^{\perp}$ ، وعليه $\forall y \in E, \langle x, y\rangle = 0$.

بصفة خاصة لأجل $y = x \in A$ ، نجد $\langle x, x\rangle = 0$ ، حيث $x = 0$.

كذلك إذا كان $0 \in A$ ، فإن $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ ، أو $A \cap A^{\perp} = \{\emptyset\}$.

❹ واضح أن $A^{\perp} = \bigcap_{a \in A} \{a\}^{\perp}$ ،

وعليه يكفي تبيان أن $\{a\}^{\perp}$ فضاء شعاعي جزئي مغلق .

من الخاصية ، $\{a\}^{\perp}$ هو فضاء شعاعي جزئي من E . نبين أنه مغلق ،نعتبر التطبيق f المعرف بـ :

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \langle x, a\rangle , \end{aligned}$$

f مستمر ،و $\{a\}^{\perp} = f^{-1}(\{0\})$ ، إذن $\{a\}^{\perp}$ مغلق .

قضية 6.2.2

إذا كان F جزءا غير خال من فضاء شبه هيلبرتي E فإن :

$$F^{\perp} = [F]^{\perp} = \overline{[F]}^{\perp}$$

حيث $[F]$ يرمز للفضاء الشعاعي المولد بواسطة F .

البرهان

إذا ستحضرنا القضية السابقة حق لنا أن نكتب :

$$\overline{[F]}^{\perp} \subseteq [F]^{\perp} \subseteq F^{\perp}$$

من جهة أخرى ، تسمح الخاصية (3) بالحصول على :

$$F^{\perp} \subseteq [F]^{\perp}$$

أخيرا، نعلم أن كل عنصر y من $\overline{[F]}$ نهاية لمتتالية $(y_n)_n$ من $[F]$. ولما كان الجداء السلمي مستمرا جاز لنا أن نكتب من أجل كل x من $[F]^{\perp}$ و y من $\overline{[F]}$:

$$\langle x, y\rangle = \left\langle x, \lim_{n\to\infty} y_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n\rangle = 0.$$

ومنه: $[F]^{\perp} \subseteq \overline{[F]}^{\perp}$

✍ **مطابقة متوازي الأضلاع** (Identité de parallélograme):

قضية 6.2.3

✍ من أجل كل شعاعين x و y من فضاء شبه هيلبرتي E تكون لدينا المساواة التالية :

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2 \qquad (*)$$

لكي يكون فضاء نظيمي $(E,\|.\|)$ فضاء شبه هيلبرتي يلزم و يكفي أن يحقق نظيمه المطابقة $(*)$

البرهان

✍ ليكن $(E,\langle .\rangle)$ فضاء شبه هيـلبرتي ، وعليه :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle\\ &=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2+\|x\|^2\\ &\quad-\langle y,x\rangle-\langle x,y\rangle+\|x\|^2+\|y\|^2\\ &=2\|x\|^2+2\|y\|^2.\end{aligned}$$

✍ ليكن $(E,\|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي حيث نظيمه يحقق $(*)$.

لأجل $\mathbb{R}=\mathbb{K}$ ، نضع :

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right]$$

❶ نبين أولا أن $\langle .\rangle$ معرف موجب أي :

لأجل $\forall x\in E, \langle x,x\rangle=\|x\|>0,\ x\neq 0$

إذا كان $\langle x,x\rangle=\|x\|^2=0,\ x=0$.

إذن $\langle .\rangle$ معرف موجب .

