Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Ecole Normale Supérieure d'ORAN

Département : sciences Exacte

Intitule du projet :

Structuration et planification du cours TOPOLOGIE en vue d'un enseignement hybride au profit des étudiants " 2ème Années Mathématique" PES/PEM

Portfolio présenté par :
MEDJAHDI Brahim

Portfolio présenté dans le cadre de la formation aux "TICE et pratique pédagogique".assurée par l'université frères Mentouri Constantine1"

Semaine du numérique 01-07 septembre 2019
Année académique 2018-2019

Table des matières

Notation

TIC : Techniques de l'Information et de la Communication
NTIC : nouvelles technologies de l'information et de la communication
APO : l'Approche Par Objectifs
APC : l'Approche Par Compétences
C C : Carte conceptuelle

0.1 Introduction

Cette formation vise à nous apprendre les notions fondamentales pour le montage et l'implémentation d'un dispositif de formation en ligne tout en assurant un accompagnement de qualité à nos étudiants. Elle sert aussi à présenter les mécanismes de la pédagogie universitaire qui nous permettent d'assurer un enseignement hybride de qualité répondant aux exigences de la société à l'ère du numérique.

La formation est divisée en cinq ateliers, le premier atelier nommé Outils d'aides à l'utilisation des TIC dans l'enseignement (C2I).

Le terme TIC (Techniques de l'Information et de la Communication appelé généralement Technologies de l'Information et de la Communication dans le langage courant) couvre un large éventail de services, applications, technologies, équipements et logiciels, c'est-à-dire les outils comme la téléphonie et l'Internet, l'apprentissage à distance, les télévisions, les ordinateurs, les réseaux et les logiciels nécessaires pour employer ces technologies.

Les notions de technologies de l'information et de la communication (TIC) et de nouvelles technologies de l'information et de la communication (NTIC)(en anglais, Information and communication technologies, ICT) regroupent les techniques utilisées dans le traitement et la transmission des informations, principalement de l'informatique, de l' internet et des télécommunications.

Les technologies de l'information et de la communication « TIC » prennent de plus en plus d'importance dans le développement des pays. Grâce à une recherche scientifique performante, les TIC offrent des possibilités techniques avantageuses, mais sont beaucoup plus, des facilitateurs du travail, elles permettent de faire face aux défis posés, non seulement par l'explosion des connaissances mais aussi, plus largement, par la volonté de créer un développement durable pour toute la société.

La formation « en ligne » dite « e-learning » est « l'utilisation des nouvelles technologies multimédias de l'Internet pour améliorer la qualité de l'apprentissage en facilitant d'une part l'accès à des ressources et à des services, d'autre part les échanges et la collaboration à distance » (Commission européenne, 2001)

Le e-learning fait partie des technologies de l'information et de la communication pour l'éducation (TICE) et permet de réaliser des activités non présentielles. Il s'agit le plus souvent de l'utilisation d'ordinateurs ou d'appareils mobiles (smartphones, tablettes, PDA, etc.) connectés à Internet.

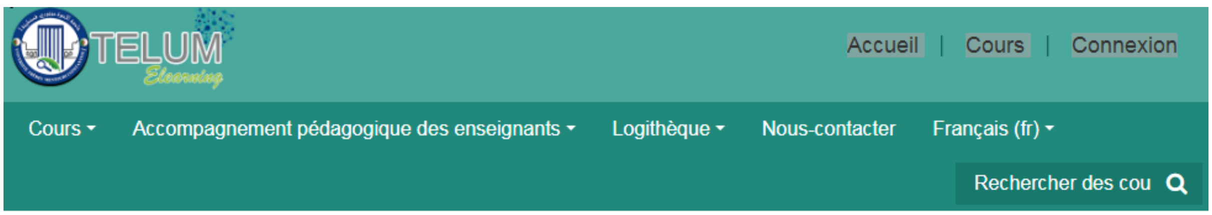
L'e-learning (elearning) ou formation en ligne, permet de suivre une formation à distance sans se déplacer au centre de formation ou de faire venir un formateur dans l'entreprise. Il suffit un ordinateur équipé d'une connexion à Internet. Les contenus constituent une étape plus avancée que l'utilisation du CD-Rom ou les cours sont dispensés en salle.

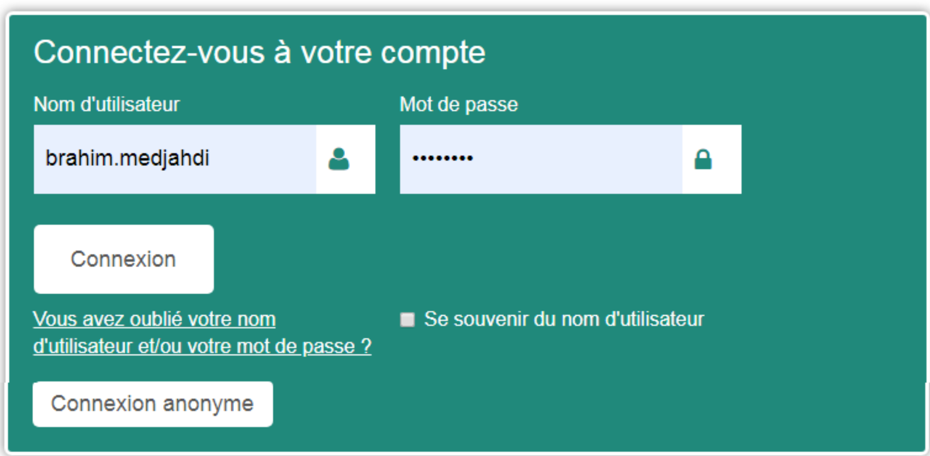
L'e-Learning est également en plein essor en Algérie, l'Université Constantine 1 est jouée un rôle moteur depuis le démarrage de ce processus elle est dotée de centres ou cellules internes qui, aident les enseignants dans le portage en ligne de leurs cours.

L'université des frères Mentouri, Constantine 1, programme une formation sur L'eLearning aux enseignants nouvellement recrutés chaque année. La formation portera sur la conception, la réalisation et la gestion de cours en ligne. En d'autres termes, elle permettra de faire comprendre comment concevoir un cours en ligne, le tutorat de l'étudiant à distance, et comment gérer la plate-forme (le logiciel) qui permet de réaliser la gestion pédagogique d'un cours (inscription, évaluation, suivi, test et autre). Cette formation, qui favorise le domaine e-Learning (apprentissage par net), est un plus qui va aider l'enseignant à appliquer l'approche actionnelle de manière structurée et objective au profit de l'apprenant.

Moodle est une plateforme d'apprentissage sous licence libre, largement utilisée et gratuite. Elle favorise une approche collaborative. Cette plateforme était conçue à l'origine pour les secteurs de l'éducation, de la formation et du développement afin d'aider les éducateurs à créer des cours en ligne en mettant l'accent sur les interactions et la collaboration, mais ces derniers temps, elle a été étendue au secteur de la formation professionnelle.

La plateforme Moodle fonctionne sans modification sur Unix, Windows, Mac OS et beaucoup d'autres systèmes qui supportent le langage de script PHP et une base de données compatible avec les normes SCORM et AICC. Cependant, son installation requiert certaines compétences techniques en termes de technologie PHP. Cette plateforme a été choisie pour permettre aux membres du personnel enseignant de personnaliser facilement un site pour un cours dans le but de rendre disponibles par l'entremise d'internet des composantes de cours et de répondre aux besoins des étudiants.





Parmi les activités disponibles sur la plateforme Moodle, on peut citer :

♣ **Outils pédagogiques :** gestionnaire de ressources, blogs, leçons, éditeur en ligne

♣ **Outils de communication synchrones ou non :** forums de discussion, chat, sondages

♣ **Outils collaboratifs de travail :** groupes, wiki, atelier, journal, glossaire, base de données

♣ **Outils d'évaluation :** dépôt de devoirs, tests en ligne avec mutualisation de questions.

0.1.1 Objectifs de la formation

Cette formation vise à développer chez l'apprenant des compétences dans le domaine des technologies éducatives en vue d'améliorer ses pratiques pédagogiques à savoir :

★ La maîtrise d'une chaîne éditoriale pour la production des documents pédagogiques

★ Structurer pédagogiquement un cours

★ Éditer correctement les objectifs globaux, spécifiques et intermédiaires

★ L'édition correcte des objectifs globaux et spécifiques

★ Différencier entre l'Approche Par Objectifs (APO) de l'Approche Par Compétences (APC)

★ Connaître les différentes méthodes pédagogiques

★ Adopter des différentes formes d'évaluation

★ Mettre en place critères de qualité d'une évaluation

★ Analyser un dispositif de formation en ligne

★ L'organisation du travail collaboratif

★ Concevoir un scénario pédagogique

★ L'utilisation de la plateforme Moodle

★ Comprendre les fonctions d'un tuteur en ligne

0.1.2 Equipe de la formation

Cette formation a été lancé par la tutelle (arrêté N 932 du 28 juillet 2016) afin de répondre au programme d'accompagnement des enseignants nouvellement recrutés. l'UFMC participe à la formation des enseignants des établissements universitaires du pays, encadrés par une équipe de spécialistes en la matière.

Cette équipe de formation est dirigé par Monsieur le Dr. Ahmed BELHANI à travers le site officiel :http ://telum.umc.edu.dz**??**

0.1.3 Programme de la formation à distance

Atelier 1 : Outils d'aides à l'utilisation des TIC dans l'enseignement (C2I)

▶ **Activité 1** : Moodle en mode étudiant

▶ **Activité 2** : Organisation du cours par une carte conceptuelle

▶ **Activité 3** : Production des ressources pédagogiques (Niveau débutant)

▶ **Activité 4** : Production des ressources pédagogiques (Niveau avancé)

Calendrier : Du 01 janvier 2019 au 25 février 2019. **Durée** : 05 semaines et 10 joursFigure 1 :

vue d'un module Opale

Atelier 2 : Conception d'un cours pour un enseignant hybride

▶ **Activité 1** : Remue-méninges

▶ **Activité 2** : Lecture de la présentation « Structure pédagogique d'un cours en ligne » et réalisation des quiz sur la plateforme

▶ **Activité 3** : Elaborer une grille pour l'évaluation d'un cours en ligne

▶ **Activité 4** : Amélioration du cours produit lors de l'atelier 1

▶ **Activité 5** : Rédaction d'un plan du cours

Calendrier : Du 26 février 2019 au 12 avril 2019. **Durée** : 05 semaines et 14 jours

Atelier 3 : Méthodologie de conception des cours pour un enseignement hybride

▶ **Activité 1** : Mesures de connaissances

▶ **Activité 2** : Concevoir et diffuser votre cours sur la plateforme Moodle
Calendrier : Du 13 avril 2019 au 31 août12 mai 2019. **Durée** : 04 semaines
Atelier 4 : Conception d'un Mooc
▶ **Activité** : Concevoir votre Mooc
Calendrier : Du 13 mai 2019 au 10 juin 2019. **Durée** : 04 semaines
Atelier 5 : Suivi pédagogique
▶ **Activité 1** : Participation au forum « Retour d'expériences »
▶ **Activité 2** : Mesure de connaissances par la lecture des présentations (scénario d'apprentissage, méthodes pédagogiques, évaluation, feuille de route . . .)
▶ **Activité 3** : Elaboration du portfolio
Calendrier : Du 10 juillet 2019 au 25 aout 2019. **Durée** : 06 semaines

0.1.4 Les activités de la formation présentielle

En termes de cette formation les nouvelles compétences acquis sont :
1) Mettre en place de nouveaux modes d'apprentissage, elles favorisent le travail personnel, qu'il soit guidé ou en autonomie.
2) La manipulation des outils numériques (Opale, VUE, etc) par exemple la carte conceptuelle avec logiciel VUE constitue un outil pédagogique destiné à faciliter l'organisation des connaissances et la réflexion
3) Le travail avec un environnement de la plateforme Moodle qui facilite la mise en œuvre des stratégies pédagogiques mise en place à **ENS D'oran**

0.2 Structuration et planification de cours

Le cours de « Algèbre linéaire » est destiné aux étudiants de $2^{\text{ème}}$ année Maths du Département des Sciences Exactes de l'école normale supérieure D'ORAN

0.2.1 Informations sur le cours

Ecole Normale Superieur D'Oran d5.n46mjU9 !KrWv
Département : sciences Exacte
Public cible : $2^{\text{ème}}$ année, spécialité Mathématique
Intitulé du cours : Les espaces métriques

