



Ecole Normale Supérieure d'Oran-Ammour Ahmed

Département des Sciences Exactes

Électricité & Magnétisme

Résumé de cours & exercices corrigés

Pour les étudiants de 1ère année PEM et PES Mathématiques, PEM sciences physiques et technologies, PES physique & L1 SM, ST

Dr Salem Hebri
salem.hebri@gmail.com

Année Universitaire :2024-2025

Avant Propos

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de première année des Écoles Normales Supérieures ainsi qu'à ceux des filières Sciences de la Matière (SM) et Sciences et Technologies (ST). Il propose des résumés concis et structurés du cours **Électricité et Magnétisme (Physique II)**, en conformité avec le programme officiel.

Son objectif est d'offrir un support clair et synthétique facilitant l'assimilation des notions fondamentales en électricité, tout en garantissant la rigueur scientifique requise. La progression des chapitres suit une logique didactique cohérente, permettant aux étudiants d'acquérir progressivement les concepts nécessaires à la compréhension des phénomènes électriques et électromagnétiques.

Chaque résumé de cours est accompagné d'une série d'exercices visant à tester la compréhension des notions abordées, à renforcer l'autonomie des étudiants et à développer leur capacité d'analyse à travers des mises en situation concrètes. Ces exercices encouragent également la maîtrise des ordres de grandeur, l'analyse dimensionnelle et la précision des résultats numériques.

Table des matières

Résumé: Électrostatique (charge ponctuelle)	04
Exercices : Electrostatiques (charges ponctuelles)	07
Solutions: Electrostatique (Charge ponctuelle)	09
Résumé : Electrostatique (distribution de charges continues)	15
Exercices : Distribution de charges continues	18
Solution : Distribution de charges continues	20
Résumé : Dipôle électrique	30
Exercices : Dipôle électrique	31
Exercices : Dipôle électrique	33
Résumé: Théorème de Gauss	37
Exercices : Théorème de Gauss	38
Solution : Théorème de Gauss	40
Résumé : Conducteurs en Équilibre & condensateurs	45
Exercices : Conducteurs en équilibre & condensateurs	47
Solutions : Conducteur en équilibre & condensateurs	49
Résumé : Courant continu et électrocinétique	53
Exercices : Courant continu et électrocinétique	58
Solution : Courant continu et électrocinétique	61
Résumé : Magnétisme	66
Exercices : Magnétisme	68
Solution: Magnétisme	96
Références	71

Résumé: Électrostatique (charge ponctuelle)

Introduction à l'électrostatique

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les charges électriques au repos. Elle inclut les notions fondamentales comme les forces électriques, les champs électriques, et le potentiel électrique.

1. Loi de Coulomb

C'est en 1785 que Coulomb montre expérimentalement que la force exercée sur une charge ponctuelle q_2 par une charge ponctuelle q_1 a les propriétés suivantes :

1-Elle est inversement proportionnelle au carré de la distance r séparant q_1 et q_2 ($\vec{F} \propto \frac{1}{r^2}$)

2-Elle est proportionnelle aux charges q_1 et q_2 .

La force créée par q_1 s'exerçant sur q_2 s'écrit :

La loi de Coulomb exprime la force entre deux charges ponctuelles :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{K q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

où :

- F : force électrique (N)
- $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$: constante de Coulomb ($8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$)
- q_1, q_2 : charges (Coulombs)
- r : distance entre les charges (m)

$\vec{u}_{12}$ est un vecteur unitaire porté par la droite passant par q_1 et q_2 , dont le sens est de q_1 vers q_2 :

La force créée par q_2 s'exerçant sur q_1 s'écrit :

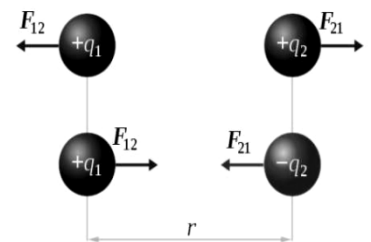
$\vec{u}_{21}$ est un vecteur unitaire porté par la droite passant par q_2 et q_1 , dont le sens est de q_2 vers q_1 :

$$\vec{F}_{2/1} = \frac{K q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{21}$$

Remarque

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

$$\|\vec{F}_{1/2}\| = \|\vec{F}_{2/1}\|$$



2. Champ électrique

La charge ponctuelle q_1 va créer à la distance r sur une charge ponctuelle q_2 une force ($\vec{F}_{1/2}$)

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{Kq_1q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

Le champ électrique $\vec{E}_{1/2}$ à une distance r d'une charge ponctuelle q_2 est donné par :

$$\vec{E}_{1/2} = \frac{\vec{F}_{1/2}}{q_2} = \frac{Kq_1}{r^2} \vec{u}_1$$

où :

- E : champ électrique (N/C)
- r : distance entre la charge et le point considéré (m)

3. Potentiel électrique

Le potentiel électrique V à une distance r d'une charge ponctuelle q_1 est :

$$V = \frac{Kq_1}{r}$$

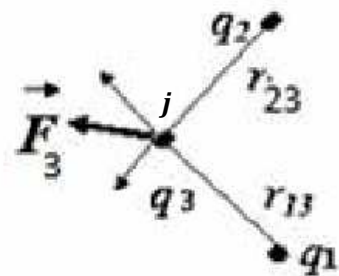
V : potentiel électrique (Volt)

Le potentiel est une grandeur scalaire qui décrit l'énergie potentielle par unité de charge en un point donné.

Principe de superposition

La force résultante exercée sur la charge q_3 est

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$



$$\vec{F}_3 = \frac{Kq_1q_3}{r_{13}^2} \vec{u}_{13} + \frac{Kq_2q_3}{r_{23}^2} \vec{u}_{23}$$

Pour N charges ponctuelles ($q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$) :

$$\vec{F}_j = K q_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{r_{ij}} \vec{u}_{ij}$$

le champ électrique au point j peut s'écrire :

$$\vec{E}_j = K \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{r_{ij}} \vec{u}_{ij}$$

le potentiel électrique au point j peut s'écrire :

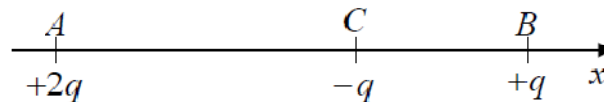
$$V_j = K \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{r_{ij}}$$

Exercices : Electrostatiques (charges ponctuelles)

Exercice 01 :

Soit la distribution de charges (de l'ordre du microcoulomb) ci-dessous ; $AB = d = 0,2m$; Les deux charges placées en A et B sont fixes; par contre la charge placée en C est mobile sur la droite AB .

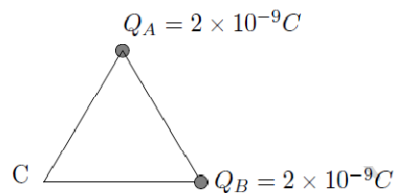
Quelle est la position d'équilibre de la charge placée en C , si elle existe ?



Exercice 02:

Deux charges ponctuelles et égales de valeurs $q = 2 \times 10^{-9} C$ sont placées aux sommets A et B d'un triangle équilatéral ABC de côté $a = 18 cm$ (Fig. 2). Déterminer:

1. La force électrique agissant sur la charge en A
2. La force électrique agissant sur une charge $q' = -10^{-9}$ placée en point C.



Exercice 03

On place quatre charges ponctuelles aux sommets ABCD d'un carré de côté $a = 1 m$, et de centre O, origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires e_x et e_y .

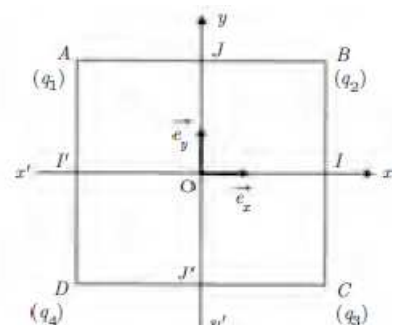
On donne :

$$q_1 = q = 10^{-8} C, \quad q_2 = -2q$$

$$q_3 = 2q, \quad q_4 = -q$$

$$K = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$$

- 1) Déterminer le champ électrique E au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de E .
- 2) Exprimer le potentiel V créé en O par les quatre charges.