❷ نبين أن $\langle .\rangle$ متناظر :

$$\langle y,x\rangle=\frac{1}{4}\left[\|y+x\|^2-\|y-x\|^2\right]=\langle x,y\rangle$$

❸ نبين أن $\langle .\rangle$ ثنائي الخطية :

يكفي أن نبين أن $\langle . \rangle$ خطي بالنسبة للمتغير الأول .

$$\forall x,y,z\in E, \langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$$
$$\forall \lambda\in\mathbb{R}:\langle \lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$$

نضع :

$$\varphi(x,y,z)=4[\langle x+y\rangle-\langle x,z\rangle-\langle y,z\rangle]$$

لدينا :

$$\varphi(x,y,z)=\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2-\|x+z\|^2+\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2$$

ومن $(*)$

$$\|x+y+z\|^2=2\|x+z\|^2+2\|y\|^2-\|x+y-z\|^2$$
$$\|x+y-z\|^2=2\|x-z\|^2+2\|y\|^2-\|x-z-y\|^2$$

إذن

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)=&2\|x+z\|^2+2\|y\|^2-2\|x-z\|^2-2\|y\|+\|x-z-y\|^2\\&-\|x+y-z\|^2-\|x+z\|^2+\|x-z\|^2-\|y+z\|^2-\|y-z\|^2\\=&\|x-z-y\|^2-\|x+z-y\|^2+\|x+z\|^2-\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2\end{aligned}$$

ومن العبارة الأولى لـ $\varphi(x,y,z)$ ، نحصل على :

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)=&\frac{1}{2}[\|x-z-y\|^2+\|x+y+z\|^2]-\frac{1}{2}[\|x+y-z\|^2+\|x+z-y\|^2]\\&-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2.\\&\Rightarrow\|x\|^2+\|z+y\|^2-\|x\|^2-\|y-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2=0\\&\Rightarrow\forall x,y,z\ \langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle.\end{aligned}$$

❹ نبين أن $\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall x,y\in E:\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$

❶ إذا كان $\lambda=0$

$$\langle 0.x,y\rangle=\langle 0,y\rangle=0=0.\langle x,y\rangle$$

❷ إذا كان $\lambda=-1$

$$\begin{aligned}\langle -x,y\rangle=&\frac{1}{4}[\|-x+y\|^2-\|-x-y\|^2]\\=&\frac{1}{4}[\|x-y\|^2-\|x+y\|^2]\\=&-\frac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2]\\=&-\langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

❸ إذا كان $\lambda = n \in \mathbb{N}$

نجد $\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle$.

❹ إذا كان $\lambda = m \in \mathbb{Z}$

لأجل $m \leq 0$ ، نعوض بـ $-m$ فنجد نفس الحالة الثانية

❺ إذا كان $\lambda = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}$، إذن لدينا :

$$\langle x, y\rangle = \left\langle n.\frac{x}{n}, y\right\rangle = n\left\langle \frac{x}{n}, y\right\rangle \Rightarrow \left\langle \frac{x}{n}, y\right\rangle = \frac{1}{n}\langle x, y\rangle$$

❻ إذا كان $\lambda = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$، من الحالة الرابعة و الخامسة نجد

$$\left\langle \frac{m}{n}.x, y\right\rangle = \frac{m}{n}\langle x, y\rangle$$

❼ إذا كان $\lambda \in \mathbb{R}$

نعلم أن $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ، إذن $\exists q_n \in \mathbb{Q}$ ، $\lim q_n = \lambda$ وعليه :

$$\langle \lambda x, y\rangle = \langle \lim q_n x, y\rangle = \lim q_n \langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

مبرهنة 6.2.1

✍ **(فيتاغورس)** ليكن E فضاء شبه هيلبرتي على $\mathbb{C}$ يكون لدينا عندئذ :

$$x, y \in E : x \perp y \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2, \\ \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+iy\|^2. \end{cases}$$

البرهان

لدينا $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$

إذن :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

قضية 6.2.4

إذا كانت $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ عائلة من أشعة متعامدة مثنى مثنى في فضاء شبه هيلبرتي كانت عندئذ مستقلة خطيا.

البرهان

ليكن $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ ، مع $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$

لأجل كل $k = \overline{1,n}$ ، لدينا $\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x_k \right\rangle = 0$ لكن

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, x_k \rangle = \alpha_k \|x_k\|^2 = 0$$

أي : $\forall k = \overline{1,n} : \alpha_k = 0$ وعليه $(x_i)_{1\le i\le n}$ مستقلة خطيا .