Coefficient : 04

Durée : 15 semaines

Horaire : Lundi (cour 11h30 - 13h00 et TD 11h30 - 13h00), Mardi (cour 11h30 - 13h00 et TD 11h30 - 13h00)

Salle : 01

Enseignant :

Cours et TD : Mr. Brahim MEDJAHDI

Contact : par mail au medjahdib41@gmail.com

0.2.2 Présentation du cours

En mathématiques, plus précisément en algèbre linéaire, un espace vectoriel est un ensemble muni d'une structure permettant d'effectuer des combinaisons linéaires. Étant donné un corps $\mathbb{k}$, un espace vectoriel E sur $\mathbb{k}$ est un groupe commutatif (dont la loi est notée $+$) muni d'une action « compatible » de $\mathbb{k}$ (au sens de la définition ci-dessous). Les éléments de E sont appelés vecteurs, et les éléments de $\mathbb{k}$ des scalaires. Pour une introduction au concept de vecteur

Les espaces vectoriels sont des structures algébriques que l'on retrouve quasiment partout en mathématiques et qui sont la structure de base en algèbre linéaire. Vous avez déjà rencontré de nombreux espaces vectoriels en mathématiques, sans jamais les nommer ainsi. Le but de ce court chapitre introductif est de vous permettre de reconnaître, en tant que tel, les espaces vectoriels que vous connaissez déjà, ainsi que quelques objets mathématiques fondamentaux de l'algèbre linéaire. Dans ce chapitre comme précédemment, $\mathbb{k}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

0.2.3 Contenu

Le cours est réparti en trois éléments trés importants, bien sur nous allons commencer par des QCM en suit une introduction sur les espaces vectoriels (ev)

1-Les espaces vectoriels : Dans cette composante, nous allons donner une définition des espaces vectoriels avec quelques exemples et quelques propriétés importantes, sans oublier les exercices appliqués (TD)

2-Les sous espaces vectoriels : Définition, exemples et propriétés. (TD)

3-Les espaces vectoriels de dimension finie

Ci-dessous la carte conceptuelle (C C) de mon cours :

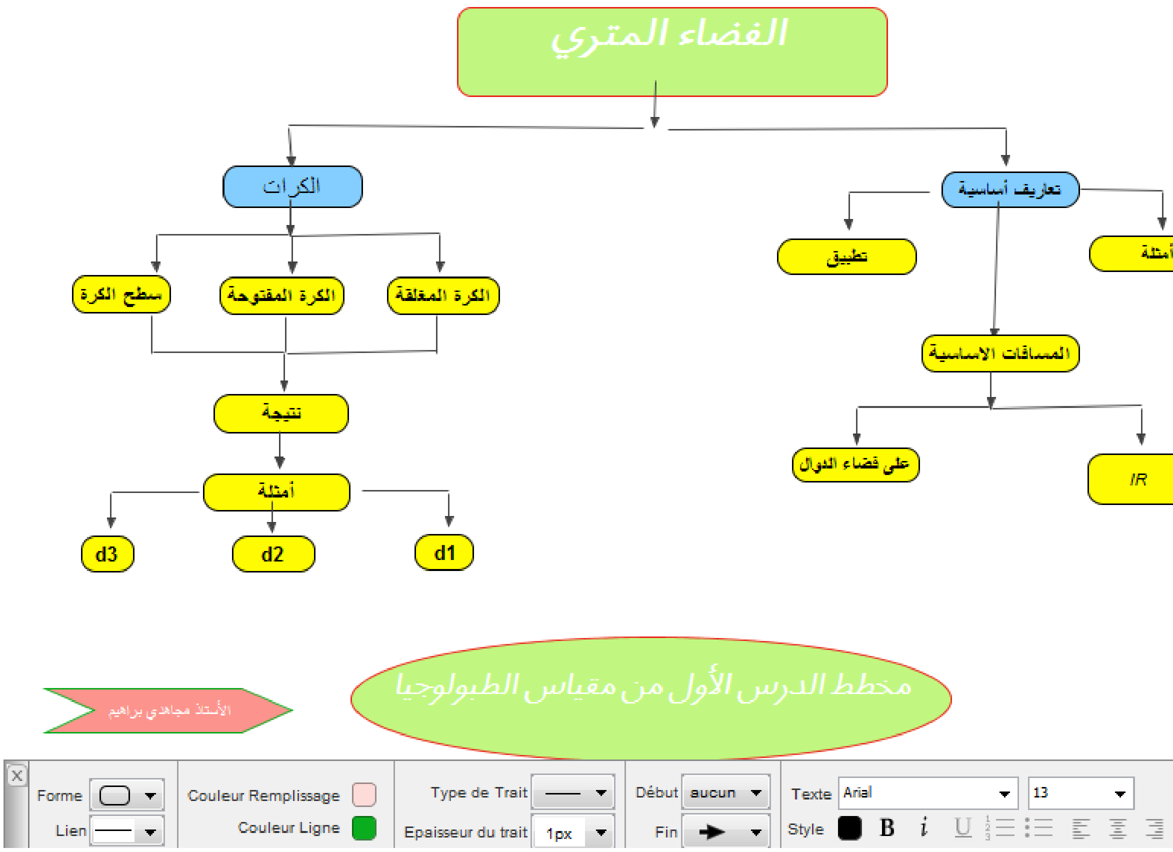


Figure2 :Carte conceptuelle cours«Algèbre linéaire»

0.2.4 Conception d'un cours pour un enseignement hybride

Un cours, ou un module de formation, doit être bien structuré afin de permettre sa mise en ligne. Un tel cours doit être facile à l'accès et à l'utilisé et ceci grâce à sa structuration formée par trois systèmes :

↪ **Système d'entrée**

↪ **Système d'apprentissage**

↪ **Système de sortie**

Système d'entrée

⇓

Système d'apprentissage

⇓ ⇑

Système de sortie

Le passage du système d'entrée vers le système d'apprentissage est généralement conditionné par la maîtrise des pré-requis

Une rétro-action par le système de sortie vers certains éléments du système d'apprentissage e st nécessaire, si l'évaluation finale est ratée

Le système d'entrée :

Le système d'entrée d'un cours en ligne contient les trois éléments :

1- Présentation des objectifs

2- Les pré-requis

3- Le pré-test

Le système d'apprentissage :

Ce sont le contenu et les activités d'apprentissage. Il comprend tous les éléments nécessaires à l'apprenant pour suivre le module de formation. Ces éléments sont répartis comme suit :

1- **Les informations sur le contenu :** il s'agit d'introduire le contenu du module et ceci grâce à une présentation permettant de préparer les apprenants à ce qui "est attend".

2- **Un plan du cours :** qui constitue l'un des éléments de présentation du contenu. Il aide les apprenants à avoir un aperçu global du cours. Ce plan de cours peut couvrir le cours dans sa totalité ou couvrir des chapitres séparément.

3- **L'indication du nom de l'auteur du cours :** inspire la confiance et constitue un élément important pour l'évaluation du cours.

4- **Les activités d'apprentissage :** L'intégration d'un ensemble d'activités d'apprentissage est importante, afin que l'apprenant puisse maîtriser les concepts liés au cours. Ces activités peuvent être sous forme de QCM, QCU, questions de productions réponse courte ou une question à réponse longue et etc.

5- **Le contenu :** il s'agit de la matière principale du cours qui a été travaillé par le concepteur pour pouvoir l'adapter au média de diffusion et d'y intégrer les éléments médiatiques permettant d'avoir plus d'interactivité.

6- **Les éléments d'aide à l'apprentissage :** Ces éléments permettent d'expliquer des termes fréquemment utilisés dans le cours grâce à un glossaire, de se référer à un ensemble de documents grâce à une page de liens utiles, de revoir sous une forme brève les notions abordées dans le cours à l'aide d'un résumé et etc.

Le système de sortie :

Il s'agit de l'évaluation, l'orientation et la remédiation. Le système de sortie permet de voir que l'apprenant a bien maîtrisé les concepts abordés dans le module de formation et ceci à l'aide d'un post-test.

Modalités d'évaluation des apprentissages

L'évaluation finale se fait à travers :

a. Un examen final sur table chaque semestre qui porte sur tout ce que vous avez vu dans ce cours pendant le semestre, lors de cet examen, vous aurez

• À résoudre des problèmes similaires ou proches aux problèmes traités lors des TD et des interrogations.

• À répondre à des questions de synthèse (via des QCM)

• À répondre des questions de réflexion. (vous serez entraînés à répondre à ce type de questions par les questions posées lors des TPs, des cours et lors des quiz qui vous seront proposés en ligne)

b. Évaluation continue et régulières, elle vous permet d'engranger des points tout au long du semestre, cette évaluation continue est réalisée par différentes formes, il s'agit :

- 6 travail sur tableau,
- 6 points pour la présence,
- 6 points d'un test orale ou écris,
- 2 points participation

• **Examen (EMD 1 et EMD 2)** (Une épreuve écrite de 01h30min (avec documents autorisé)) (20pts).

• **Travaux Dirigés** (travail sur tableau, travail à la maison, présence et participation) (20 pts).

$$\text{Moyenne}_{\text{Module}} = \frac{\text{Note}_{\text{Examen1}} + \text{Note}_{\text{Examen2}} + \text{Note}_{\text{TD}}}{3}$$

Activités d'enseignement-apprentissage

Les séances de répétition sont principalement dédiées à la résolution d'exercices se rapportant à la matière enseignée. Ces séances permettent également d'obtenir des compléments d'information ou l'illustration de concepts présentés au cours théorique.

De plus, des préparations de listes d'exercices seront systématiquement demandées pour la répétition suivante.

Modalités de fonctionnement

Le cours est organisé en :

• Séances théoriques afin de vous transmettre l'ensemble des savoirs permettant de cerner rapidement les définitions de bases et les méthodes de travail à suivre pour passer d'un schéma câblé à une logique programmée vu en 3ème année licence.

• En séance de travaux dirigés (TD), présents après chaque unité d'apprentissage (chapitre), afin que vous puissiez mobiliser les savoirs dans la résolution des exercices et des problèmes proposés.

0.3 Mise en ligne du cours

L'objective de ce cour est acquisition de bonnes connaissances des outils mathématiques de l'algèbre linéaire par programmation des algorithmes classiques de résolution de systèmes linéaires d'équations

Organisation du module

Le cours présenté dans la plateforme Moodle de l'université Oran 1 (ENS D'oran), est intitulé « Espaces vectorils ». Ce cours est organisé comme suit :

Section 1 : *Fiche-Contact*

Section 2 : *Objectifs généraux*

Section 3 : Connaissances préalables recommandées test pré-requis

Section 4 : Table de matières plan du cours détaillé

Section 5 : Chapitre 01 : Les espaces vectoriels

Section 6 : Chapitre 02 : Les espaces vectoriels de dimension finie

Section 7 : Test de sortie

Section 8 : Références bibliographiques

Objectifs spécifiques

Chapitre 01 :

Assimiler les notions de base sur les espaces vectoriels :

- Structure et sous-structures
- Familles de vecteurs libres, liées, bases, rang
- Sous espace vectoriels
- Espace vectorile Quotient

Chapitre 02 :

Assimiler les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie :

- Dimension
- La base
- Opération sur la dimension

0.4 Montage du Mooc sur Edx

Un MOOC (acronyme formé des initiales de massive open online course, en français formation en ligne ouverte à tous ou FLOT, ou encore cours en ligne ouvert et massif ou CLOM) est un type ouvert de formation à distance capable d'accueillir un grand nombre de participants. L'appellation MOOC est passée dans le langage courant en France ; elle est désormais reconnue par les principaux dictionnaires.

Inscription

étape1 :

étape2 :
étape3 :
Compt sur EduNext
Studio plateform
Cour
Cour sur LMS

0.5 Perspectives

La réussite d'une formation à distance nécessite à suivre plusieurs étapes, parmi les plus importants sont :

1- L'analyse (étude de faisabilité)
2- Le design (la conception)

3- Le développement (la réalisation)
4- L'implantation
5- L'évaluation

ANNEXE

PLAN DE COURS:

Les espaces métriques

Brahim MEDJAHDI

29/04/2019

Table des matières

0.1 Informations sur le cours

Ecole Normale Superieur D'Oran
Département : sciences Exacte
Public cible : $2^{\text{ème}}$ année, spécialité Mathématique
Intitulé du cours : Les espaces métriques
Coefficient : 04
Durée : 15 semaines
Horaire : lundi (cour 11h30 - 13h00,TD 13h30 - 15h00), Mardi (cour 08h30 - 10h00, TD 10h00 - 11h30)
Salle : 01
Enseignant :
Cours et TD : Mr. Brahim MEDJAHDI
Contact : par mail au medjahdib41@gmail.com
Disponibilité :
Au bureau : Dimanche, Mardi et Jeudi de 13h00 - 14h00

0.2 Présentation du cours

En mathématiques, un espace métrique est un ensemble au sein duquel une notion de distance entre les éléments de l'ensemble est définie. Les éléments seront, en général, appelés des points1.