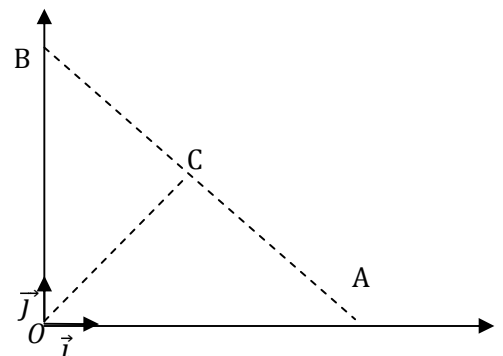


Exercice 04

Soient 4 charges ponctuelles positives q_0, q_A, q_B et Q sont placées dans le vide aux point O, A, B et C

Tel que $OA = OB = 2cm$, et $AC = BC = OC$

&-Déterminer dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ la force F_c exercée par q_0, q_A et q_B sur Q



b-Calculer le module de cette force

2-Quelle est l'expression du champ E_c , calculer son module

3-Déterminer au point C l'expression du potentiel et calculer son module .

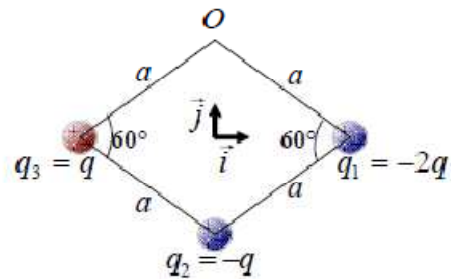
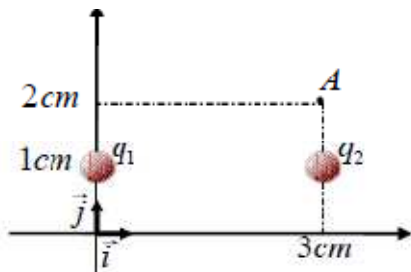
$$q_0=10^{-4}C, \quad q_A=q_B=10^{-6}C, \quad Q=10^{-3}C \quad K=9 \cdot 10^9 \text{ SI}$$

Exercice 05

1)Trouver le champ électrostatique crée par les charges ci-dessous aux points A et O.

Exprimer le champ en termes des vecteurs unitaires, puis donner son module.

2) Trouver le potentiel électrostatique crée par les trois charges aux points A et O.



Exercice 06

On considère quatres charges électriques q_A , q_B , q_C et q_D disposées

au sommets d'un carré $ABCD$ dont les coordonnées dans un plan

OXY sont : $A(a,0)$, $B(0,a)$, $C(-a,0)$, $D(0,-a)$, où a est une constante

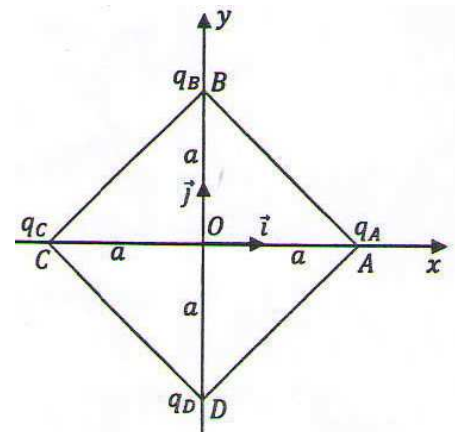
Positive.

On donne : $q_A=q_B=q$, $q_C=q_D=-q$

1) Exprimer dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ la force agissant sur q_A .

2) Trouver le champ électrique au point A

3) Trouver le potentiel au point O



Solutions: Electrostatique (Charge ponctuelle)

Exercice 01

- Il faut que $\overrightarrow{F_{A/C}} = \overrightarrow{F_{B/C}}$

$$\Rightarrow \frac{K \cdot |2q| \cdot |-q|}{x^2} = \frac{k \cdot |q| \cdot |-q|}{(d-x)^2}$$

Avec $x=AC$ et $d-x=BC$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2} \Rightarrow x^2 - 0,8x + 0,08 = 0$$

Deux solutions

$$x_1 = 0,117m$$

$$x_2 = 0,68m \text{ (solution refusée car } x_2 > d)$$

$$\mathbf{x=0,117m}$$

Exercice 02 :

1- Calcul de la force au point A

Le triangle ABC est équilatéral, donc $\alpha = 60^\circ$

$$\overrightarrow{F_{B/A}} = \frac{K q_A q_B}{a^2} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = -\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} = -\cos 60^\circ \vec{i} + \sin 60^\circ \vec{j} = -\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j}$$

$$\overrightarrow{F_{B/A}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-18}}{(18)^2 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right) = 10^{-6} \left(-\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\|\overrightarrow{F_{B/A}}\| = 10^{-6} N$$

2- On ajoute une charge au niveau du point C, calculer la force exercée par les charges des points A et B au point C.

$$\vec{F}_C = \vec{F}_{A/C} + \vec{F}_{B/C}$$

$$\vec{F}_c = \frac{Kq_Aq_C}{a^2} \cdot \vec{u}_A + \frac{Kq_Bq_C}{a^2} \cdot \vec{u}_B$$

$$\vec{u}_A = -\cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{j} = -\cos 60^\circ \vec{i} - \sin 60^\circ \vec{j} = -\frac{1}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j}$$

$$\vec{u}_B = -\vec{i}$$

$$\vec{F}_c = -\frac{Kq_Aq_C}{a^2} \cdot \left(\frac{3}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\|\vec{F}_c\| = \frac{Kq_Aq_C}{a^2} \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = 10^{-7} N$$

Exercice 03

1- Le champ électrique au point O :

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

D'après le théorème de Pythagore on a : $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

$$\vec{E}_1 = \frac{Kq_1}{r^2} \vec{u}_1 = \frac{Kq}{r^2} \vec{u}_1 = \frac{Kq}{r^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Kq_2}{r^2} \vec{u}_2 = -\frac{2Kq}{r^2} \vec{u}_2 = 2 \frac{Kq}{r^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{E}_3 = \frac{Kq_3}{r^2} \vec{u}_3 = \frac{2Kq}{r^2} \vec{u}_3 = 2 \frac{Kq}{r^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{E}_4 = \frac{Kq_4}{r^2} \vec{u}_4 = -\frac{Kq}{r^2} \vec{u}_4 = \frac{Kq}{r^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_4 = -\sqrt{2} \frac{Kq}{r^2} \vec{j}$$

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 2\sqrt{2} \frac{Kq}{r^2} \vec{j}$$

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \sqrt{2} \frac{Kq}{r^2} \vec{j} = 2\sqrt{2} \frac{Kq}{a^2} \vec{j}$$

$$V(O) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{Kq_1}{r} + \frac{Kq_2}{r} + \frac{Kq_3}{r} + \frac{Kq_4}{r} = \frac{Kq}{r} - \frac{2Kq}{r} + \frac{2Kq}{r} - \frac{Kq}{r} = 0$$

$$V(O) = 0V$$

Exercice 04

1- La force au point C exercée par les charge q_O, q_A et q_B

$$\vec{F}_c = \vec{F}_{A/C} + \vec{F}_{B/C} + \vec{F}_{O/C}$$

$$\vec{F}_c = \frac{q_A \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 AC^2} \vec{u}_A + \frac{q_B \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 BC^2} \vec{u}_B + \frac{q_O \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 OC^2} \vec{u}_O$$

A cause de la symétrie, on a :

$$\vec{F}_{A/C} + \vec{F}_{B/C} = 0$$

et donc

$$\vec{F}_c = \frac{q_O \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 OC^2} \vec{u}_O$$

Avec

$$OC^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \quad \text{et} \quad OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

et

$$\vec{u}_O = \cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\vec{F}_c = \frac{q_O \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 \frac{a^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) = \frac{\sqrt{2} q_O \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\|\vec{F}_c\| = \frac{q_O \cdot Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} = 4,5 \cdot 10^6 N$$

2- Le champ au point C :

$$\text{On a : } \vec{F}_c = Q \vec{E}_c \Rightarrow \vec{E}_c = \frac{\vec{F}_c}{Q}$$

$$\vec{E}_c = \frac{\sqrt{2} q_O}{4\pi\epsilon_0 a^2} (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\|\vec{E}_c\| = \frac{q_O}{2\pi\epsilon_0 a^2} = 4,5 \cdot 10^9 N/C$$