6.3 الإسقاط

تعريف 1.3.6

ليكن E فضاء شعاعي نظيمي و F فضاء شعاعي جزئي مغلق من E ولتكن a نقطة من E نسمي مسقط النقطة a على F كل نقطة b من F تحقق :

$$\|a-b\| = d(a,F) = \inf_{x\in F} d(a,x)$$

أمثلة 1.3.6

ليكن E فضاء شبه هيلبرتي و $F = B_f(0,1)$ كرة الوحدة المغلقة فيه .
لكل عنصر x من E مسقط x' على F حيث :

$$x' = \begin{cases} x & ; x\in F \\ \frac{1}{\|x\|}x & ; x\notin F \end{cases}$$

❶ إذا كان $x\in F$ فواضح تعريفا أن $x = x'$ ، لأن $d(x,F) = d(x,x') = 0$

❷ إذا كان $x\notin F$ نثبت المساواة $d(x,F) = \|x-x'\|$

لدينا :

$$\begin{aligned} \|x-x'\| &= \left\| x - \frac{1}{\|x\|}x \right\| \\ &= \left\| \frac{\|x\|-1}{\|x\|}x \right\| \\ &= \|x\|-1 \end{aligned}$$

$$\forall y\in B_f(0,1), \|y\|\le 1 \Rightarrow \|x\|-1 \le \|x\|-\|y\|$$

ومنه :

$$\|x\|-1 \le \|x-y\| = d(x,F)$$

عكسيا :

$$\frac{x}{\|x\|}\in B_f(0,1) \Rightarrow \left\| x - \frac{x}{\|x\|} \right\| \ge \inf_{y\in B_f(0,1)} d(x,y) = d(x,F)$$

وعليه : $\|x\|-1 = d(x,F)$

إذن :

$$d(x,F) = \|x\| - 1 = \left\|x - x'\right\|$$

نظرية 6.3.1

متطابقة المتوسط في مثلث :
لتكن a ، b ، c ثلاث نقاط من فضاء شبه هيلبرتي H و m منتصف القطعة المستقيمة $[bc]$ يكون لدينا عندئذ :

$$\|a-b\|^2 + \|a-c\|^2 = \frac{1}{2}\|b-c\|^2 + 2\|a-m\|^2$$

البرهان

نضع $x = a-b$ و $y = a-c$

لدينا :

$$y - x = b - c$$

وعليه :

$$\begin{aligned} 2\left(a - \frac{b+c}{2}\right) &= 2a - b - c \\ &= a - b + a - c \\ &= x + y \end{aligned}$$

بتطبيق متطابقة متوازي الأضلاع نحصل على :

$$\left\|2\left(a - \tfrac{b+c}{2}\right)\right\|^2 + \|b-c\|^2 = 2\|a-b\|^2 + 2\|a-c\|^2$$

$$4\left\|a - \tfrac{b+c}{2}\right\|^2 + \|b-c\|^2 = 2\|a-b\|^2 + 2\|a-c\|^2$$

وعليه :

$$2\left\|a - \tfrac{b+c}{2}\right\|^2 + \tfrac{1}{2}\|b-c\|^2 = \|a-b\|^2 + \|a-c\|^2$$

مبرهنة 6.3.1

الإسقاط : إذا كان H فضاء شبه هيلبرتي على $\mathbb{K}$ و F فضاء شعاعيا جزئيا تام فإن :

❶ لكل نقطة a من H مسقط وحيد b من F .