Tout espace métrique est canoniquement muni d'une topologie. Les espaces métrisables sont les espaces topologiques obtenus de cette manière.

L'exemple correspondant le plus à notre expérience intuitive de l'espace est l'espace euclidien à trois dimensions. La métrique euclidienne de cet espace définit la distance entre deux points comme la longueur du segment les reliant.

La classe d'isométrie d'un espace métrique (c'est-à-dire l'ensemble de tous les espaces de même structure métrique) est beaucoup plus petite que sa classe d'homéomorphie. Par exemple, un carré, un triangle, un cercle et n'importe quelle courbe de Jordan sont homéomorphes, par contre ils ne sont pas isométriques. Ainsi une structure métrique code beaucoup plus d'information sur la forme géométrique des objets qu'une simple structure topologique ; ce qui n'a rien de surprenant, car la notion de distance entre deux points est centrale pour la géométrie usuelle.

0.3 Contenu

Le cours est réparti en qateur éléments trés importants, bien sur nous allons commencer par des QCM en suit une introduction sur les espaces métrique (ev)

1-Les espaces vectoriels : Dans cette composante, nous allons donner une définition des espaces métriques avec quelques exemples et quelques propriétés importantes, sans oublier les exercices appliqués (TD)

2-Propriétés de la distance : Définition, exemples et propriétés. (TD)

3-Parties bornées, fonctions bornées

4-Distance entre deux parties, diamétre

0.4 Pré-requis

Pour pouvoir tirer le maximum de ce cours il faut connaître :

▶ Les notions de base relatives aux groupes ainsi loi interne et loi externe.

▶ Utiliser les définitions de la théorie des groupes

0.5 Vissées d'apprentissage

Savoir Faire

a- Savoir manipuler les vecteurs et les familles

↪ Savoir montrer qu'une famille (finie ou infinie) est génératrice, libre, liée, une base

↪ Savoir définir la métrique.

↪ Savoir trouver une base d'un espace vectoriel (ou d'un sous-espace vectoriel)

↪ Savoir travailler avec des polynomes : racines, factorisation, bases, utilisation du degré, des polynomes dérivés

↪ Savoir manipuler les familles infinies

b- Savoir travailler avec les sous-espaces vectoriels

↪ Savoir montrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel

↪ Savoir montrer que deux sous-ev sont supplémentaires dans E

↪ Savoir montrer que plusieurs sous-ev sont en somme directe

c- Savoir travailler en dimension finie

↪ Espaces vectoriels de dimension finie vs de dimension infinie : connaitre les exemples

$\hookrightarrow$ Savoir citer le théorème de la base incomplète et l'utiliser

$\hookrightarrow$ Connaitre la notion de base adaptée et l'utiliser

$\hookrightarrow$ Savoir utiliser la dimension finie pour démontrer (dans le cadre des familles finies, des sous-ev, des applications linéaires)

$\hookrightarrow$ Savoir montrer qu'une application est linéaire

Synthèse chapitre

0.6 Modalités d'évaluation des apprentissages

L'examen en session comporte une partie orale et une partie écrite. La partie écrite porte essentiellement sur la résolution d'exercices. La partie orale porte sur la théorie (en particulier, il est attendu que les étudiants connaissent les preuves et les justifications des résultats énoncés) et des applications immédiates de celle-ci.

Lévaluation finale se fait à travers :

1- Un examen final sur table et qui porte sur tout ce que vous avez vu dans ce cours pendant le semestre

·À résoudre des problèmes similaires ou proches aux problèmes traités lors des TD , des TPs et des interrogations.

·À répondre à des questions de synthèse (via des QCM)

· À répondre des questions de réflexion. (vous serez entraînés à répondre à ce type de questions par les questions posées lors des TPs, des cours et lors des quiz qui vous seront proposés en ligne)

2- Évaluation continue et régulières

3- Évaluation formative

0.7 Activités d'enseignement-apprentissage

Les séances de répétition sont principalement dédiées à la résolution d'exercices se rapportant à la matière enseignée. Ces séances permettent également d'obtenir des compléments d'information ou l'illustration de concepts présentés au cours théorique.

De plus, des préparations de listes d'exercices seront systématiquement demandées pour la répétition suivante.

0.8 Modalités de fonctionnement

Le cours est organisé en :
· Séances théoriques
· En séance de travaux dirigés (TD), présents après chaque chapitre

0.9 Ressources d'aide

1- Jean Dieudonné, Éléments d'analyse, t. I : Fondements de l'analyse moderne [détail des éditions], Gauthier-Villars, 1979 (ISBN 2040104100), (OCLC 489875029), p. 34.

2- Pour plus de détails, voir par exemple le chapitre « Espaces métrique » de la leçon « Topologie générale » sur la Wikiversité.

3- Laurent Schwartz, Théorie des ensembles et topologie, vol. 1, Hermann, 1991 (ISBN 2705661611, OCLC 757664001), p. 162.

4- a et b Skandalis, Georges, (1955- ...), Topologie et analyse 3e année cours et exercices avec solutions, vol. 3, Dunod, dl 2004 (ISBN 2100488864, OCLC 492144889, lire en ligne [archive]), p.4, p.21

5- Jacques Dixmier, Topologie générale, puf, p.107

20 سبتمبر 2019

باب 1
الفضاءات المترية

1.1 تعاريف أساسية

1.1.1 المسافة

تعريف

لتكن E مجموعة كيفية، التطبيق d من $E\times E$ نحو $\mathbb{R}^+$ يسمى مسافة أو متريك أو بعد على E إذا وفقط إذا حقق :

أ. المطابقة :

$$\forall x,y\in E \qquad d(x,y)=0 \quad\Rightarrow\quad x=y$$

ب. التناظر:

$$\forall x,y\in E \qquad d(x,y)=d(y,x)$$

ج. المتراجحة المثلثية:

$$\forall x,y,z\in E \qquad d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

نسمي فضاء متري كل زوج (E,d) حيث E مجموعة كيفية و d مسافة.

أمثلة:

1. $(\mathbb{R},d_u)$ حيث:

$$\begin{aligned} d_u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\mapsto d(x,y)=|x-y| \end{aligned}$$ القيمة المطلقة

d_u بعد على $\mathbb{R}$ و يسمى البعد الطبيعي.

2. $(\mathbb{C},d_u)$ حيث: $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة

$$x=x_1+ix_2 \quad ; \quad y=y_1+iy_2,$$

$$\begin{aligned} d_u : \mathbb{C}\times\mathbb{C} &\to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\mapsto d(x,y)=\|x-y\| \end{aligned}$$ الطويلة

3. المسافة الإنقطاعية:

$$\begin{aligned} d : E\times E &\to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\mapsto d(x,y)=\begin{cases} 1 & x\neq y \\ 0 & x=y \end{cases} \end{aligned}$$

1.1.2 المسافات الأساسية

المسافات الأساسية على $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

من أجل:

$$x \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \quad ; \qquad x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$y \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \quad ; \qquad y = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

أ.

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{\mathbf{n}} |x_i - y_i|$$

ب.

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{n}} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ج.

$$d_3(x,y) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} (|x_i - y_i|)$$

المسافات الأساسية على $\zeta([a,b],\mathbb{R})$

حيث $\zeta([a,b]),\mathbb{R})$: هو الفضاء الشعاعي المؤلف من الدوال المستمرة من $[a,b]$ نحو $\mathbb{R}$.

أ.

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$$

ب.

$$d_2(f,g) = \left(\int_a^b (f(t) - g(t)) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

ج.

$$d_3(f,g) = \sup_{t \in [a,b]} (|f(t) - g(t)|)$$

نسمي المسافة d_2 بالمسافة الإقليدية، و المسافة d_3 بمسافة التقارب المنتظم كما يرمز لها ب d_∞.

البرهان

1. اثبات أن d_1 مسافة على $\mathbb{R}$:

أ. اثبات خاصية التطابق أي: $d_1(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

لدينا من أجل كل $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad |x_i - y_i| = 0, \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

ب.اثبات خاصية التناظر:

$d_1(x,y)=d_1(y,x)$ خواص القيمة المطلقة

ج.اثبات خاصية المتراجحة المثلثية أي نبين أنه:

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i-y_i|)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i+z_i-y_i|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|+\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|$$

ومنه: $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$

ومنه $(\mathbb{R}^{\mathbf{n}},d_1)$ فضاء متري.

2.اثبات أن d_2 مسافة على $\mathbb{R}^+$:

حيث $d_2(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

أ.اثبات خاصية التطابق أي: $d_2(x,y)=0 \iff x=y$

لدينا من أجل كل $x,y\in\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}d_2(x,y)=0 &\iff (\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}=0\\ &\iff \forall i\in\{1,2,...,n\}, x_i-y_i=0\\ &\iff x=y\end{aligned}$$

ب.اثبات خاصية التناظر:

$d_2(x,y)=d_2(y,x)$ خواص المربع

ج.اثبات المتراجحة المثلثية أي نبين أنه:

$$\forall x,y,z\in E \quad , \quad d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

أي:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\;..........(\star)$$

نضع: $a_i=x_i-z_i \qquad b_i=z_i-y_i$

إذا : $a_i+b_i=x_i-y_i$

نجد $(\star)$ تكافئ:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\times\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

بعد التبسيط نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

تسمى متراجحة كوشي شوارتز.

إثبات متراجحة كوشي شوارتز:

لدينا من أجل $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2\lambda^2 + 2\lambda\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

نتحصل على كثير حدود ذو المتغير λ من الدرجة الثانية حيث المميز السالب:

$$\Delta' = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} b_i^2 < 0$$

و منه:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \times b_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 الكرات المفتوحة، المغلوقة، المفتوحات، المغلوقات و الجوارات

1.2.1 الكرات المفتوحة و المغلوقة

تعريف

نسمي كرة مفتوحة من E ذات المركز a و نصف القطر $r > 0$ المجموعة الجزئية المرموز لها ب $B_o(a,r)$

$$B_o(a,r) = \{x \in E \quad / \quad d(a,x) < r\}$$

⋆ الكرة المغلقة ذات المركز a و نصف القطر $r > 0$:

$$B_F(a,r) = \{x \in E \quad / \quad d(a,x) \leqslant r\}$$

⋆ الغلاف الكروي أو سطح كرة ذات المركز a و نصف القطر $r > 0$:

$$S(a,r) = \{x \in E \quad / \quad d(a,x) = r\}$$

نتيجة

$$B_F(a,r) = B_o(a,r) \cup S(a,r)$$

أمثلة:

في $\mathbb{R}$ تتساوى المسافات الثلاثة $d_1 = d_2 = d_3$ و نجد $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$، $B_o(a,r) =]a-r; a+r[$،
$B_F(a,r) = [a-r, a+r]$

تمثيل هندسيا كرة الوحدة $B(0,1)$ في $\mathbb{R}^2$:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|$$
$$B_F(0,1) : |x_1| + |x_2| \leq 1$$

$$d_2(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$B_F(0,1) : x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$d_3(x,y) = \sup_{1\leq i\leq 2} (|x_i - y_i|)$$
$$B_F(0;1) : \sup_{1\leq i\leq 2} (|x_1|, |y_2|)$$

تعريف

(تعريف المفتوحات)
(E,d) فضاء متري، المجموعة U من E تسمى مفتوح من E إذا و فقط إذا كان:

$$U \text{ مفتوح من } E \iff \forall\ x \in U\ ,\ \exists\ r_x > 0\ \ /\ \ B_o(x,r_x) \subseteq U$$

مثال:
$]-1,1[$ ليس مفتوح في $\mathbb{R}$ لأنه لا يوجد $r_x > 0$ عند 1 حيث: $1 \in B_o(1,r_x)$

تعريف

(تعريف المغلقات)
نقول عن الجزء F من E أنه مغلق إذا وفقط إذا كان متممه مفتوح.

$$F \text{ مغلق } \iff F^C \text{ مفتوح}$$

مبرهنة

(E,d) فضاء متري، كل كرة مفتوحة من (E,d) فهو مفتوح.