3- Le potentiel au point C :

$$V(C) = V_A + V_B + V_O$$

$$V(C) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 AC} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 BC} + \frac{q_O}{4\pi\epsilon_0 OC}$$

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 OC} (2q_A + q_O) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 a} (2q_A + q_O) = 6,4 \cdot 10^7 V$$

Exercice 05

Partie 01

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{q1} + \vec{E}_{q2} = \frac{Kq_1}{r^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{Kq_2}{r^2} \cdot \vec{u}_2$$

$$r_1^2 = 3^2 - (2-1)^2 = 10 \text{ cm}^2 = 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$r_2^2 = (2-1)^2 = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\vec{u}_1 = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} = \frac{3}{\sqrt{10}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{10}} \vec{j}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{j}$$

$$\vec{E} = \frac{27 \cdot 10^7}{\sqrt{10}} \vec{i} + \left(\frac{9 \cdot 10^7}{\sqrt{10}} + 27 \cdot 10^8 \right) \vec{j}$$

$$\vec{E} = \sqrt{\left(\frac{27}{\sqrt{10}} \right)^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{10}} + 270 \right)^2} \cdot 10^7 = 273 \cdot 10^7 \frac{V}{m}$$

b) Le potentiel

$$V = V_{q1} + V_{q2} = \frac{Kq_1}{r_1} + \frac{Kq_2}{r_2} = 2,8 \cdot 10^7 V$$

Partie 02

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{Kq_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{Kq_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 + \frac{Kq_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_3$$

$$r_1 = r_3 = a, \text{ et } r_2 = 2a \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a = a$$

$$\vec{u}_1 = -\cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ \vec{j} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{j}$$

$$\vec{u}_3 = \cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ \vec{j} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}$$

$$\vec{E} = -\frac{2Kq}{a^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \right) - \frac{Kq}{a^2} \cdot \vec{j} + \frac{Kq}{a^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{Kq}{a^2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{3}{2} \vec{j} \right)$$

$$\|\vec{E}\| = \frac{Kq}{a^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(-\frac{3}{2} \right)^2} = \frac{3Kq}{a^2} \left(\frac{V}{m} \right)$$

b) Le potentiel

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = -\frac{2Kq}{a} + \frac{Kq}{a} - \frac{Kq}{a} = -\frac{2Kq}{a} \text{ (V)}$$

Exercice 06

a) Le vecteur force $\vec{F}$ agissant sur q_A

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{B/A} + \vec{F}_{C/A} + \vec{F}_{D/A}$$

$$\vec{F}_{B/A} = K \frac{q_A q_B}{r_{AB}^2} \vec{u}_B = K \frac{q^2}{2a^2} \vec{u}_B$$

$$\vec{F}_{C/A} = K \frac{q_A q_C}{r_{AC}^2} \vec{u}_C = -K \frac{q^2}{4a^2} \vec{u}_C$$

$$\vec{F}_{D/A} = K \frac{q_A q_D}{r_{AD}^2} \vec{u}_D = -K \frac{q^2}{2a^2} \vec{u}_D$$

$$\vec{u}_B = \cos 45^\circ \vec{i} - \sin 45^\circ \vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\vec{u}_C = \vec{i}$$

$$\vec{u}_D = \cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$r_{AB} = r_{AD} = \sqrt{2}a,$$

$$r_{AC} = 2a$$

$$\vec{F}_A = -\frac{Kq^2}{4a^2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}Kq^2}{2a^2} \vec{j}$$

2-Le champ électrique

$$\vec{E}_A = \frac{\vec{F}_A}{q_A} \Rightarrow \vec{E}_A = -\frac{Kq}{4a^2} (\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j})$$

3-Le potentiel au point O

$$V(O) = V_A + V_B + V_C + V_D = \frac{Kq_A}{a} + \frac{Kq_B}{a} + \frac{Kq_C}{a} + \frac{Kq_D}{a} = \frac{Kq}{a} + \frac{Kq}{a} - \frac{Kq}{a} - \frac{Kq}{a}$$

Résumé : Electrostatique (distribution de charges continues)

Introduction

Dans l'étude de l'électrostatique, une distribution de charge continue représente un modèle plus réaliste que la charge ponctuelle. Ce modèle est essentiel pour analyser les champs et potentiels électriques dans des systèmes à densité de charge distribuée.

Champ électrique d'une distribution continue

Définition:

Le champ électrique généré par une distribution continue de charge est obtenu en intégrant les contributions de tous les éléments infinitésimaux de charge qui composent la distribution.

Densité de charge :

Il existe trois types de charges continues

- Linéique : λ (en C/m) pour une distribution sur une ligne.
- Surfactive : σ (en C/m²) pour une distribution sur une surface.
- Volumique : ρ (en C/m³) pour une distribution dans un volume.

Détermination de dQ :

En fonction de la densité de charge et de la géométrie :

- $dQ = \lambda dl$ pour une distribution linéaire.
- $dQ = \sigma dS$ pour une distribution surfactive.
- $dq = \rho dV$ pour une distribution volumique.

Expression mathématique :

Pour un élément infinitésimal de charge dq , le champ électrique produit à un point P est donné par :

$$\vec{dE} = \frac{K \cdot dQ}{r^2} \vec{u}$$

Calcul du champ total :

L'intégration s'effectue sur l'ensemble de la distribution :

$$\vec{E} = \int \frac{K \cdot dQ}{r^2} \vec{u}$$

Pour une longueur, l'intégrale devient :

$$\vec{E} = \int \frac{K \cdot dQ}{r^2} \vec{u} = \int \frac{K \cdot \lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

Pour une surface, l'intégrale devient :

$$\vec{E} = \iint \frac{K \cdot dQ}{r^2} \vec{u} = \iint \frac{K \cdot \sigma dS}{r^2} \vec{u}$$

Pour un volume, l'intégrale devient :

$$\vec{E} = \iiint \frac{K \cdot dQ}{r^2} \vec{u} = \iiint \frac{K \cdot \rho dV}{r^2} \vec{u}$$

Potentiel électrique d'une distribution continue

Le champ électrique n'est autre que le gradient d'une fonction scalaire qui est le potentiel électrique $V(r)$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Cela signifie que le champ électrique est le gradient négatif du potentiel électrique. Le gradient est une opération mathématique qui permet de calculer la variation spatiale du potentiel. En termes simples, le champ électrique pointe dans la direction de la plus grande diminution du potentiel, et sa magnitude est proportionnelle à la vitesse à laquelle le potentiel change dans cette direction.

Cette relation est fondamentale en électrostatique, car elle permet de relier directement les concepts de potentiel et de champ électrique. Plus le potentiel varie rapidement dans une zone, plus le champ électrique sera intense dans cette zone.

Le potentiel électrique s'écrit alors:

$$V(r) = k \int \frac{dQ}{r}$$

Applications

1. Analyse des champs dans les condensateurs (distributions surfaciques).
2. Calcul des potentiels dans les systèmes volumétriques (e.g., charges dans les isolants).
3. Conception de dispositifs électriques à géométries complexes (e.g., antennes).

Conclusion

L'étude des champs et potentiels créés par des distributions continues de charge permet de modéliser des situations physiques réalistes. Ces concepts sont essentiels pour comprendre les dispositifs électrostatiques complexes et leur fonctionnement.

Exercices : Distribution de charges continues

Exercice 01

Un fil de section négligeable en forme de cercle de centre O et de rayon R plan dans un plan (oxy), porte une charge électrique répartie avec une densité linéique λ .

Avec $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$ avec λ_0 est une constante positive, et $\theta = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{op})$, p étant un point quelconque du cercle.

1/ Est ce que la distribution de charge est uniforme ? Justifier.

2/ Calculer la force exercé par le fil sur une charge q_0 positive placée au centre du fil circulaire au point O.

3/ Recalculer cette force si $\lambda = \lambda_0$

Exercice 02

Un fil de section négligeable en forme de cercle de centre O et de rayon R plan dans un plan (oxy), porte une charge électrique répartie avec une densité linéique λ .