❷ b هي النقطة الوحيدة التي تجعل الشعاع $a-b$ عموديا على F ، أي أن :

$$\forall x \in F : \langle a-b, x\rangle = 0$$

البرهان

❶ نضع :

$$r = d(a, F) = \inf_{x\in F}(a, x)$$

إذن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in F : r \leq \|a - x_n\| \leq r + \frac{1}{n}$$

بتطبيق متطابقة المتوسط نجد :

$$\left\|a-x_p\right\|^2 + \left\|a-x_q\right\|^2 = 2\left\|a - \frac{x_p+x_q}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|x_p - x_q\right\|^2$$

وعليه :

$$\frac{1}{2}\left\|x_p-x_q\right\|^2 = \left\|a-x_p\right\|^2 + \left\|a-x_q\right\| - 2\left\|a-\frac{x_p+x_q}{2}\right\|$$

لدينا :

$$\frac{x_p+x_q}{2} \in F \Rightarrow \left\|a - \frac{x_p+x_q}{2}\right\| \geq r$$

إذن :

$$-2\left\|a - \frac{x_p+x_q}{2}\right\|^2 \leq -2r^2$$

كذلك :

$$\frac{1}{2}\left\|x_p-x_q\right\|^2 \leq \left\|a-x_p\right\|^2 + \left\|a+x_p\right\|^2 - 2r^2$$
$$\lim_{p,q\to\infty}\frac{1}{2}\left\|x_p-x_q\right\|^2 \leq \lim_{p,q\to\infty}\left(\left\|a-x_p\right\|^2 + \left\|a+x_p\right\|^2 - 2r^2\right)$$

إذن :

$$\lim_{p,q\to\infty}\frac{1}{2}\left\|x_p-x_q\right\|^2 = 0$$

x_n متتالية كوشي إذن فهي متقاربة نحو النقطة $b \in F$ ، و :

$$\|b-a\| = \left\|\lim_{n\to\infty} x_n - a\right\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - a\| = r$$

أي :

$$r = \|b-a\| = \inf_{x\in F} d(a,x)$$

❷ نبرهن أن b وحيدة : نفرض أنه يوجد b' حيث $\|a-b'\| = r; b' \in F$

من متطابقة المتوسط :

$$\|a-b\|^2 + \|a-b'\|^2 = 2\left\|a - \tfrac{b+b'}{2}\right\| + \tfrac{1}{2}\|b-b'\|^2$$

نجد :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|b-b'\right\|^2 =& \|a-b\|^2 + \left\|a-b'\right\|^2 - 2\left\|a - \frac{b+b'}{2}\right\| \\ =& r^2 + r^2 - 2\left\|a - \frac{b+b'}{2}\right\| \\ \le& 2r^2 - 2r^2 = 0 \Rightarrow b = b'\end{aligned}$$

نبين أن b تحقق :

$$\langle a-b, F\rangle = 0$$

معناه :

$$\forall x \in F; \langle a-b, x\rangle = 0$$

لأجل كل x من F و λ من $\mathbb{K}$ ، $b - \lambda x \in F$ ، وعليه :

$$\begin{aligned}\|a-b\|^2 \le& \|a-(b-\lambda x)\|^2 \\ =& \|(a-b)+\lambda x\|^2 \\ =& \left\|(a-b)^2\right\| + |\lambda|^2\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle a-b, \lambda x\rangle .\end{aligned}$$

و

$$\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda|^2\|x\|^2 + 2\lambda\mathrm{Re}\,\langle a-b, x\rangle \ge 0.$$

وبصفة خاصة :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\mathrm{Re}\,\langle a-b, x\rangle \ge 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\,\langle a-b, x\rangle = 0.$$

نعوض x بـ ix نحصل على :

$$\begin{aligned}\lambda^2\|ix\|^2+2\lambda\mathrm{Re}\langle a-b,ix\rangle\geq 0 &\Rightarrow \lambda^2\|x\|^2+2\lambda\mathrm{Re}\left(i\langle a-b,x\rangle\right)\geq 0\\ &\Rightarrow \lambda^2\|x\|^2+2\lambda\mathrm{Im}\langle a-b,x\rangle\geq 0,\end{aligned}$$

$\mathrm{Im}\langle a-b,x\rangle=0$ ، وعليه لأجل كل $x\in F$ لدينا $\langle a-b,x\rangle=0$.