البرهان

لدينا كرة مفتوحة $B_o(a,r)=\{x\in E/d(a,x)<r\}$

نبين أنه:

$$\forall x\in B_o(a,r),\exists r_x>0/x\in B_o(x,r_x)\subset B(a,r)$$

لدينا: $r_x=r-d(a,x)>0\Longleftrightarrow d(a,x)<r$

إذن: r_x موجودة

اثبات أن: $B_o(x,r_x)\subset B(a,r)$

ليكن: $t\in B_o(x,r_x)\Longleftrightarrow d(r,t)<r_x$

و لدينا: $d(a,t)\leqslant d(a,x)+d(x,t)\leqslant r-r_x+r_x$

إذا : $d(a,t)\leqslant r$

أي: $t\in B_o(a,r)$

ومنه: $B_o(x,r_x)\subset B_o(a,r)$

خاصية

1. ϕ و E مفتوحات.
2. $(U_i)_{i\in I}$ جملة مفتوحات من E، لدينا: $\bigcup\limits_{i\in I}U_i$ مفتوح (الإتحاد الكيفي لمفتوحات هو مفتوح).
3. $(U_i)_{i=1}^{\mathbf{n}}$ عدد منتهي من المفتوحات E، لدينا: $\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i$ مفتوح.

البرهان

أ. اثبات أن $\bigcup\limits_{i\in I}U_i$ مفتوح أي:

$$\forall x\in\bigcup_{i\in I}U_i,\exists r_x>0\,x\in B_o(x,r_x)\subset\bigcup_{i\in I}U_i$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
x\in\bigcup_{i\in I}U_i &\Longleftrightarrow \exists i_0\in I/x\in U_{i0}\\
&\Longleftrightarrow \exists r_{x_{i0}}>0,x\in B_o(x,r_{x_{i0}})\subset U_{i0}\\
&\Longleftrightarrow x\in B_o(x,r_{x_{i0}})\subset U_{i0}\subset\bigcup_{i\in I}U_i\\
&\Longleftrightarrow \bigcup_{i\in I}U_i\ \text{مفتوح}
\end{aligned}$$

ب. اثبات أن $\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i$ مفتوح

أي نبين أنه: $\forall x\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i,\exists r_x>0/x\in B_o(x,r_x)\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i$

لدينا : $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \Longleftrightarrow \forall i \in \{1,2,...,n\} x \in U_i$ إذا:

$$\begin{aligned}
i = 1 \longrightarrow x \in U_1 &\Longleftrightarrow \exists r_1 > 0, x \in B_o(x,r_1) \subset U_1 \\
i = 2 \longrightarrow x \in U_2 &\Longleftrightarrow \exists r_2 > 0, x \in B_o(x,r_2) \subset U_2 \\
&\vdots \\
i = n \longrightarrow x \in U_n &\Longleftrightarrow \exists r_1 > 0, x \in B_o(x,r_n) \subset U_n
\end{aligned}$$

و منه: $\exists r_x = Inf(r_1, r_2, ..., r_n) > 0$

حيث: $x \in B_o\left(x, Inf(r_1, r_2, ..., r_n)\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$

مثال مضاد:

$\bigcap_{i=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, 1[= [0,1[$ التقاطع الكيفي لمفتوحات ليس دائما مفتوح.

خاصية

بإستعمال المتممات نتحصل على :
1. ϕ و E مغلقان.
2. التقاطع الكيفي لمغلقات هو مغلق.
3. الإتحاد المنتهي لمغلقات هو مغلق.

1.2.2 الجوار

تعريف

$(E.d)$ فضاء متري، V مجموعة جزئية من E، نقول أن V جوار ل x إذا وفقط إذا وجد مفتوح U حيث $x \in U \subset V$ و نرمز لمجموعات جوارات x ب $V(x)$

$V \subset V(x) \Longleftrightarrow \exists U$ مفتوح $/ x \in U \subset V$

ملاحظة:
1. V جوار ل x إذا وفقط إذا وجدت كرة مفتوحة $B_o(x,r)$ محتواة في V.

V جوار ل $x \Longleftrightarrow B_o(x,r) \subset V \quad / \quad \exists B_o(x,r)$

2. إذا كان V مفتوح فهو جوار لكل نقاطه.

$\exists B_o(x,r) = U_o \subset V \quad /$ مفتوح $\forall x \in U$

خاصية

1. كل جزء A من E يحوي V جوار ل x فهو جوار ل x

$$\forall A, A \subset E, x \in V \subset A \Longrightarrow A \subset V(x)$$

2. الإتحاد الكيفي لجوارات x هو جوار ل x.
3. التقاطع المنتهي لجوارات x هو جوار ل x.

1.3 الفضاءات المترية الجزئية

تعريف

(E, d) فضاء متري و F جزء غير خالي من E، نقول أن (E, d) فضاء متري جزئي إذا كان إقتصار البعد له على F فهو بعد على F.

تعريف

(E, d) فضاء متري و (F, d) فضاء متري جزئي من (E, d)، نقول أن الكرة $B_o^F(a, x)$ كرة مفتوحة من (E, d) إذا وفقط إذا وجدت كرة $B_o^E(a', x')$ من E بحيث :

$$B_o^F(a, x) = B_o^E(a', x') \cap F$$

لا نستطيع القول بأن $B^F(a, x)$ مفتوح لأن F كيفي ليس مفتوح.

مبرهنة

(F, d) فضاء متري جزئي من (E, d)، B جزء مفتوح من (F, d) (على التوالي مغلق من (F, d))إذا وفقط إذا وجد مفتوح A من E على التوالي مغلق حيث $B = A \cap F$.

البرهان

نبين أن:

$$\exists A^o \subset E / B = A \cap B \ , \ B^o \subset (F, d)$$

1. نبين أن: $\forall B^o \subset F \Longrightarrow \exists A^o \subset E / B = A \cap F$

لدينا:

$$B^o \subset F \Longleftrightarrow \forall a \in B^o, \exists r_a > 0, B^o(a, r_a) \subset F$$

إذا: $B^o(a, r_a) \cap F \subset B$

$$A = \cup B(a, r_a)$$

نجد: $B = A \cap B$

2. نبين الإحتواء الثاني:
$$A\cap F=\bigcup_{a\in B}(B_o(a,r_a))\cap F=\bigcup_{a\in B}(B_o(a,r_a\cap F)$$
ولدينا : $\cup B(a,r_a)$ مفتوح أي $V=\bigcup_{a\in B}B_o(a,r_a)$ مفتوح من E.

ملاحظة:
إذا كان V مفتوح من (E,d)، لدينا:
$$V=\bigcup_{x\in U}B_o(x,r)$$

1.4 المجموعات المحدودة -البعد بين مجموعتين

تعريف
(المجموعات المحدودة)
(E,d) فضاء متري، A جزء من E، نقول أن A محدودة إذا وفقط إذا وجدت كرة مفتوحة أو مغلقة $B(x,r)$ من E حيث : $A\subset B(x,r)$

تعريف
(القطر)
A جزء من (E,d) نسمي قطر A و نرمز له ب $d(A)$ العدد أكبر مسافة $d(A)=\sup\limits_{x,y\in A}d(x,y)$

مبرهنة
1. A جزء محدود $\Longleftrightarrow$ $d(A)$ منته.
2. $A\subseteq B\Longrightarrow d(A)\leqslant d(B)$.

البرهان

إثبات أن:
A محدود $\Longleftarrow$ $d(A)<+\infty$ منته .
لدينا:
A محدود $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in A,\exists r>0,A\subset B(x,r)$
أي:
$$\forall t,t'\in A,d(x,t)<r\wedge d(x,t')<r\Longrightarrow\begin{cases}d(t,t')\leqslant d(x,t)+d(x,t')<2r\\ \sup\limits_{t,t'\in A}d(t,t')<2r<+\infty\end{cases}$$
إذن: $d(A)$ محدود.
العكس $d(A)<+\infty$ A منته $\Longleftarrow$ A محدود $(\exists B(x,r)/A\subset B)$.
لدينا:
$$d(A)<+\infty\Longrightarrow\forall t,t'\in A,\sup d(t,t')<\infty$$

إذا:

$$\exists r > 0/ \sup_{t,t' \in A} d(t,t') = r < \infty$$

أي:

$$\forall x \in A, d(x,t) \leqslant r \Longrightarrow \exists B(x,r)/A \subset B(x,r)$$

تعريف

(المسافة بين مجموعتين)
A و B جزءان من (E,d) فضاء متري.
العدد $d(A,B)$ المعرف ب $d(A,B) = \inf_{x,y \in A \times B} d(x,y)$ يسمى المسافة الفاصلة بين A و B.
إذا كان $A = \{x\}$: $d(x,B) = \inf_{y \in B} d(x,y)$ ، $a \in B \Longrightarrow d(a,B) = 0$ و العكس غير صحيح.

1.5 داخل و خارج مجموعة -ملاصقة

تعريف

(داخل مجموعة)
A جزء من (E,d) فضاء متري، نقول أن النقطة x من A نقطة داخل A إذا وفقط إذا وجدت كرة مفتوحة مركزها x و نصف قطرها r حيث : $B_o(x,r) \subset A$
نرمز لمجموعة النقط الداخلية ل A ب $IntA = \mathring{A}$.

$$\begin{aligned} x \in \mathring{A} &\iff \exists B_o(x,r)/B_o(x,r) \subset A \\ &\iff \exists V_x \in V(x)/V_x \subset A \\ &\iff A \subset V(x) \end{aligned}$$

ملاحظة:
⋆ نلاحظ أن $\mathring{A} \subset A$.
⋆إذا كان A مفتوح فإن $A \subset \mathring{A}$ و منه $A = \mathring{A}$.

مبرهنة

1. $A \subseteq B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2. $A = \mathring{A} \iff A$ مفتوح، $\left(\mathring{A}\right)^{o} = \mathring{A}$.
3. $\mathring{A}$ هو أكبر المفتوحات المحتواة في A.

البرهان

1.إثبات أن : $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$
لدينا:

$x \in \mathring{A} \Longrightarrow \exists V_x$ مفتوح$/V_x \subset A \subset B$

أي:

$V_x \subset B/\exists V_x$مفتوح $\Longrightarrow x \in \mathring{A}$

أي: $x \in \mathring{B}$

ومنه: $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

2.اثبات أن: $A = \mathring{A} \Longleftrightarrow A$ مفتوح.

أ.اثبات أن: $A = \mathring{A} \Longrightarrow A$ مفتوح

لدينا من التعريف $\mathring{A} \subset A$، ونبين أن: $A \subset \mathring{A}$ أي $\forall t \in A \,/\, t \in \mathring{A}$

لدينا:

$\forall t \in A$ مفتوح $\Longrightarrow \quad \exists V_t \in V(t) \;\;/\;\; t \in V(t) \subset A \;\; t \in \mathring{A}$

أي: $A \subset \mathring{A}$ ومنه: $A = \mathring{A}$

ب.إثبات أن: $A = \mathring{A} \Longleftarrow A$ مفتوح، بديهي

3.إثبات أن: $\mathring{A}$ هو أكبر المفتوحات المحتواة في A.

نفرض بالتناقض أنه مفتوح يوجد U حيث $\mathring{A} \subset U \subset A$

بما أن U مفتوح فهو جوار لجميع نقاطه.

أي $\forall x \in U \;\;,\;\; \exists V_x \subset V(x) \;\;/\;\; V_x \subset U \subset A$ حيث V_x مفتوح.

ومنه: $x \in \mathring{A}$ أي: $U \subset \mathring{A}$تناقض، ومنه: $U = \mathring{A}$

مبرهنة

$(A_i)_{i\in I}$ جملة مجموعات من فضاء متري (E,d)

1. $\bigcup_{i\in I} \mathring{A}_i \subseteq \overbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}^{\circ}$
2. $\overbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}^{\circ} \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathring{A}_i$

البرهان

1. اثبات أن: $\bigcup_{i\in I} \mathring{A}_i \subseteq \overbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}^{\circ}$

لدينا:

$$\begin{aligned}\forall i \in I, \mathring{A}_i \subseteq A_i &\implies \bigcup_{i\in I} \mathring{A}_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i\\ &\implies \overset{o}{\widehat{\bigcup_{i\in I} \mathring{A}_i}} \subseteq \overset{o}{\widehat{\bigcup_{i\in I} A_i}}\\ &\implies \bigcup_{i\in I} \mathring{A}_i \subseteq \overset{o}{\widehat{\bigcup_{i\in I} A_i}}\end{aligned}$$

لأن: $\bigcup_{i\in I} \mathring{A}_i$ مفتوح.

ملاحظة: الإحتواء العكسي غير صحيح على العموم.

مثال مضاد: $(\mathbb{R}, d_u)$ فضاء متري.