Avec $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$ avec λ_0 est une constante positive, et $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$, M étant un point quelconque du cercle.

1/ Est ce que la distribution de charge est uniforme ? Justifier.

2/ Calculer le potentiel V(O) créé par le fil circulaire au point O.

3/ Recalculer ce potentiel si $\lambda = \lambda_0$

Exercice 03

Soit une de mi cercle de centre O et rayon R uniformément chargé avec une densité de charge linéique constante et positive

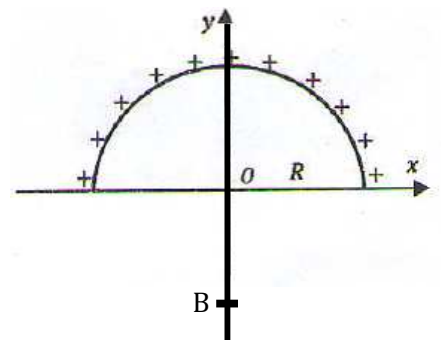
Soit une charge q placée au point B tel que OB=R

1- Calculer le potentiel électrostatique V(O) crée par le demi-cercle au point au point O

2- Calculer le potentiel crée par la charge q au point O

3- En déduire le potentiel total V(O) crée au point O

4- Montrer que le champ électrostatique crée par la distribution de charge linéique au point O est



$$\vec{E}_1(O) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{j}$$

5-Calculer le champ électrostatique crée par la charge q au point O

6- En déduire le champ total au point O

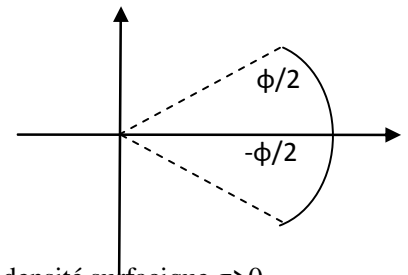
7-Déterminer la relation entre λ et q pour que le champ total au point O soit nul

Exercice 04

Un fil porte une charge positive q, a la forme d'un arc de rayon r, de centre O et d'angle ϕ .

1-Sachant que la charge est uniformément répartie, donner l'expression du champ électrostatique au point O.

2-En déduire le champ pour $\phi=0$, $\phi=\pi$ et $\phi=2\pi$.



Exercice05

Soit un disque de centre O et de rayon R, uniformément charge avec une densité surfacique $\sigma > 0$.

1-Calculer le potentiel V au point M de l'axe Oz , Tracer V(Z)

2-Déduire le champ électrostatique

3-Déterminer directement le champ électrostatique en M de l'axe OZ

Exercice 06

Soit un disque de centre O et de rayon R, uniformément charge avec une densité surfacique σ . Tel que le champ électrostatique en un point M de l'axe Oz s'écrit

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \vec{k}$$

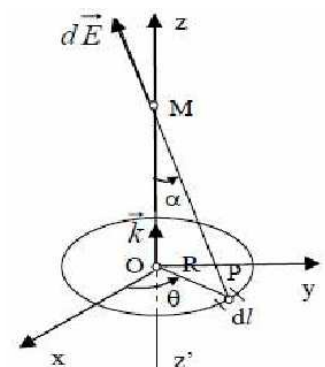
1-Trouver l'expression du champ électrique crée par un plan infini

(R tend vers ∞)

2-Ce champ est il continu à la traverser du plan chargé, Tracer E(z)

3-Déduire le potentiel électrostatique en point M. Choisir l'origine du potentiel dans le plan (oxy) : $V(z=0)$

4-Tracer V(z)



Solution : Distribution de charges continues

Exercice 01

1-

$$\lambda = \lambda_0 \sin \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 < \theta < \pi \Rightarrow \sin \theta > 0 \Rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow Q > 0$$

$$\pi < \theta < 2\pi \Rightarrow \sin \theta < 0 \Rightarrow \lambda < 0 \Rightarrow Q < 0$$

$$\theta = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow Q = 0$$

Par conséquent la distribution de charge linéique n'est pas uniforme

2-

$$\overrightarrow{dF} = \frac{q_0 \cdot dq}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \vec{u} = \overrightarrow{dF} = \frac{q_0 \cdot \lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \vec{u}$$

$$dl = R \cdot d\theta \quad \text{et} \quad \vec{u} = -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$$

$$\overrightarrow{dF} = \frac{q_0 \cdot \lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \sin \theta \cdot R d\theta (-\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j})$$

$$\overrightarrow{dF} = -\frac{q_0 \cdot \lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} R d\theta (\sin \theta \cdot \cos \theta \vec{i} + \sin^2 \theta \vec{j})$$

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} -\frac{q_0 \cdot \lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} R d\theta (\sin \theta \cdot \cos \theta \vec{i} + \sin^2 \theta \vec{j})$$

$$\vec{F} = -\frac{q_0 \cdot \lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta \vec{i} + \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \vec{j}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \text{????}$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$$

$$\sin(a + a) = \sin(a) \cdot \cos(a) + \sin(a) \cdot \cos(b) \Rightarrow \sin(2a) = 2\sin(a) \cdot \cos(b)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin(2\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos(2\theta) \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = ???$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (1)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(a+a) = \cos(a) \cdot \cos(a) - \sin(a) \cdot \sin(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \quad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow 2\sin^2(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} [2\pi] = \pi$$

$$\vec{F} = -\frac{q_0 \cdot \lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} \cdot \pi \vec{j} = -\frac{q_0 \cdot \lambda_0}{4\epsilon_0 \cdot R} \vec{j}$$

3-

$$\lambda = \lambda_0 = \text{Cste} > 0$$

$$\overrightarrow{dF} = \frac{q_0 \cdot dq}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \vec{u} = \overrightarrow{dF} = \frac{q_0 \cdot \lambda_0 \cdot dl}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \vec{u} =$$

$$\overrightarrow{dF} = -\frac{q_0 \cdot \lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) d\theta$$

$$\vec{F} = -\frac{q_0 \cdot \lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} \int_0^{2\pi} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = [\sin \theta]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = [-\cos \theta]_0^{2\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 0$$

Exercice 02

1-

$$\lambda = \lambda_0 \cos \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta > 0 \Rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow Q > 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta < 0 \Rightarrow \lambda < 0 \Rightarrow Q < 0$$

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \sin \theta = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow Q = 0$$

La densité n'est pas constante (variable) et par conséquent n'est pas uniforme (dépend de θ)

2- Le potentiel au point O

$$dV(O) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda \cdot R \cdot d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} d\theta$$

$$dV(O) = \frac{\lambda_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} d\theta$$

$$V(O) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} [\sin \theta]_0^{2\pi} = 0$$

Le potentiel au centre est nul

3-le potentiel pour $\lambda = \lambda_0 = \text{Constante}$

$$V(O) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda \cdot R \cdot d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} d\theta$$

$$V(O) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} [\theta]_0^{2\pi}$$

Le potentiel au point O devient :

$$V(O) = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}$$

Exercice 03

1) le potentiel $V_1(O)$ créé par le fil.

$$dV_1(O) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda \cdot R \cdot d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} d\theta$$

Avec $0 \leq \theta \leq \pi$

$$V_1(O) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\pi d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} [\theta]_0^\pi$$

Le potentiel crée par le fil au point O est :

$$V_1(O) = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

2- Le potentiel crée par la charge q

$$V_2(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

3-Le potentiel total

$$V_T(O) = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\varepsilon_0} \left(\lambda + \frac{q}{\pi R} \right)$$

4-Le champ électrique cree par le fil

$$\overrightarrow{dE_1} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^2} \vec{u} = \overrightarrow{dF} = \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^2} \vec{u}$$

$$dl = R \cdot d\theta \quad \text{et} \quad \vec{u} = -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$$

$$\overrightarrow{dE_1} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) d\theta$$

$$\overrightarrow{E_1} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} \int_0^\pi (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) d\theta$$

$$\int_0^\pi \cos \theta d\theta = [\sin \theta]_0^\pi = 0$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = 2$$

Le champ créé par le fil est :

$$\overrightarrow{E_1} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot R} \vec{j}$$

5- le champ créé par la charge q

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \vec{j}$$

6- le champ total

La somme des deux champs

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot R} \vec{j} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \vec{j} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 \cdot R} \left(-\lambda + \frac{q}{2R} \right) \vec{j}$$

7-La relation entre λ et q pour que le champ soit nul.