نفرض أنه يوجد $b'\in F$ بحيث :

$$\forall x\in F, \langle a-b',x\rangle=0, b\neq b'.$$

لدينا :

$$\begin{aligned}b,b'\in F &\Rightarrow b-b'\in F\Rightarrow \left\langle a-b',b-b'\right\rangle=0\Rightarrow a-b'\perp b-b'\\ &\Rightarrow \left\|a-b'\right\|^2+\left\|b-b'\right\|^2=\|a-b\|^2.\end{aligned}$$

بحيث :

$$\|b-b'\|^2\neq 0\Rightarrow \|a-b\|^2>\|a-b'\|^2\Rightarrow \|a-b\|>\|a-b'\|.$$

وهذا مستحيل لأن :

$$\|a-b\|=d(a,F)=\inf_{x\in F}\|a-x\|\leq\|a-b'\|.$$

كذلك $b=b'$.

ملاحظة : المبرهنة تبقى صحيحة إذا كان H فضاء هيلبرت و F فضاء شعاعي جزئي مغلق من H .

قضية 6.3.1

ليكن H فضاء هيلبرتي و F جزء غير خال منه. يكون لدينا عندئذ :

$$F^\perp=\{0\}\Leftrightarrow\overline{[F]}=H$$

البرهان

نعلم أن $F^\perp=\overline{[F]}^\perp$ ، وعليه إذا كان $\overline{[F]}=H$ ، نجد :

$$\overline{[F]}^\perp=H^\perp=\{0\}.$$

عكسيا نفرض أن $\overline{[F]} \neq H$ ، إذن يوجد $a \in H$ ، و $a \notin \overline{[F]}$. من مبرهنة الإسقاط :

$$\exists b \in \overline{[F]} : a - b \perp \overline{[F]} \Rightarrow a - b \in F^{\perp} = \{0\} \Rightarrow a = b,$$

وهذا غير منطقي لأن $a \notin \overline{[F]}$ ، وعليه $\overline{[F]} = H$.

تعريف 2.3.6

ليكن H فضاء هيلبرت و F فضاء شعاعي جزئي مغلق في H . نسمي إسقاط على F التطبيق الذي نرمز له بـ P_F والذي يربط كل عنصر x من H بمسقطه b من F .

$$\begin{aligned} P_F &: H \to F \\ & x \mapsto P_F(x) = b / d(x, F) = \|x - b\|. \end{aligned}$$

وعليه $P_F(x)$ هو النقطة الوحيدة من F التي تحقق :

$$x - P_F(x) \in F^{\perp} \Leftrightarrow \langle x - P_F(x), y \rangle = 0, \forall y \in F.$$

قضية 6.3.2

❶ $F = \{x \in H, P_F(x) = x\}$

❷ P_F تطبيق خطي مستمر .

❸ $Ker P_F = F^{\perp}$

❹ $H = F \oplus F^{\perp}$

❺ $\forall x \in H, x = P_F(x) + P_{F^{\perp}}(x)$

❻ $\forall x \in H, \|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_{F^{\perp}}(x)\|$

البرهان

❶ إذا كان $x \in F$ ، فإن $P_F(x) = x$. عكسيا إذا كان $P_F(x) = x$ ، فإن $x \in F$ ، لأن $P_F(x) \in F$.