ليكن: $A =]-3, 2]$ و $B =]2, 4]$

إذا: $\mathring{A} =]-3, 2[$ و $\mathring{B} =]2, 4[$

و لدينا: $A \cup B =]-3, 4]$

إذا: $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]-3, 2[\cup]2, 4[$

و لدينا: $\overset{o}{\widehat{A \cup B}} =]-3, 4[$

و منه العكس غير صحيح لأن: $\overset{o}{\widehat{A \cup B}} \not\subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

2. إثبات أن: $\overset{o}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathring{A}_i$

⋆ إذا كان $\overset{o}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} = \phi$ فالإحتواء محقق لأن ϕ محتواة في أي مجموعة.

⋆ إذا كان $\overset{o}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} \neq \phi$:

$$\begin{aligned}\overset{o}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} \neq \phi \iff \exists x \in \overset{o}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} &\iff \exists V \in V(x)/x \in V \subset \bigcap A_i\\ &\implies \forall i \in I, \exists x \in V \subset A_i\\ &\implies \forall i \in I, x \in \mathring{A}_i\\ &\implies \forall i \in I, x \in \bigcap_{i\in I} \mathring{A}_i\end{aligned}$$

تعريف

(الملاصقة)

(E, d) فضاء متري، A مجموعة جزئية من E، نقول أن $x \in E$ نقطة ملاصقة ل A إذا وفقط إذا كان من أجل كل U جوار مفتوح ل x $(U \cap A \neq \phi)$، و نرمز لها ب $\overline{A}$ و نكتب:

$$\begin{aligned}x \in \overline{A} &\iff \forall \quad V \in V(x), V \cap A \neq \phi\\ &\iff B_o(x, r)/B_o(x, r) \neq \phi\\ x \notin \overline{A} &\iff \exists V \in V(x)/V \cap A = \phi\end{aligned}$$

مبرهنة

1. $\forall A \ , \ A \subset \overline{A}$.
2. $\overline{A}$مغلق.
3. $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A} \ , \ A = \overline{A} \iff A$ مغلق.
5. $\overline{A}$ هو أصغر المغلوقات التي تحوي A.

البرهان

1. اثبات أن: $\forall A \ , \ A \subset \overline{A}$.
نستعمل البرهان بالعكس النقيض:
لدينا:

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \in \overline{A} \\ x \notin \overline{A} &\implies x \notin A \\ x \notin \overline{A} &\iff \exists V \subset V(x), A \cap V = \phi \\ &\iff x \notin A \end{aligned}$$

2. اثبات أن: $\overline{A}$ مغلق.
لدينا: $\overline{A}$ مغلق $\iff C_E\overline{A}$ مفتوح.

$$\begin{aligned} x \in C_E\overline{A} \iff x \notin \overline{A} &\iff \exists V \subset V(x), A \cap V = \phi \\ &\implies \exists V \in V(x)/x \in V \subset C_E\overline{A} \end{aligned}$$

حيث: $V(x)$ جوار مفتوح ل x

ومنه: $C_E\overline{A}$ مفتوح أي: $\overline{A}$ مغلق.

3. إثبات أن: $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.
$$x \in \overline{A} \implies \exists V \subset V(x) \ , \ A \cap V \neq \phi \implies B \cap V \neq \phi$$
ومنه: $\exists V \subset V(x) \ / \ B \cap V \neq \phi$
أي: $x \in \overline{B}$ ومنه: $\overline{A} \subset \overline{B}$

4. اثبات أن : A مغلق $\iff A = \overline{A}$ و $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
أ. لدينا تعريفا : $A \subset \overline{A}$
ب. إاثبات أن : $\overline{A} \subset A$
لدينا : $\forall x \ , \ x \in \overline{A} \implies x \in A$
العكس النقيض $\forall x \ , \ x \notin A \implies x \notin \overline{A}$
لدينا: $x \notin A$ (مغلق)$; \ \exists V \in V(x) \ / \ V \not\subset A$
$$x \in A^c (\text{مفتوح}) \iff \exists V \in V(x)/V \subset A^c$$
$$\implies \exists V \in V(x)/V \cap A = \phi \iff x \notin \overline{A}$$
إذا: $x \notin A \implies x \notin \overline{A}$ ومنه: $x \in \overline{A} \implies x \in A$

أي: A مغلق $\Longleftrightarrow A=\overline{A}$.
الإستلزام العكسي $A=\overline{A} \Longleftarrow A$ مغلق بديهي.

تعريف

(خارج / حدودية)

A جزء من (E,d) فضاء متري، نقول أن النقطة x من E نقطة خارج A إذا كانت نقطة داخل أي $C_EA=A^c$ و نرمز لها بالرمز $ExtA$ مجموعة النقط خارج A

$$ExtA=\overset{o}{\widehat{A^c}}=\overset{o}{\widehat{C_EA}}$$

$\star$ نقول أن النقطة x حدودية ل A إذا كانت x نقطة ملاصقة ل A و A^c، نرمز لمجموعة النقط الحدودية ب : $Fr(A)=\overline{A}\cap\overline{A^c}$

$\star$ نقول عن نقطة $x\in E$ أنها نقطة حافة (حافية ، حدودية) إذا حققت :

1. $x\notin Ext(A) \ \bigwedge \ x\notin \mathring{A}$
2. $Fr(A)=C_E\left(\mathring{A}\cup Ext(A)\right)$

مبرهنة

1. $\overset{o}{\widehat{A^c}}=\left(\overline{A}\right)^c$
2. $\overline{A^c}=\left(\mathring{A}\right)^c$
3. $Fr(A)=\overline{A}-\mathring{A}$

البرهان

1. اثبات أن : $\overset{o}{\widehat{A^c}}=\left(\overline{A}\right)^c$.

أ. اثبات الإحتواء (1): $\overset{o}{\widehat{A^c}}\subset\left(\overline{A}\right)^c$.

$$\begin{aligned}\overset{o}{\widehat{A^c}}\subset A^c &\Longrightarrow A\subset\left(\overset{o}{\widehat{A^c}}\right)^c\\ &\Longrightarrow \overline{A}\subset\overline{\left(\overset{o}{\widehat{A^c}}\right)^c}=\left(\overset{o}{\widehat{A^c}}\right)^c\\ &\Longrightarrow \overset{o}{\widehat{A^c}}\subset\left(\overline{A}\right)^c\end{aligned}$$

ب. اثبات الإحتواء (2): $\left(\overline{A}\right)^c\subset\overset{o}{\widehat{A^c}}$.

لدينا:

$$\begin{aligned}A\subset\overline{A} &\Longrightarrow \left(\overline{A}\right)^c\subset A^c\\ &\Longrightarrow \overset{o}{\widehat{\left(\overline{A}\right)^c}}\subset\overset{o}{\widehat{A^c}}\\ &\Longrightarrow \left(\overline{A}\right)^c\subset\overset{o}{\widehat{A^c}}\end{aligned}$$

2. اثبات أن : $\overline{A^c}=\left(\mathring{A}\right)^c$.

لدينا: $\overset{\circ}{\widehat{A^c}} = \left(\overline{A}\right)^c$

نضع : $A^c = B$ أي: $A = B^c$

نجد: $\left(\overset{\circ}{B}\right)^c = \overline{A^c} \iff \overset{\circ}{B} = \left(\overline{B^c}\right)^c$

3. اثبات أن : $Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ $\quad Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \cap \overline{A^c} &\iff x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{A^c} \\ &\iff x \in \overline{A} \wedge x \in \left(\overset{\circ}{A}\right)^c \\ &\iff x \in \overline{A} \wedge x \notin \overset{\circ}{A} \\ &\iff x \in \overline{A} - \overset{\circ}{A} \end{aligned}$$

تعريف

1. (E,d) فضاء متري، A جزء غير خالي من E، x نقطة من E.
تسمى x نقطة تراكم ل A إذا وفقط إذا كان كل جوار ل x يقطع المجموع A على الأقل عند نقطة تختلف عن x.

$$x \text{ نقطة تراكم ل } A \iff \forall V \in V(x), V \cap (A - \{x\}) \neq \phi$$

نرمز لمجموعة نقط التراكم ب A'.

2. نقول عن x من A أنها نقطة معزولة، إذا وجد جوار V ل x لا يقطع A إلا في النقطة x و نكتب عند ذلك:

$$x \text{ معزولة في } A \iff \exists V \in V(x), V \cap A = \{x\}$$

ملاحظات

1. x نقطة منعزلة $\iff$ x ليست نقطة تراكم.
2. كل نقطة من A فهي نقطة ملاصقة ل A لأن $A \subset \overline{A}$.
3. كل نقطة تراكم ل A فهي نقطة ملاصقة ل A لأن $A' \subset \overline{A}$.
4. $\overline{A} = A \cup A'$.

البرهان

اثبات أن: $\overline{A} = A \cup A'$

1. اثبات الإحتواء (1) أي: $A \cup A' \subset \overline{A}$
لدينا :

$$A \subset \overline{A} \wedge A' \subset \overline{A} \Longrightarrow A \cup A' \subset \overline{A}$$

2. اثبات الإحتواء (2) أي: $\overline{A} \subset A \cup A'$
لدينا:

$$x \in \overline{A} \Longrightarrow \exists V \in V(x)/V \cap A \neq \phi \Longrightarrow \exists x_0 \in V \cap A = \{x_0\}$$

نميز حالتين:
⋆ إذا كان $x_0 \neq x$:
نجد: $\forall V \in V(x), V \cap A = \{x_0\} \neq \phi$
ومنه: $x \in A'$
⋆ إذا كان $x_0 = x$:
نجد: $V \cap A = \{x\}$ ومنه $x \in A$
إذا: $x \in \overline{A} \Longrightarrow x \in A \vee x \in A'$
ومنه: $\overline{A} \subset A \cup A'$

نتيجة

كل جزء A من $\mathbb{R}$ هو إتحاد مجموعة نقاطه التراكمية و المنعزلة.

تعريف

(الكثافة)
(E, d) فضاء متري، A جزء غير خالي من E، نقول أن A كثيفة في E إذا وفقط إذا $\overline{A} = E$

$$\forall V\ (\text{مفتوح من } E); V \cap A \neq \phi \Longleftrightarrow \overline{A} = E$$

مثال:
$(\mathbb{R}, d)$ فضاء متري
$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$، $\mathbb{Q}$ هي كثيفة في $\mathbb{R}$.

$$x \in \overline{\mathbb{Q}} \Longleftrightarrow \forall V \in V(x), V \cap \mathbb{Q} \neq \phi$$

1.6 النهايات - الإستمرارية على فضاء متري

تعريف

(E,d) و (F,σ) فضاءان متريان، f تطبيق من E نحو F.
نقول ان f تقبل نهاية ℓ في النقطة x_0 من E إذا و فقط إذا كان:

$$\begin{array}{lcll}
\lim\limits_{x\longmapsto x_0} f(x)=l & \Longleftrightarrow & \forall B_o(l,\varepsilon),\exists B_o(x_0,\eta)/f(B_o(x_0,\eta))\subset B_o(l,\varepsilon) & \\
\lim\limits_{x\longmapsto x_0} f(x)=\ell & \Longleftrightarrow & \forall\varepsilon>0,\exists\eta>0/\forall x,|x-x_0|<\eta & \Longrightarrow |f(x)-\ell| \\
 & \Longleftrightarrow & \forall\varepsilon>0,\exists\eta>0/\forall x,x_0-\eta<x<x_0+\eta & \Longrightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon \\
 & \Longleftrightarrow & \forall\varepsilon>0,\exists\eta>0/\forall x,x\in]x-\eta,x+\eta[& \Longrightarrow f(x)\in]\varepsilon-\ell,\varepsilon+\ell[\\
 & & x\in B_0(x_0,\eta) & \Longrightarrow f(x)\in B_o(l,\varepsilon)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
x\in B_o(x_0,\eta) & \Longrightarrow & f(x)\in(B_o(l,\varepsilon)) \\
x\in B_o(x_0,\eta) & \Longrightarrow & f(x)\in f(B_o(x_0,\eta)) \\
f(x)\in B_o(l,\varepsilon) & \Longrightarrow & x\in f^{-1}B_o(l,\varepsilon) \\
x\in f^{-1}(x) & \Longrightarrow & f(x)\in B
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\lim\limits_{x\longmapsto x_0} f(x)=l & \Longleftrightarrow & \forall B_o(l,\varepsilon),\exists B_o(x_0,\eta)/\forall x,x\in B_o(x_0,\eta)\Longrightarrow x\in f^{-1}B_o(\ell,\varepsilon) \\
 & & /B_o(x_0,\eta)\subset f^{-1}(B_o(l,\varepsilon)) \\
 & & f(B_o(x_0,\eta))\subset B_o(l,\varepsilon) \\
\lim\limits_{x\longmapsto x_0} f(x)=l & \Longleftrightarrow & \forall U\in V(l),\exists V(x_0)/f(U)\subset V
\end{array}$$