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \left(-\lambda + \frac{q}{2R} \right) = 0 \Rightarrow q = 2R\lambda$$

Exercice 04

$$\overrightarrow{dE} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \vec{u} = \overrightarrow{dF} = \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \vec{u}$$

$$\overrightarrow{dE} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) d\theta$$

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) d\theta$$

$$\int_0^\pi \cos \theta \, d\theta = \left[\sin \theta \right]_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} = \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \left(-\frac{\varphi}{2} \right) = \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = \left[-\cos \theta \right]_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} = -\left(\cos \frac{\varphi}{2} - \cos \left(-\frac{\varphi}{2} \right) \right) = 0$$

Donc

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \vec{t}$$

Pour raison de symétrie $E_y=0$

$$\varphi = 0 \Rightarrow \sin 0 = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$$

$$\varphi = \pi \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{t}$$

$$\varphi = 2\pi \Rightarrow \sin \pi = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$$

Exercice 05

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{avec } PM=r \text{ et } dq=\sigma.dS)$$

L'élément de surface en coordonnées polaire est :

$$dS = \rho . d\rho . d\theta$$

$$0 \leq \rho \leq R \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

σ : uniforme (on peut le prendre positive)

$$dV = \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{4\pi\epsilon_0 r}$$

On a trois variables(ρ, θ, r)

$$OM=Z \quad \text{et} \quad r^2 = \rho^2 + Z^2$$

$$dV(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \cdot d\rho}{\sqrt{\rho^2 + Z^2}} \cdot d\theta \Rightarrow V(M) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \cdot d\rho}{\sqrt{\rho^2 + Z^2}} \cdot d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$\Rightarrow V(M) = \int_0^R \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\rho \cdot d\rho}{\sqrt{\rho^2 + Z^2}}$$

Rappel:

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$V(M) = \int_0^R \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\rho \cdot d\rho}{\sqrt{\rho^2 + Z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{\rho^2 + Z^2} \right]_0^R$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + Z^2} - \sqrt{Z^2} \right)$$

Remarque

$$\sqrt{Z^2} = |Z| = \begin{cases} Z, & \text{si } Z > 0 \\ -Z, & \text{si } Z < 0 \end{cases}$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + Z^2} - |Z| \right) \Rightarrow \begin{cases} V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + Z^2} - Z \right) & \text{si } Z > 0 \\ V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + Z^2} + Z \right) & \text{si } Z < 0 \end{cases}$$

2- Le champ électrique

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M) = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = -\frac{dV}{dz} \vec{k}$$

$$|x| = \pm x \Rightarrow (|x|)' = \pm 1 = \frac{x}{|x|}$$

$$(|x|)' = (\sqrt{x^2})' = \frac{(x^2)'}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}$$

On a $V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + Z^2} - |Z|)$

et

$$\vec{E}(M) = -\frac{dV}{dz} \vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{2Z}{2\sqrt{R^2 + Z^2}} - \frac{Z}{|Z|} \right) \vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{Z}{|Z|} - \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \right) \vec{k}$$

3-

$$d\vec{E}(M) = \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\alpha \vec{k}$$

$$\tan \alpha = \frac{\rho}{Z}$$

$$\frac{d\rho}{Z} = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow d\rho = \frac{Z \cdot d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{Z}{r} = \cos \alpha \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{Z^2}$$

On remplace cela dans l'équation :

$$d\vec{E}(M) = \frac{\sigma \rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z \cdot d\alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{\cos^2 \alpha}{Z^2} \cos\alpha d\theta \vec{k} = \frac{\sigma \rho}{4\pi\epsilon_0 Z} \cos\alpha d\alpha \cdot d\theta \vec{k} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \tan\alpha \cdot \cos\alpha d\alpha \cdot d\theta \vec{k}$$

$$d\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \alpha \, d\alpha \, d\theta \, \vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\alpha_m} \sin \alpha \, d\alpha \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \vec{k} = \frac{\sigma \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\alpha_m} \sin \alpha \, d\alpha \cdot \vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0} [-\cos \alpha]_0^{\alpha_m} \cdot \vec{k} = -\frac{\sigma \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0} (\cos \alpha - 1) \vec{k}$$

$$\cos \alpha_m = \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}}$$

$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}} - 1 \right) \vec{k} = \frac{\sigma \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \right) \vec{k}$$

Ceci pour $Z > 0$

Exercice 06

1- Le champ créé par un plan infini

$$E(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{Z}{|Z|} \vec{k}$$

car

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} & Z > 0 \\ \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} & Z < 0 \end{cases}$$

2- La continuité du champ

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} & Z > 0 \\ \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} & Z < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Le champ n'est pas continu à la traversée du plan}$$

Fonction impaire

3- Le potentiel $dV = -\vec{E}_m \cdot dZ \vec{k}$

• $Z > 0$

$$dV = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} \cdot dZ \cdot \vec{k} \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$dV = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dZ \Rightarrow V(Z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} Z + C$$

On suppose que l'origine du potentiel a l'origine du repère ($Z=0$)

$$0 = 0 + C \rightarrow C = 0$$

$$\begin{cases} V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} Z & Z > 0 \\ V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} Z & Z < 0 \end{cases}$$

Continuité du potentiel

$$\lim_{Z \rightarrow 0^+} V(Z) = \lim_{Z \rightarrow 0^-} V(Z) = 0$$

Le potentiel est continu à la traversée du plan

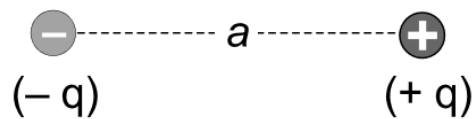
$$V(-Z) = V(Z)$$

Résumé :Dipôle électrique

Définition :

Un dipôle électrostatique est défini par ensemble de charges distinctes disposées de telle sorte que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives.

Le dipôle le plus simple est constitué de deux charges ponctuelles de même valeurs et de signes opposés



Le moment dipolaire :

Le moment dipolaire, noté $\vec{p}$ est défini par :

$$\vec{p} = q \cdot \vec{a}$$

$$\|\vec{a}\| = a \text{ (distance entre les deux charges)}$$

$\vec{a}$: est orienté de la charge négative vers la charge positive

Potentiel créé à une grande distance r :

$$V = Kq \frac{a \cdot \cos\theta}{r^2} = Kp \frac{\cos\theta}{r^2} = K\vec{p} \frac{\cos\theta}{r^2} \vec{u}_r$$

Potentiel créé à une grande distance r :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{2Kq \cdot a \cdot \cos\theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{Kq \cdot a \cdot \sin\theta}{r^3} \vec{u}_\theta \\ \vec{E} &= \frac{2Kp \cdot \cos\theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{Kp \cdot \sin\theta}{r^3} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Le couple de force

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{p} \wedge \vec{E} \\ \|\vec{\tau}\| &= \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{E}\| \cdot \sin\theta \end{aligned}$$

L'énergie potentielle

$$Ep = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p \cdot E \cdot \cos\theta$$

Exercices : Dipôle électrique

Exercice 01 :

Un dipôle électrique est constitué de deux charges égales et opposées $\pm q$ séparées par une distance d . Ce dipôle est placé dans un champ électrique uniforme E_0 orienté suivant l'axe x .

1. Calculer le moment du couple τ (module) exercé sur le dipôle lorsque celui-ci est incliné d'un angle θ rapport à E_0
2. Calculer l'énergie potentielle E_p du dipôle dans le champ E_0

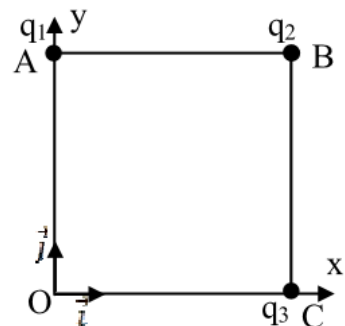
Application numérique $q=2\ \mu\text{C}$, $d=2\ \text{cm}$, $E_0=500\ \text{N}$, $\theta=45^\circ$

Exercice 02 :

Soient trois charges q_1 , q_2 et q_3 placées respectivement aux points $A(0, a)$, $B(a, a)$ et $C(a, 0)$ du plan xOy (figure ci dessous)

- 1) Calculer le potentiel électrique total au point $O(0, 0)$.
- 2) Déterminer le vecteur champ électrique total $\vec{E}_0$ au point O.
- 3) On place au point O un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p} = 10^{-10}(-\vec{i} + \vec{j})$
 - a- Déterminer le moment du couple appliqué au dipôle $\vec{\tau}$.
 - b- Représenter le dipôle dans sa position finale d'équilibre stable. Justifier.
 - c- Calculer la variation d'énergie potentielle du dipôle lorsqu'il passe de la position initiale à la position finale.