❷ ليكن $x, y \in H$ و $\alpha \in \mathbb{K}$ ، نبين أن :

$$P_F(\alpha x + y) = \alpha P_F(x) + P_F(y).$$

لدينا لأجل كل $z\in F$ ،

$$\begin{aligned}\langle(\alpha x+y)-(\alpha P_F(x)+P_F(y),z)\rangle &=\langle\alpha(x+P_F(x))+y-P_F(y),z\rangle\\ &=\alpha\langle x-P_F(x),z\rangle+\langle y-P_F(y),z\rangle=0.\end{aligned}$$

وعليه :

$$\alpha P_F(x)+P_F(y)=P_F(\alpha x+y).$$

نبين أن P_F مستمر :

$$\begin{aligned}\forall x\in H, x-P_F(x)\in F^{\perp} &\Rightarrow\langle x-P_F(x),P_F(x)\rangle=0.\\ &\Rightarrow x-P_F(x)\perp P_F(x).\\ &\Rightarrow\|x-P_F(x)\|^2+\|P_F(x)\|^2=\|x\|^2.\\ &\Rightarrow\|P_F(x)\|^2\leq\|x\|^2.\\ &\Rightarrow\|P_F(x)\|\leq\|x\|.\end{aligned}$$

إذن P_F تطبيق مستمر .

❸

$$\begin{aligned}x\in Ker P_F &\Leftrightarrow P_F(x)=0.\\ &\Leftrightarrow\forall y\in F,\langle x-0,y\rangle=0.\\ &\Leftrightarrow\forall y\in F,\langle x,y\rangle=0.\\ &\Leftrightarrow x\in F^{\perp}.\end{aligned}$$

❹ لأجل كل $x\in H$ لدينا :

$$x=P_F(x)+(x-P_F(x))\in F+F^{\perp}$$

بالإضافة إلى ذلك $F\cap F^{\perp}=\{0\}$ ، لأن F فضاء شعاعي جزئي، وعليه $0\in F$ و $H=F\oplus F^{\perp}$.

❺ لكي نبرهن أن $x=P_F(x)+P_{F^{\perp}}(x)$ ، يجب أن نبين أن :

$$x-P_F(x)=P_{F^{\perp}}(x).$$

لأجل كل $z\in F^{\perp}$ لدينا :

$$\langle x-(x-P_F(x)),z\rangle=0\Leftrightarrow\langle P_F(x),z\rangle=0,$$

وهي محققة لأن $P_F(x) \in F$ و $z \in F^{\perp}$ ، وعليه :

$$x = P_F(x) + P_{F^{\perp}}(x)$$

المراجع العلمية

[1] م. حــازي : المقعد المجلي للتحليل الدالي ، ديوان المطبوعات الجامعية 2013.

[2] الدكتور غفار حسين موسى : مقدمة في الطبولوجيا ، جامعة الزرقاء الأهلية.

[3] الدكتور خضر حامد الأحمد : مبادئ أولية في الطبولوجيا ، جامعة دمشق**1993 – 1992**م .

قائمــة المراجع باللغة الفرنسية

[4] G.Choquet, Cours de Topologie, Masson, 1984.

[5] L.Schwartz, Analyse : Topologie générale et analyse fonctionnelle , Hermann, 1970.

⁕ دليل المصطلحات العلمية ⁕

المصطلح بالإنجليزية	المصطلح بالفرنسية	المصطلح بالعربية
closure	Adhérence	ملاصقة
Aplication linear	Aplication linéaire	تطبيق خطي
Banach Space	Espace de Banach	فضاء بناخ
Bilinear	Belinéaire	ثنائي الخطية
Class of equivalence	Classe d'équivalence	صنف تكافؤ
Continuous	Continu	مستمر
Dual	Dual	ثنوي
Vectorial space	Espace vectoriel	فضاء شعاعي
Normed space	Espace Normé	فضاء نظيمي
Hilbert space	Espace de Hilbert	فضاء هيلبرتي
Form	Forme	شكل
Hermitian	Hermitien	هيرميتي
Identity	Identité	متطابقة
Metric	Métrique	متري
Norm	Norme	نظيم
Scalar Product	Produit scalaire	جداء سلمي
Projection	Projection	إسقاط
Positive	Positive	موجب
Hafl-linear	Semi-linéaire	نصف خطي
Sesquilinear	Sesquilinéaire	شبه ثنائي الخطية
Topological	Topologique	طبولوجي