$\Longleftrightarrow$ $\forall U$ جوار مفتوح ل ℓ ، $\exists U$ جوار مفتوح ل x_0 $/ f(U)\subset V$

$\Longleftrightarrow$ $\forall U\in V(l),\exists U\in V(x_0)/f^{-1}(V)\in V(x_0)$

تعريف

(نهاية تطبيق مركب)
f و g تطبيقان معرفان كما يلي:

$$f:\quad (E,d)\to(F,\sigma_1)$$

$$g:\quad (F,\sigma_1)\to(G,\sigma_2)$$

إذا كانت f تقبل نهاية l عند x_0 و g تقبل نهاية κ عند l فإن $g\circ f$ تقبل نهاية κ عند x_0.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\longmapsto x_0} f(x)=l \\ \\ \lim\limits_{x\longmapsto l} g(x)=\kappa\end{cases}\Longrightarrow \lim\limits_{x\longmapsto x_0} g\circ f=\kappa$$

البرهان

نبين أن :

$$\lim_{x\longmapsto x_0} g\circ f=\kappa \Longleftrightarrow \forall\omega\in V(\kappa),\exists U\in V(x)/(g\circ f)^{-1}(\omega)\subset U$$

أي :

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(\omega)\subset U$$

لدينا :

$$\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\longmapsto x_0} f(x)=l & \Longleftrightarrow & \forall\omega\in U(l)/\exists U\in V(\kappa)/f^{-1}(V)\subset U\\ \lim\limits_{x\longmapsto l} g(x)=\kappa & \Longleftrightarrow & \forall\omega\in V(\kappa)\exists V\in V(\ell)/g^{-1}(\omega)\subset V\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}E&\longrightarrow&F&\longrightarrow&G\\ U&\longleftarrow&V&\longleftarrow&\omega\end{array}$$

إذا:

$$g^{-1}(\omega)\subset V\Longrightarrow f^{-1}[g^{-1}(\omega)]\subset f^{-1}(V)\subset U$$

و منه:

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(\omega)\subset U$$

أي:

$$(g\circ f)^{-1}\subset U$$

و هو المطلوب.

تعريف

(الإستمرارية)

f تطبيق من (E,d) نحو (F,σ) نقول أن f مستمر في x_0 إذا و فقط إذا كان $\lim\limits_{x\longmapsto x_0} f(x)=f(x_0)$ إذا و فقط إذا:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in E,d(x_0,x)<\eta\Longrightarrow\sigma(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

$$\forall V\in V(f(x_0))\ :\ f^{-1}(V)\in V(x_0)$$

مبرهنة

1. f مستمر على E إذا و فقط إذا كانت الصورة العكسية لمفتوح من F (أو مغلق) هو مفتوح (أو مغلق) من E.

f مستمرة على E $\Longleftrightarrow \forall U\in F,f^{-1}(U)\subset E$

2. f مستمرة على E $\Longleftrightarrow \forall A\subset F,f^{-1}(A)\subset E$

(مغلق) (مغلق)

البرهان

1. f مستمر على E يعني f مستمرة عند كل نقطة x من E أي: $\lim\limits_{y\longrightarrow x} f(y)=f(x)$

f مستمرة عند $x \Longleftrightarrow \forall V\in V(f(x)), f^{-1}(V)\in V(x)$

أ. نبين الإستلزام الأول:

f مستمرة عند x من $E \Longleftarrow \forall V\in V(f(x)), f^{-1}(V)\in V(x)$

f مستمر على $E \Longleftarrow$ ($f^{-1}(V)(E$ مفتوح من) $\Longrightarrow$ ($\forall V(F$ مفتوح من

ليكن U(مفتوح من F) إذا:

$$\begin{cases} f^{-1}(V)=\phi \\ \vee \\ f^{-1}(U)\neq\phi \end{cases}$$

إذا كان $f^{-1}(U)\neq\phi$ إذا $\exists x\in f^{-1}(V)$

$\forall x\in f^{-1}(U)\Longrightarrow f(x)\in V\Longrightarrow U\in V(f(x))$

حيث V(مفتوح من F)وهو جوار لكل نقاطه، و بما أن f مستمر فإن $f^{-1}(V)\subset V(x)$.

ومن هنا $f^{-1}(V)$ جوار لكل نقاطه ومنه $f^{-1}(V)$ (مفتوح من F).

ب. نبين الإستلزام العكسي:

f مستمرة عند x من $E \Longrightarrow \forall V\in V(f(x)), f^{-1}(V)\in V(x)$

لدينا: U جوار ل $f(x)$ أي:

$\exists V($ مفتوح من $F)/f(x)\in V\subset U\Longrightarrow x\ \in f^{-1}(V)\subset f^{-1}(U)$

حسب المبرهنة أعلاه $f^{-1}(u)$ مفتوح يحوي x.

ومنه $f^{-1}(U)$ جوار ل x حسب تعريف الجوار.

2. f مستمرة على $E \Longleftrightarrow$ ($f^{-1}(A)$ (E مغلق من) / (مغلق من F) $\forall A$

أ. نبين الإستلزام الأول:

f مستمرة على $E \Longleftarrow$ ($f^{-1}(A)$ (E مغلق من) / (مغلق من F) $\forall A$

ليكن:

A (مغلق من F) $\Longleftrightarrow A^c$ (مفتوح من F) $\Longrightarrow f^{-1}(A^c)$ (مفتوح من E).

و لدينا:

$f^{-1}(A^c)=(f^{-1}(A))^c \Longleftrightarrow f^{-1}(A)$ مغلق.

ب. نبين الإستلزام العكسي:

f مستمرة على $E \Longrightarrow$ مغلق من E $f^{-1}(A)$ / مغلق من F $\forall A$

ليكن:

$f^{-1}(V^c)=(f^{-1}(V))^c$(مغلق في F) $\Longleftarrow$ (مغلق من $V^c(F \Longleftrightarrow$ (مفتوح من $V(F$

$\Longleftrightarrow$ (مفتوح من $f^{-1}(V)(E$

إذن f مستمر على E.

مبرهنة

f مستمرة $\iff \forall A\subset E/f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

البرهان

1. نبين الإستلزام الأول:

f مستمرة $\Longleftarrow \forall A\subset E/f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

لتكن المجموعة الجزئية A من E، حيث $\overline{A}$ مغلق من E.

اثبات الإحتواء :

$$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$$

$$y\in f(\overline{A})\iff\exists x\in\overline{A}/y=f(x)$$

ومنه يجب اثبات أن $y\in\overline{f(A)}$

$$x\in\overline{A}\quad\iff\quad\forall U\in V(x)\quad,\quad V\cap A\neq\phi.................(*)$$

$$y\in\overline{f(A)}\quad\iff\quad\forall U\in V(y)\quad,\quad U\cap f(A)\neq\phi$$

ليكن U جوار ل y حيث $(f(x)=y)\Longleftarrow f^{-1}(U)$ جوار ل x.
من $(*)$ نجد

$$f^{-1}(U)\neq\phi$$

$$f(f^{-1}(U)\cap A)\subset f(f^{-1}(U))\cap f(A)\subset U\cap f(A)\Longrightarrow\ U\cap f(A)\neq\phi\Longrightarrow y\in f(\overline{A})$$

2. نبين الإستلزام العكسي :

f مستمرة $\Longleftarrow \forall A\subset E/f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

ليكنV مغلق من F ولنبرهن أن $f^{-1}(V)$ مغلق في E أي

$$f^{-1}(V)=\overline{f^{-1}(V)}$$

(الإحتواء الأول بديهي)
نبين الإحتواء الثاني:

$$\overline{f^{-1}(V)}\subset f^{-1}(V)$$

بأخذ

$$f^{-1}(V)=A$$

نحصل حسب المبرهنة المذكورة سابقا على: $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$
أي:

$$f(\overline{f^{-1}(V)})\subset\overline{f(f^{-1}(V))}\subseteq V........(1)$$

ومنه :
$$f(\overline{f^{-1}(V)}) \subset V$$
إذن: $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(V)$ أي $f^{-1}(V)$ مغلق في E

ومنه:
$$f^{-1}(V) = \overline{f^{-1}(V)}$$

تعريف

f تطبيق من (E,d) نحو (F,σ)، التطبيق f يحافظ على المفتوحات و المغلقات.

1. f تطبيق مفتوح $\Longleftrightarrow$ $\subset F$ مفتوح $f(V) \Longrightarrow \subset E$ مفتوح $\forall V$
2. f تطبيق مغلق $\Longleftrightarrow$ $\subset F$ مغلق $f(A) \Longrightarrow \subset E$ مغلق $\forall A$

تعريف

f تطبيق من (E,d) نحو (F,σ).

f مستشاكل $\Longleftrightarrow$ f تقابلي

f مستشاكل $\Longleftrightarrow$ f و f^{-1} مستمرين

ملاحظة

1. f مفتوح $\Longleftrightarrow$ f^{-1} مستمر .
2. f مغلق $\Longleftrightarrow$ f^{-1} مغلق .

تعريف

f تطبيق من $E,d)$ نحو (F,σ).

f مستمر بإنتظام على E $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \exists x', x'' \in E: \ d(x', x'') < \eta \Longrightarrow \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$

1.7 المتتاليات على الفضاءات المترية

تعريف

(E,d) فضاء متري (x_n) متتالية من E، نقول أن (x_n) متقاربة نحو X إذا و فقط إذا:

$$\forall\varepsilon > 0 \ , \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall n \in \mathbb{N}: \ n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n; X_{n0}) < \varepsilon$$

$$\forall B_o(x,\varepsilon) \ , \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \forall n \in \mathbb{N} \ , n \geq n_0 \ , x_n \in B_o(X_0,\varepsilon)$$

$$\forall V \in V(x) \ , \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \forall x \in \mathbb{N} \ , n \geq n_0, \ x_n \in V$$

تعريف

(متتالية كوشي)

$$(x_n)_n \text{ متتالية كوشي } \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall p, q \in \mathbb{N}; p, q > n_0 \implies d(n_p; n_q) < \varepsilon$$

تعريف

(الإنفصال)

كل فضاء متري (E, d) منفصل أي :

$$\forall x, y \in E, x \neq y, \exists V_x, \exists V_y / V_x \cap V_y = \phi$$

مبرهنة

1. كل متتالية متقاربة فنهايتها وحيدة.
2. كل متتالية متقاربة فهي لكوشي (العكس غير صحيح).

البرهان

لتكن $(x_{n)_n}$ متتالية من فضاء متري (E, d) متقاربة نحو x

نفرض أن $(X_{n)_n}$ متقاربة نحو t حيث $x \neq t$ إذا:

$$x_1 \longrightarrow x \iff \forall B_o(x, \varepsilon), \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \implies x_n \in B_o(x, \varepsilon)$$

$$x_2 \longrightarrow t \iff \forall B_o(t, \varepsilon), \exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n > n_2 \implies x_n \in B_o(t, \varepsilon)$$

إذا:

$$\exists N = \max(n_1, n_2), \forall n \in \mathbb{N} \implies \begin{cases} x_n \in B_o(x, \varepsilon) \\ \wedge \\ x_n \in B_o(t, \varepsilon) \end{cases}$$

$$x \neq t, \forall B_o(t, \varepsilon), \forall B_o(t, \varepsilon), B_o(x, \varepsilon) \cap B_o(t, \varepsilon) \neq \phi$$

و هذا تناقض مع خاصية الإنفصال (كل فضاء متري منفصل) ومنه كل متتالية متقاربة نحو نهاية وحيدة.

مبرهنة

(E, d) فضاء متري A جزء من E.

$$A \text{ مغلق } \iff \forall (x_n)_n \subset A, x_n(\text{ متقاربة }) \; x_n \longrightarrow x \implies x \in A$$

البرهان

1. اثبات الإستلزام الأول:

$$A \text{ مغلق } \implies \forall (x_n)_n \subset A, x_n \longrightarrow x \implies x \in A$$

لتكن $(x_n)_n$ متتالية من A / $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$
هل x من A ؟
بإستعمال تعريف النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \iff \forall B_o(x,\varepsilon)\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ n > n_0 \implies x_n \in B_o(x,\varepsilon)$$

نفرض بالخلف: $x \notin A$ بما أن A مغلق $(A = \overline{A})$ نجد $x \notin \overline{A}$ (حسب تعريف الملاصقة)

$$\begin{aligned} x \notin \overline{A} \iff & \exists B_o(x,\eta) \ /\ B_o(x,\eta) \cap A = \phi \\ & \exists B_o(x,\eta) \ /\ B_o(x,\eta) \subset A^c \end{aligned}$$

لكن

$$n > n_0 \implies x_n \in B_o(x,\eta) \subset A^c \implies n > n_0 \ :\ x_n \in A^c \implies x_n \notin A$$

وهذا تناقض.