On donne $q_1 = q_3 = +q = 10^{-9}\ \text{C}$, $q_2 = -q$ et $a = 10\ \text{cm}$.

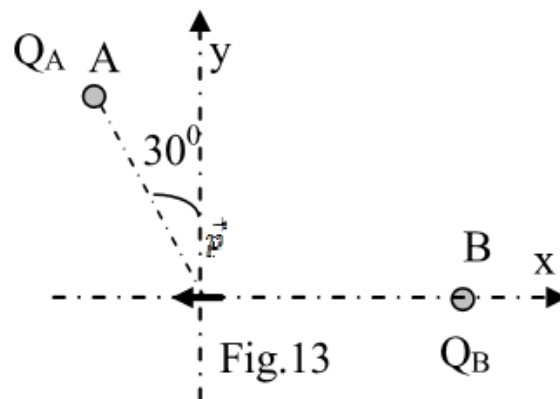


Exercice 03 :

On considère deux charges électriques ponctuelles Q_A et Q_B placées respectivement aux points A et B tels que OA fait un angle de 30° avec Oy et B est sur l'axe Ox (figure ci-dessous) .

On donne : $Q_A = Q_B = -5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $OA = OB = 5 \text{ cm}$.

1. Déterminer et représenter le champ électrique créé au point O.
2. Calculer le potentiel en ce point.
3. On place en O un dipôle électrique $\vec{p}$ dont les charges q et $-q$ sont distantes de $a = 5 \text{ mm}$, avec $q = 10^{-12} \text{ C}$.
 - a) Calculer l'énergie potentielle du dipôle dans la position de la figure ci-dessous.
 - b) Trouver et représenter le moment du couple appliqué au dipôle.
 - c) Calculer le travail nécessaire pour ramener le dipôle à sa position d'équilibre stable.



Solution : Dipôle électrique

Exercice 01

1- Le moment du couple

$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0 \Rightarrow \|\vec{\tau}\| = p \cdot E_0 \cdot |\sin \theta|$$

$$\tau = (4 \cdot 10^{-8})(500) \sin 45^\circ = 1,41 \cdot 10^{-5} \text{ N.m}$$

$$\text{Avec } p = q \cdot d = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C.m}$$

2- L'énergie potentielle

$$E_p = -p \cdot \vec{E}_0 = -p \cdot E_0 \cdot \cos \theta = 1,41 \cdot 10^{-5} \text{ Joule}$$

Exercice 02

$$q_A = q_C = q = 10^{-9} \text{ C} ; q_B = -10^{-9} \text{ C}$$

$$a = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$OB = \sqrt{2}a$$

1- Le potentiel créé par les trois charges au point O

$$V(O) = V_A + V_B + V_C$$

$$V(O) = \frac{Kq_A}{a} + \frac{Kq_B}{\sqrt{2}a} + \frac{Kq_C}{a}$$

$$V(O) = \frac{2Kq}{a} - \frac{Kq}{\sqrt{2}a} = \frac{Kq}{a} \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{Kq}{2a} (4 - \sqrt{2})$$

$$V(O) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-1}} (4 - \sqrt{2}) \Rightarrow V(O) = 116,36 \text{ V}$$

2- Le champ électrique au point O

$$\vec{E}_O = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

$$\vec{E}_A = -\frac{Kq}{a^2} \vec{j}$$

$$\vec{E}_B = \frac{Kq}{2a^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) = \frac{\sqrt{2}Kq}{4a^2} (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{E}_C = -\frac{Kq}{a^2} \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_O = \frac{Kq(\sqrt{2}-4)}{4a^2}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$E_x = E_y = \frac{Kq(\sqrt{2}-4)}{4a^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}(\sqrt{2}-4)}{4 \cdot 10^{-2}} = -581,8 \frac{V}{m}$$

$$|\vec{E}_O| = 822,8 \frac{V}{m}$$

3) Le moment du couple

$$\vec{p} = 10^{-10}(-\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow \begin{cases} p_x = 10^{-10} cm \\ p_y = 10^{-10} cm \end{cases}$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ p_x & p_y & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = (p_x E_y - p_y E_x) \vec{k} = 1163 \cdot 10^{-10} \vec{k}$$

4- L'énergie potentielle

$$E_p = -p \cdot \vec{E}$$

$$E_{pi} = -p_x E_x - p_y E_y = -(10^{-10})(-581,8) - (10^{-10})(-581,8) = 0$$

$$E_{pi} = 0$$

$$E_{pf} = -p \cdot \vec{E}_0 = -p \cdot E_0 \cdot \cos \theta = -p \cdot E_0 \quad (\text{A l'équilibre } \theta=0)$$

$$p = \sqrt{2} \cdot 10^{-10} C \cdot m$$

$$E_{pf} = -\sqrt{2} \cdot 10^{-10} \cdot 822,8 = -1163,61 \cdot 10^{-7} \text{ Joule}$$

$$\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = -1163,61 \cdot 10^{-7} \text{ Joule}$$

Exercice 03

$$q_A = q_B = -q, \quad \text{avec } q = 5.10^{-6}C$$

$$OA = OB = d = 5.10^{-2}m$$

1) Déterminer et représenter le champ électrostatique créé au point O

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

$$\vec{E}_A = \frac{Kq_A}{d^2} \vec{u}_A = -\frac{Kq}{d^2} (\cos 60^\circ \vec{i} - \sin 60^\circ \vec{j}) = \frac{Kq}{2d^2} (-\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{E}_B = \frac{Kq_B}{d^2} \vec{u}_B = -\frac{Kq}{d^2} (-\vec{i}) = \frac{Kq}{d^2} \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Kq}{2d^2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}Kq}{2d^2} \vec{j} = \frac{Kq}{2d^2} (\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$$

Application numérique:

$$\vec{E} = \frac{9.10^9.5.10^{-6}}{2.(5.10^{-2})^2} (\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}) = 9.10^6 (\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$$

$$\|\vec{E}\| = 1,8.10^7 \frac{V}{m}$$

$$2) V = V_A + V_B = \frac{Kq_A}{d} + \frac{Kq_B}{d} = \frac{-2Kq}{d}$$

$$V = \frac{-2.9.10^9.5.10^{-6}}{5.10^{-2}}$$

$$V = -1,8.10^6V$$

Partie 2

$$\vec{E} = 9.10^6 \vec{i} + 9.\sqrt{3}.10^6 \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} E_x = 9.10^6 \frac{V}{m} \\ E_y = 9.\sqrt{3}.10^6 \frac{V}{m} \end{cases}$$

Le moment dipolaire :

$$p = q'.d = 10^{-12}.5.10^{-3} = 5.10^{-15}C.m$$

$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j}$$

D'après le schéma:

$$\begin{cases} P_x = -5.10^{-15} & C.m \\ P_y = 0 & C.m \end{cases}$$

$$E_{pi} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p_x E_x - p_y E_y = -(-5.10^{-15}) \cdot 9.10^6$$

$$E_{pi} = 4,5.10^{-8} \text{ Joule} \quad (\text{Initiale})$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ p_x & p_y & 0 \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = P_x E_y \cdot \vec{k} = -45 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^{-9} \vec{k}$$

$$3) \quad W = -\Delta E_p = -(E_{pf} - E_{pi})$$

$$E_{pf} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p \cdot E \cdot \cos \theta = -5.10^{-15} \cdot 1,8.10^7 = -9.10^{-8} \text{ Joule}$$

$$\Rightarrow W = -(-9.10^{-8} - 4,5.10^{-8}) = 1,35.10^{-7} \text{ Joule}$$

Résumé: Théorème de Gauss

Enoncé : Le flux du champ électrique à travers une surface fermée, appelée **surface de Gauss**, est égal au rapport entre la somme des charges nettes Q_{int} contenues à l'intérieur de cette surface et la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 .