2. اثبات الإستلزام الثاني:
نبين أن A مغلق أي: $A = \overline{A}$ (نعلم أن $A \subset \overline{A}$)
نفرض أن : A غير مغلق $\iff A \neq \overline{A}$ أو $\overline{A} \not\subset A$

$$\begin{aligned} \exists t \in \overline{A} \wedge t \notin A &\iff \overline{A} \not\subset A \\ t \in \overline{A} &\iff \forall B_o(t,\varepsilon)\ ,\ B_o(t,\varepsilon) \cap A \neq \phi \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad ,\ B_o(t,\varepsilon) \cap A \neq \phi \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \exists (x_n)_n \in A \\ x_n \in B_o(t, \frac{1}{n}) \iff d(t,x_n) \leq \frac{1}{n} \\ x_n \longrightarrow t \implies t \in A \end{gathered}$$

ومنه تناقض مع الفرض $(t \in A)$

مبرهنة

(E,d) فضاء متري، A جزء غير خالي من E، x نقطة من E، نقول عن x أنها نقطة ملاصقة إذا وجدت متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من A حيث $(x_n)_n$ متقاربة نحو x

$$x \in \overline{A} \iff \exists (x_n) \subset A \qquad / x_n \longrightarrow x$$

البرهان

1. اثبات الإستلزام الأول:
بنفس طريقة البرهان السابق.

2. إثبات الإستلزام الثاني:

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \,/\quad x_n \longrightarrow x \quad\Longrightarrow\quad x\in\overline{A}$$

$$\begin{aligned} x_n \longrightarrow x &\iff \forall\varepsilon>0\,,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\,,\ \forall n\in\mathbb{N}\,,\ n>n_0 \Longrightarrow x_n\in B_o(x,\varepsilon) \\ &\iff \forall B_o(x,\varepsilon)\,,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\,,\ \forall n>n_0 \Longrightarrow x_n\in B_o(x,\varepsilon) \end{aligned}$$

$$n>n_0\,,\ x_n\in B_o(x,\varepsilon)\,,\ x_n\subset A$$

إذا: $\forall B_o(x,\varepsilon)\,,\qquad B_o(x,\varepsilon)\cap A\neq\phi \Longrightarrow x\in\overline{A}$

تعريف

(المتتاليات الجزئية)
(x_n) متتالية كل متتالية من الشكل $(x_{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ حيث φ تطبيق متزايدة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{N}$ (أو جزء من $\mathbb{N}$) نحو $\mathbb{N}$ تسمى متتالية مستخرجة أو متتالية جزئية من (x_n)

$$\begin{aligned} \varphi\ :\ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \varphi(n) \end{aligned}$$

مثال

$(x_n - x_{2n+1})$

$$\begin{aligned} \varphi\ :\ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto 2n+1 \end{aligned}$$

تطبيق متزايدة تماما.

تعريف

(x_n) متتالية من فضاء متري (E,d)، x نقطة من E تسمى قيمة ملاصقة ل $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ إذا و فقط إذا:

$$\forall\,\varepsilon>0\,,\ \forall\,n_0\in\mathbb{N}\,,\ \exists\,n\in\mathbb{N}\,/\,n>n_0 \quad\Longrightarrow\quad x_n\in B_d(x,\varepsilon)$$

أمثلة

$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ x_n=\dfrac{1+(-1)^n n}{n}$ هل: $(x=1)$ ، $(x=-1)$ قيمة ملاصقة ل (x_n)

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon>0, \forall\,n_0\in\mathbb{N}, \exists\,n\in\mathbb{N}/n>n_0 &\Longrightarrow\quad x_n\in B_d(x,\varepsilon) \\ &\Longrightarrow\quad x_n\ \in\,]1-\varepsilon\,,\ 1+\varepsilon[\end{aligned}$$

$$\forall n_0\in\mathbb{N}, \exists\,n\in\mathbb{N}, n=2n_0, n>n_0\ \ 2n_0>n_0 \Longrightarrow x_{2n_0}\ \in]1-\varepsilon\ ,\ 1+\varepsilon[, x_{2n_0}=\frac{1+2n_0}{2n_0}=\frac{1}{2n_0}+1$$

$$x=-1, \forall\varepsilon>0, \forall\,n_0\in\mathbb{N}/\exists n\in\mathbb{N}\,/\,n>n_0 \Longrightarrow x_n\ \in\,]-1-\varepsilon\,,\ -1+\varepsilon[$$

$$A=\{x_n\,/\,n\in\mathbb{N}\}\,,\ x\in\overline{A}\ =\overline{\{x_n\,/\,n\in\mathbb{N}\}}$$

مبرهنة

1. كل قيمة ملاصقة ل (x_n) فهي نقطة ملاصقة للمجموعة المتكونة من عناصر المتتالية.
2. العكس غير صحيح على العموم.

البرهان

$$A=\{x_n \,/\, n\in\mathbb{N}\}$$

$$x \text{ قيمة ملاصقة ل } x_n \implies x\in\overline{A}$$

$$x \text{ قيمة ملاصقة ل } x_n \iff \forall\varepsilon>0,\forall\, n_0\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N}, n>n_0 \implies (x_n)\in B_o(x,\varepsilon)$$
$$\implies \forall\, B(x,\varepsilon) B(x,\varepsilon)\cap A\neq\phi$$
$$\implies x\in\overline{A}$$

مثال مضاد

لتكن المتتالية $x_n=x$، إذا هل تقبل قيمة ملاصقة؟

نفرض أنها تقبل قيمة ملاصقة x

$$\forall\varepsilon>0,\forall n_0\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N}\,,\; n>n_0 \implies x_n\in B_o(x,\varepsilon)$$
$$\implies x_n=x\in]x-\varepsilon;x+\varepsilon[$$

إذا كان n_0 كبيرا جدا و لدينا: $n>n_0$ فإن $n\longmapsto+\infty$

$$\exists n>n_0 \qquad\qquad x_n\in]x-\varepsilon;x+\varepsilon[$$

$x_n=x$ متباعدة و $x_n\in B_o(x,\varepsilon)$ وهذا تناقض (لأن هذا يعني أن (x_n) متقاربة) ومنه $x_n=x$ لا تقبل أي قيمة ملاصقة لها.

$$A=\{n \,/\, n\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}$$

حيث A تقبل عدد لانهائي من النقط الملاصقة

مبرهنة

x ملاصقة ل (x_n) فإنه يوجد متتالية مستخرجة متقاربة نحو x.

مبرهنة

1. كل متتالية لكوشي تقبل على الأكثر قيمة ملاصقة لها.
2. (x_n) متتالية متقاربة نحو $x \iff (x_n)$ لكوشي.
3. (x_n) متتالية متقاربة نحو $x \iff (x_n)$ تقبل قيمة ملاصقة x.

1.8 الفضاءات المترية التامة

تعريف

نقول أن (E,d) فضاء متري تام إذا كانت كل متتالية لكوشي متقاربة.

أمثلة

1. $(\mathbb{R}, d_u)$ فضاء متري تام $d_u = |x-y|$.
2. $(\mathbb{C}, d_u)$ فضاء متري تام $d_u = \left[(x'-y')^2 + (x''-y'')^2\right]^{\frac{1}{2}}$،
حيث: $x = x' + ix''$ و $y = y' + iy''$.
3. $(\mathbb{Q}, d_u)$ ليست فضاء متري تام.

البرهان

إثبات أن: $(\mathbb{Q}, d_u)$ ليست فضاء متري تام.
لدينا:

$$\exists (x_n)_n \in \mathbb{Q} \quad (x_n)_n \text{ لكوشي } \quad (x_n)_n \text{ غير متقاربة } \quad x_n \longrightarrow x \notin \mathbb{Q}$$

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \longrightarrow l$$

فهي متقاربة نحو l.

$(x_n)_n$ من $\mathbb{Q}$ فهي من $\mathbb{R}$، و بمأنها متقاربة على $\mathbb{R}$ فهي لكوشي، و لكن $l \notin \mathbb{Q}$.

نظرية

(نظرية كنطور)
(E, d) فضاء متري لدينا:

$$(E, d) \text{ فضاء متري تام } \iff \forall (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ , } \lim_{n\to+\infty} d(F_n) = 0 \Longrightarrow \bigcap F_n \neq \phi$$

حيث: $(F_n)_n$ متتالية مغلقات متناقصة و غير خالية.
أي:
(E, d) فضاء متري تام $\iff$ تقاطع كل المتتاليات (F_n) المتناقصة و المغلقة و غير الخالية و التي تحقق $\lim_{n\to+\infty} d(F_n) = 0$ فهي غير خالية.

تعريف

(فضاءات بير)
نقول أن (E, d) فضاء لبيري إذا كان كل إتحاد قابل للعد لمغلقات داخلها خالي فداخله خالي.

$$(E, d) \text{ فضاء لبيري } \iff \forall (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, \overset{o}{F_n} = \phi \Longrightarrow \overset{o}{\widehat{\bigcup_{n\geq 1} F_n}} = \phi$$

حيث : F_n مغلق و قابل للعد.

نظرية
(بير)
(E,d) فضاء متري لبيري إذا وفقط إذا كان كل تقاطع قابل للعد لمفتوحات كثيفة في E فهو كثيف في E $(\overline{V_n}=E)$.

(E,d) فضاء لبير $\iff \overline{\bigcap_{n\geq 0} V_n} = E \Longrightarrow \overline{V_n}=E$ (مفتوح) V_n، $\forall (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

البرهان

ليكن: $V_2=E$، لدينا: $V_2\cap B_o(x_1,r_1)\neq\phi$
ومنه توجد $B_o(x_2,r_2)$ حيث: $B_o(x_2,\frac{r_2}{2})\subset B_o(x_2,r_2)\subset V_2\cap B_o(x_1,\frac{r_1}{2})$
إذا:

$$r_2<\frac{r_1}{2}<\frac{r_0}{2^2}=\frac{r_0}{4}$$

F_2 مغلق غير خالي ومنه:

$$F_n=B_F(x_n,\frac{r_n}{2})\subset B_o(x_n,r_n)\subset V_n\cap B_o(x_{n-1},\frac{r_{n-1}}{2})$$

إذا:

$$\frac{r_n}{2}\leqslant\frac{r_{n-1}}{2^2}\leqslant\ldots\leqslant\frac{r_0}{2^{n+1}}\quad\longrightarrow 0$$

$F_n=B_F(x_n,\frac{r_n}{2})$ متتالية مغلقات $\quad \lim_{n\to+\infty} d(F_n)=0 \quad F_{n+1}\subset F_n?$

$$B_o(x_{n+1},\frac{r_{n+1}}{2})\subset B_o(x_n,\frac{r_n}{2})\subset\ldots\subset B_o(x_2,\frac{r_2}{2})\subset V_2\cap B_o(x_2,\frac{r_1}{1})$$

E تام إذا:

$$\bigcap F_n\neq\phi\Longrightarrow\exists x\in\bigcap_{n\geqslant 0}F_n;\forall n\in\mathbb{N},\quad x\in F_0\implies x\in V_0\wedge x\in V$$
$$x\in F_1\implies B_o(x_1,r_1)\subset B_o(x_0,\frac{r_0}{2})\cap V_1$$
$$x\in F_1\implies x\in V_1$$

إذا:

$$\forall x\in\mathbb{N},x\in V_n$$

أي:

$$\forall V\ ,\ x\in V\wedge x\in\bigcap_{n\geqslant 0}V_n$$

إذا:

$$V\cap\left(\bigcap V_n\right)\neq\phi$$

ومنه:

$$\overline{\cap V_n}=E$$

أي: (E,d) لبير.

مبرهنة

(كنطور)
إذا كان (E,d) فضاء متري تام و $E=\bigcup\limits_{n\geq 0}F_n$ بحيث $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية مغلقات من E فإنه يوجد على الأقل n_0 من $\mathbb{N}$ حيث $\overset{o}{F}_{n_0}\neq\phi$.

البرهان

نبرهن بالخلف:

$$\exists\, n_0\in\mathbb{N}\quad/\quad \overset{o}{F}_{n_0}\neq\phi$$

نفرض العكس أي:

$$\forall\, n\in\mathbb{N}\quad/\quad \overset{o}{F}_n\neq\phi$$

(E,d) فضاء متري تام إذا هو لبير و منه: $E=\overset{o}{E}=\overset{o}{\widehat{\bigcup\limits_{n\geq 1}F_n}}=\phi$

أي: $E=\phi$ وهذا تناقض.

مبرهنة

(E,d) فضاء متري تام، A جزء غير خالي من E، لدينا التكافؤ:

A تام $\Longleftrightarrow A$ مغلق من E

البرهان

(A,d_A) فضاء متري جزئي من (E,d)

1. اثبات أن: A مغلق $\Longrightarrow (A,d_A)$ تام
لدينا:

A مغلق $\Longleftrightarrow \overline{A}=A$ ، $\overline{A}\subset A$ لأن $A\subset\overline{A}$

نأخذ:

$$\forall x\in\overline{A}\Longrightarrow x\in A; x\in\overline{A}\Longleftrightarrow\exists(x_n)_n\in A/\ \ x_n\longrightarrow x$$

$(x_n)_n$ لكوشي على $(A,d)\Longrightarrow (x_n)_n$ لكوشي على $(E,d)\Longrightarrow x_n\longrightarrow x\in E\Longrightarrow x\in F$

مادام (A,d_A) تام، إذا $(x_n)_n$ متقاربة نحو x في A إذا $x\in A$
أي: A مغلق ، ومنه $\overline{A}\subset A$

2. إثبات أن: (A,d_A) تام $\Longrightarrow A$ مغلق

$x_n\longrightarrow x\wedge x\in A \Longrightarrow (x_n)_n$ لكوشي على $E \Longrightarrow (x_n)_n$ لكوشي على A

لأن: A مغلق.
$(x_n)_n$ متقاربة في A ومنه: (A,d_A) تام.

مثال

$(\mathbb{R}, d_u)$ فضاء متري تام، لدينا $A =]0,1]$ ليس مغلق إذا حتما ليس تام .

$x_n = \frac{1}{n} \in A$, $\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \notin A$ لكوشي في A.

إذا غير متقاربة في A.

نظرية

(الإمتداد بالإستمرار)

(E, d) فضاء متري، و (F, σ) فضاء متري تام، A جزء كثيف في E، f تطبيق من A نحو F مستمر بإنتظام على A.

إذن يوجد تطبيق g وحيد مستمر بإنتظام من E نحو F بحيث: $\forall x \in A \quad f(x) = g(x)$

$$f : \quad A \subset E \longrightarrow (F, \sigma)$$

$$\exists\ g : \quad E \longrightarrow F \quad \forall x \in A \quad f(x) = g(x)$$

g إمتداد بالإستمرار ل f على E.

البرهان

$$f : A \subset E \longrightarrow F \ , \ \overline{A} = E \text{ مستمرة بإنتظام}$$

$$x \in E = \overline{A} \Longleftrightarrow \forall (x_n) \subset A \ / \ x_n \longrightarrow x$$

$$\begin{aligned} g : \quad E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \ ?$$

$(x_n)_n$ لكوشي على E، f مستمر بإنتظام إذا $f(x_n)$ لكوشي على F.

(F, σ) تام، إذا $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة نحو $y \in F$.

لتكن العلاقة:

$$\begin{aligned} g : \quad E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) = y \end{aligned}$$

حيث : $x = \lim x_n$ ، $y = \lim f(x_n)$ و $(x_n) \subset A$

$$y \text{ تطبيق } \Longleftrightarrow \forall x \in E, \exists y \in F \ , \ y = f(x)$$

و

$$x, x^{'} \in E \ ; \ x = x^{'} \Longrightarrow g(x) = g(x^{'})$$

$$x \in E = \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n) \in A, x_n \longrightarrow x \Longrightarrow \exists y / \lim f(x_n) = y = g(x)$$

$$x^{'} \in E = \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x^{'}_n) \in A, x^{'}_n \longrightarrow x^{'} \Longrightarrow \exists y^{'} / \lim f(x^{'}_n) = y^{'} = g(x^{'})$$

نبين أن: $y = y^{'}$: $\forall \varepsilon > 0, \delta(y, y^{'}) < \varepsilon$

$$\delta(y, y^{'}) \leqslant \delta(y, f(x_n)) + \delta(f(x_n), f(x^{'}_n)) + \delta(f(x^{'}_n), y^{'})$$

$$x_n \longrightarrow x \Longleftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, n > n_1 \Longrightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

$$x_n^{'} \longrightarrow x^{'} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, n > n_2 \Longrightarrow d(x_n^{'}, x^{'}) < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_3 = \max(n_1, n_2)/\forall n > n_3 \Longrightarrow \begin{cases} d(x_n, x) < \frac{\varepsilon_1}{2} \\ d(x_n^{'}, x^{'}) < \frac{\varepsilon_1}{2} \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n > n_3 \Longrightarrow d(x_n, x) + d(x, x^{'}) + d(x^{'}, x_n^{'})$$

نضع $x = x^{'}$ نجد: $d(x_n, x_n^{'}) < \varepsilon_1$

f مستمر بإنتظام على A:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x^{'}, x^{''} \in A; d(x^{'}, x^{''}) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x^{'}), f(x^{''})) < \varepsilon$$

نضع $\eta = \varepsilon_1$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \varepsilon_1, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_3 \Longrightarrow d(x_n, x_n^{'}) < \varepsilon_1 \Longrightarrow \delta(f(x_n), f(x_n^{'})) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n > n_3 \Longrightarrow \delta(f(x_n), f(x_n^{'})) < \frac{\varepsilon}{3} \cdots \star$$

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) = y \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_4/\forall n \in \mathbb{N}, n > n_4 \Longrightarrow \delta(f(x_n), y) < \tfrac{\varepsilon}{3} \cdots \star\star \\ \lim f(x_n^{'}) = y^{'} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_5/\forall n \in \mathbb{N}, n > n_5 \Longrightarrow \delta(f(x_n^{'}), y^{'}) < \tfrac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

إذا: $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \max(n_3, n_1, n_5)/\forall n \in \mathbb{N}, n > N$ فإن:

$$\delta(y, y^{'}) \leqslant \delta(y, f(x_n)) + \delta(f(x_n), f(x_n^{'})) + \delta(f(x_n^{'}), y^{'}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

إذا:

$$0 \leqslant \delta(y, y^{'}) < \varepsilon$$

ومنه: $y = y^{'}$

نبين أن: $\forall x \in A, f(x) = g(x)$

$$f(x_n) \longrightarrow f(x) \text{ إذا } x_n \longrightarrow x \in A$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} f(x) = f(x) = g(x)$$

g مستمر بإنتظام على E:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x^{'} \in E, d(x, x^{'}) < \eta \Longrightarrow \delta(g(x), g(x^{'})) < \varepsilon$$

لدينا من $(\star)$ و $(\star\star)$ نحصل على:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_3/\forall n > n_3 \Longrightarrow d(x, x^{'}) \quad &\leqslant \quad d(x, x_n) + d(x_n, x_n^{'}) + d(x_n^{'}, x^{'}) \\ &< \quad \tfrac{\varepsilon_1}{3} + d(x_n, x_n^{'}) + \tfrac{\varepsilon_1}{3} \end{aligned}$$

و منه نأخذ: $\eta = \frac{2\varepsilon_1}{3} + \varepsilon$
نجد: $d(x,x^{'}) < \eta$
لدينا: f مستمر بإنتظام على A

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \forall x_1, x_2 \in A, d(x_1,x_2) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

و منه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \forall x, x^{'} \in E, d(x,x^{'}) < \eta \Longrightarrow \delta(g(x), g(x^{'}) < \varepsilon$$

أي: g مستمر بإنتظام على E

الأبعاد المتكافئة

1. d_1 و d_2 متكافئان.

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+ \ , \ \alpha d_2 \leqslant d_1 \leqslant \beta d_2$$

2. d_1 و d_2 متكافئان بإنتظام.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall (x,y) \in E^2 \ , \ d_1(x,y) < \eta \Longrightarrow d_2(x,y) < \varepsilon$$

3. d_1 و d_2 متكافئان طبولوجيا.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists \eta > 0 \ / \ \forall y \in E \ \ d_1(x,y) < \eta \Longrightarrow d_2(x,y) < \varepsilon$$

1.9 تمارين مقترحة

التمرين الأول:

(E,d) فضاء متري و $a\in E$ من أجل كل x، y من E نضع:

$$d_a(x,y)=\begin{cases} d(a,x)+d(a,y) & si \quad x\neq y\\ 0 & si \quad x=y\end{cases}$$

1- برهن أن d_a تعرف مسافة على E.
2- برهن أن كل كرة مفتوحة ذات المركز a و نصف القطر r على المسافة d تساوي كرة مفتوحة ذات المركز a و نصف القطر r على المسافة d_a.

التمرين الثاني:

ليكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تطبيق متزايد تماما و ليكن التطبيق d المعرف ب:

$$\begin{array}{llll} d: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,y) & \longrightarrow & d(x,y)=|f(x)-f(y)|\end{array}$$

$\star$ بين أن d تطبيق على $\mathbb{R}$.

التمرين الثالث:

1- أذكر المسافات الأساسية على $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ و بين أنها متكافئة.
2- مثل هندسيا كرة الوحدة $B_o(o,1)$ في كل من $(\mathbb{R}^{\mathbf{3}},d_1)$ و $(\mathbb{R}^{\mathbf{3}},d_\infty)$.
3- A جزء من الفضاء المتري (E,d) أعط تعريف وافي لكل من: $\overline{A}$، A'، $\mathring{A}$، $Fr(A)$، $Ext(A)$
4- (E,d) فضاء متري تام A جزء غير خالي من E برهن التكافؤ التالي:

A تام $\Longleftrightarrow$ A مغلق من E

الترميز

E : مجموعة غير خالية.
ϕ : مجموعة خالية.

$\mathring{A}$: مجموعة نقاط داخلية.

$\overline{A}$: مجموعة نقاط ملاصقة.

A^c : مجموعة نقاط متممة.

Fr : حافة أو حدود.

V : جوار.

$\prod E_i$: الجداء الديكارتي.

d : مسافة.

B^O : كرة مفتوحة.

B^F : كرة مغلقة.

$\|.\|$: نظيم.

$L(E,F)$: مجموعة التطبيقات الخطية.

$L_c(E,F)$: مجموعة التطبيقات الخطية المستمرة.

$\bigcap\limits_{Fini}$: التقاطع المنتهي.

$\bigcup\limits_{q,q}$: الإتحاد الكيفي.

$\sum$: مجموع.

$\int_E$: تكامل على E.

قائمة المصطلحات

عربي	فرنسي	إنجليزي
مجموعة	Ensemble	Set
مجموعة جزئية	Sous-Ensemble	Subset
مجال	Domaine	Intervale
تطبيق	Application	Mapping
مستمر	Continu	Continuous
علاقة	Relation	Relation
فضاء	Espace	Space
جوار	Voisinage	Neighborhood
الداخلية	Intérieur	Interior
ملاصقة	Adhérence	Closure
مفتوح	Ouvert	Open
مغلق	Fermé	Closed
الحافة	Frontière	Frontier
قاعدة	Base	Base
منفصل	Séparé	separted
متتالية	Suite	Sequence
تغطية	Recoverement	Cover
متراص	Compact	Compact
مترابط	Connexe	Connected
مركبة	Composonte	Compenent

المراجع العلمية

[1] الدكتور غفار حسين موسى . مقدمة في الطبولوجيا . جامعة الزرقاء الأهلية

[2] الدكتور خضر حامد الأحمد . مبادئ أولية في الطبولوجيا . جامعة دمشق.1993 – 1992م

[3] الدكتور محمد الحازي . المختصر في الطبولوجيا . ديوان المطبوعات الجامعية.1994م

[4] الدكتور صلاح أحمد-د عبد الواحد أبو حمدة-د محمد بشير قابيل . الطبولوجيا (1) . جامعة دمشق.1991 – 1990م

[5] PHILIPE CHARPETIER . Topologie Générale . Université Baurdeaux 1 . 2001 – 01

[6] Richard Zakri . cours topologie . master 1 . 2010/2011

[7] Francis Nier-Dragos Iftimie . Introduction à la Topologie . Université de Rennes 1

[8] N,Bourbaki . Topologie Générale . Paris . Hermann . 1971