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Comment appliquer le théorème de GAUSS ?

1. Ecrire la relation

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

2. Choisir la surface de GAUSS qui respecte la symétrie de la distribution

- Soit $\vec{E}$ est parallèle à la surface ($\vec{E} \perp \vec{dS}$) $\Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0$
- Soit $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface ($\vec{E} // \vec{dS}$) et E est constant $\Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot dS$

3. Calculer les charges Q_{int} à l'intérieur de la surface de GAUSS.

Tableau récapitulatif : Champ créé par un(e)

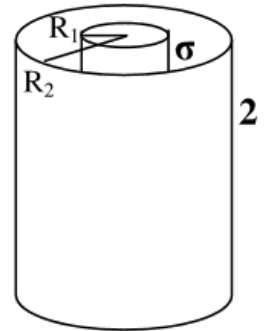
	A l'intérieur	A l'extérieur
Fil infini ($\lambda = \text{Cte}$)	$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$	
Plan infini ($\sigma = \text{Cte}$)	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	
Cylindre infini chargé en surface (σ, R)	$E=0$	$E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$
Cylindre infini chargé en volume (ρ, R)	$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot r$	$E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$
Sphère creuse chargée en surface (σ, R)	$E=0$	$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$
Sphère pleine chargée en volume (ρ, R)	$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot r$	$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$

Exercices : Théorème de Gauss

Exercice 01

Soit deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 tel que $R_1 < R_2$ et de hauteur h .
Le cylindre de rayon R_1 porte une distribution surfacique de densité $\sigma_1 = \sigma > 0$.
De même le deuxième cylindre de rayon R_2 porte une distribution surfacique de densité $\sigma_2 = 2\sigma > 0$.

- 1- En utilisant le théorème de Gauss, trouver l'expression du champ électrostatique $E(r)$ en tout point de l'espace.
- 2- En déduire l'expression du potentiel électrique $V(r)$ pour $r > R_2$.



Exercice 02

-Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace créé par une sphère creuse de rayon R et de densité de charge surfacique σ .

-En déduire l'expression exacte du potentiel

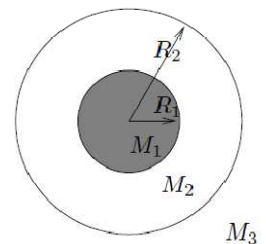
On donne : le rayon de la sphère $R=0.2\text{m}$; la valeur du potentiel à une distance $r=0.5\text{m}$ du centre de la sphère est égale à 1000V ; $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N m}^2)$, $\sigma = 9.95 \cdot 10^{-8} \text{C/m}^2$.

Exercice 03

Soit une sphère pleine de rayon R_1 possédant une densité de charge volumique ρ , à l'intérieur d'une sphère creuse de rayon R_2 ayant une densité de charge surfacique σ .

On donne: $\sigma = -\frac{\rho R_1^3}{3 R_2^2}$

1. Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrique aux points M_1 , M_2 et M_3 .
2. Calculer le potentiel électrique à l'extérieur de la sphère creuse, sachant que $V(\infty) = 0$.



Exercice 04

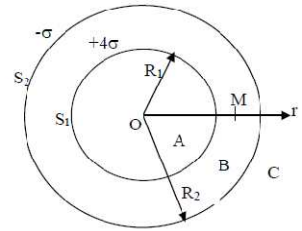
Deux sphères S_1 et S_2 concentriques, creuses, d'épaisseurs négligeables et de rayons respectifs R_1 et R_2 , sont chargées uniformément en surface avec des densités respectives $(+4\sigma)$ et $(-\sigma)$.

- 1) Calculer la charge Q_1 et Q_2 portée par chacune des 2 sphères.

2) En déduire le champ électrique $E(r)$ dans les régions A, B et C (A : $r \leq R_1$; B : $R_1 \leq r \leq R_2$; C : $r \geq R_2$).

3) Soit un point M situé à 15cm du centre O . Le potentiel électrique créé en M par ces 2 sphères est de 12 Volts. Déterminer les expressions du potentiel électrique dans les régions A, B et C.

On donne : $R_2 = 2R_1 = 20 \text{ cm}$ et $\sigma = 10^{-8} / 4\pi \text{ C/m}^2$



Solution : Théorème de Gauss

Exercice : deux cylindres

Pour calculer le champ électrique en tous points de l'espace, on applique le théorème de Gauss. On prend la surface de Gauss, un cylindre de rayon r et de hauteur h :

En raison de la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.
Le flux à travers la surface de Gauss :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}_l = \iint E \cdot dS_l = E \iint dS_l = E \cdot 2\pi r h$$

D'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sum Q_{int}}{2\pi r h \cdot \epsilon_0}$$

cas 01 : $r < R_1$

$$Q_{int} = 0 \Rightarrow E_1 = 0$$

cas 02 : $R_1 < r < R_2$

$$dq = \sigma \cdot dS \Rightarrow Q_{int} = \sigma \iint dS \Rightarrow Q_{int} = \sigma \cdot 2\pi R_1 h$$

$$\Rightarrow E_2 \cdot 2\pi r h = \frac{\sigma \cdot 2\pi R_1 h}{\epsilon_0} \quad \text{ce qui donne} \quad E_2 = \frac{\sigma \cdot R_1}{\epsilon_0 r}$$

cas 03 : $r > R_2$

$$Q_{int} = Q_{R1} + Q_{R2} \quad \text{Avec} \quad Q_{R1} = \sigma \cdot 2\pi R_1 h \quad \text{et} \quad Q_{R2} = 2\sigma \cdot 2\pi R_2 h$$

$$\text{Donc} \quad Q_{int} = \sigma \cdot 2\pi h (R_1 + 2R_2)$$

$$\Rightarrow E_3 \cdot 2\pi r h = \frac{\sigma \cdot 2\pi h (R_1 + 2R_2)}{\epsilon_0} \quad \text{ce qui donne} \quad E_3 = \frac{\sigma (R_1 + 2R_2)}{\epsilon_0 r}$$

Le potentiel

$$dV = -E \cdot dr \Rightarrow V = - \int E \cdot dr$$

Pour $r \geq R_2$

$$V_3 = - \int \frac{\sigma(R_1 + 2R_2)}{\epsilon_0 r} \cdot dr = - \frac{\sigma(R_1 + 2R_2)}{\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \cdot dr = - \frac{\sigma(R_1 + 2R_2)}{\epsilon_0} \ln(r) + C$$

Exercice 02

1) Le champ électrique

Le flux à travers la surface de Gauss :

$$\phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint E \cdot dS = E \iint dS_l = E \cdot 4\pi r^2$$

Cas 01 : $r < R$

Cette sphère est creuse, à l'intérieure elle est vide et donc $Q_{int}=0$

et par conséquent $E_1=0$

Cas 01 : $r > R$

À l'extérieure de la sphère creuse, toute la sphère représente une charge : $Q_{int} = \sigma 4\pi R^2$

$$\Rightarrow E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0} \quad \text{ce qui donne} \quad E_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \quad ; \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Le potentiel

$$dV = -E \cdot dr \Rightarrow V = - \int E \cdot dr$$

$$\begin{cases} V_1 = C_I \\ V_2 = - \int \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + C_{II} \end{cases}$$

la valeur du potentiel à une distance $r=0.5\text{m}$ du centre de la sphère est égale à 1000V . On est en dehors de la sphère et donc il s'agit de V_2

$$V_2(0,5) = \frac{9,95 \cdot 10^{-8}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \frac{(0,2)^2}{0,5} + C_{II} = 1000 \Rightarrow C_{II} = 100\text{V}$$

Pour déterminer C_I , On utilise la condition de continuité $V_1(R)=V_2(R)$

$$C_I = \frac{9,95 \cdot 10^{-8}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \frac{(0,2)^2}{0,2} + 100 \approx 2350V$$

Exercice 03

1) Le champ électrique

Le flux à travers la surface de Gauss :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint E \cdot dS = E \iint dS = E \cdot 4\pi r^2$$

Cas 01 : $r < R_1$

On est au milieu de la sphère pleine, donc c'est la densité volumique

$$Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{ce qui donne} \quad E_1 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} r \quad ; \quad \vec{E}_1 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} r \cdot \vec{u}_r$$

Cas 02 : $R_1 < r < R_2$

La région entre la sphère pleine et la sphère creuse. La charge est toute la sphère pleine

$$Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

$$\Rightarrow E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R_1^3 \quad \text{ce qui donne} \quad E_2 = \frac{R_1^3}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad ; \quad \vec{E}_2 = \frac{R_1^3}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Cas 02 : $r > R_2$

On est au milieu à l'extérieur de la sphère creuse

$$Q_{int} = Q_{R1} + Q_{R2} \quad \text{Avec} \quad Q_{R1} = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3 \quad \text{et} \quad Q_{R2} = \sigma \cdot 4\pi R_2^2$$

$$\text{Avec } \sigma = -\frac{\rho}{3} \frac{R_1^3}{R_2^2} \Rightarrow Q_{int} = 0 \Rightarrow E_3 = 0$$

2-Le potentiel

$$dV_3 = -E_3 \cdot dr \Rightarrow V_3 = - \int E_3 \cdot dr = - \int 0 \cdot dr = C$$

$$V(\infty) = 0 \Rightarrow V_3 = 0$$

Exercice 04

Rappel sphère chargée en surface

$$\vec{E} \begin{cases} \vec{0} & r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r = \frac{4\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r = \frac{KQ}{r^2} \vec{u}_r & r > R \end{cases}$$

$$V \begin{cases} C_I & r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_{II} = \frac{4\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_{II} = \frac{KQ}{r} + C_{II} & r > R \end{cases}$$

1) la charge

$$Q_1 = \sigma_1 \cdot S_1 = 4\sigma \cdot 4\pi R_1^2 = 40nC$$

$$Q_2 = \sigma_2 \cdot S_2 = -\sigma \cdot 4\pi R_2^2 = -40nC$$

$$Q_1 = -Q_2 = 40nC$$

2) le champ électrique

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\begin{cases} \vec{E}_A = 0 \\ \vec{E}_B = \frac{KQ_1}{r^2} \vec{u}_r \\ \vec{E}_C = \frac{KQ_1}{r^2} \vec{u}_r + \frac{KQ_2}{r^2} \vec{u}_r = 0 \end{cases}$$

3) Le potentiel

$$\begin{cases} V_A = C_A \\ V_B = \frac{KQ_1}{r^2} + C_B \\ V_C = C_C \end{cases}$$

A $r=15\text{cm}$, On est dans la région B

$$V_B = \frac{KQ_1}{r^2} + C_B = 12 \Rightarrow C_B = 12 - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-10}}{15 \cdot 10^{-2}}$$

$$C_B = -12V$$

Pour déterminer C_A , On utilise la condition de continuité $V_A(R_1) = V_B(R_1)$

$$C_A = \frac{KQ_1}{R_1} + C_B = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-10}}{10^{-1}} - 12$$

$$C_A = 24V$$

Pour déterminer C_C , On utilise la condition de continuité $V_C(r_2) = V_B(r_2)$

$$C_A = \frac{KQ_1}{R_2} + C_B = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 10^{-1}} - 12$$

$$C_C = 6V$$

$$\begin{cases} V_A = 24V \\ V_B = \frac{KQ_1}{r^2} - 12 \\ V_C = 6V \end{cases}$$

Remarque: les régions A et C forment des volumes équipotentiels $V(r) = \text{Constante}$

Résumé : Conducteurs en Équilibre & condensateurs

L'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsqu'aucune charge électrique ne se déplace plus à l'intérieur du conducteur.

Propriétés

- Le champ électrostatique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre.
- Le potentiel électrostatique est constant à l'intérieur d'un conducteur en équilibre.
- La densité de charge volumique est nul ($\rho=0$) à l'intérieur d'un conducteur en équilibre.
- Si le conducteur est chargé, la distribution de charge pour un conducteur en équilibre est surfacique.

(À l'intérieur d'un conducteur en équilibre il n'y a aucune charge)

- Deux ou plusieurs conducteurs en contact et en équilibre possèdent le même potentiel

$$V_1 = V_2 = V_3 = \dots$$

Conservation de la Charge

Lors d'un transfert de charges entre conducteurs, les charges sont conservées

$$\sum Q_{initiales} = \sum Q_{finales}$$

Capacité d'une Sphère de Rayon R

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

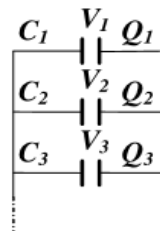
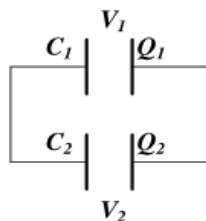
Relations entre Q, V, et C

$$Q = C \cdot V$$

Énergie Emmagasinée

$$E = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Branchement de Condensateurs en parallèle



Charge totale : $Q = Q_1 + Q_2$

(S'il y a plusieurs $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$)

Tension totale : $V = V_1 = V_2$ (S'il y a plusieurs $V = V_1 = V_2 = V_3 = \dots$)
 Capacité équivalente : $C_{eq} = C_1 + C_2$ (S'il y a plusieurs $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$)

Branchement de Condensateurs en série

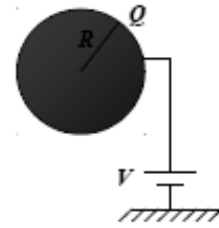


Charge totale : $Q = Q_1 = Q_2$ (S'il y a plusieurs $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots$)
 Tension totale : $V = V_1 + V_2$ (S'il y a plusieurs $V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$)
 Capacité équivalente : $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ (S'il y a plusieurs $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$)

Exercices : Conducteurs en équilibre & condensateurs

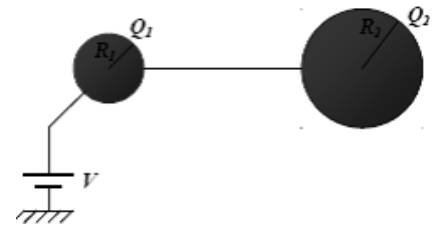
Exercice 01

Trouver la charge acquise par la sphère conductrice ci-contre
Lorsqu'elle est portée au potentiel $V = 200 \text{ V}$, sachant que son rayon est $R = 50 \text{ cm}$.



Exercice 02

Trouver la charge portée par chacune des sphères ci-contre sachant que la sphère 1 est portée au potentiel $V = 220 \text{ V}$ et que leurs rayons respectifs sont $R_1 = 50 \text{ cm}$ et $R_2 = 1 \text{ m}$:
On supposera que les deux sphères sont assez loin l'une de l'autre pour pouvoir négliger l'influence mutuelle.



Exercice 03

Soit une sphère conductrice pleine de rayon $R = 15 \text{ cm}$, on l'éloigne de toute autre corps (c.a.d isolée).

On porte la sphère au potentiel $V_0 = -270 \text{ kV}$. On donne $\frac{1}{\epsilon_0} = 36 \cdot \pi \cdot 10^9 \text{ (SI)}$

1-Calculer la charge totale de la sphère

2-On utilisant le théorème de Coulomb, exprimer le champ électrique au voisinage extérieur de la sphère en fonction de $R, V, \vec{n}$. Calculer $\|\vec{E}\|$.

Exercice 04

Une sphère métallique (S_1) de rayon $R_1 = 9 \text{ cm}$ porte la charge positive $Q_1 = 10^{-8} \text{ C}$.

Quels sont la capacité C_1 et le potentiel V_1 de (S_1) ?

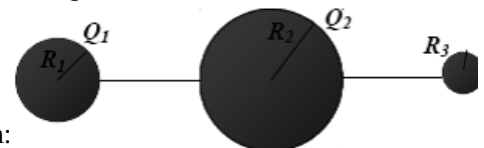
On relie (S_1) par un fil conducteur long et fin, à une autre sphère métallique (S_2) de rayon $R_2 = 1 \text{ cm}$ initialement neutre. (S_2) est suffisamment éloignée de (S_1) pour négliger l'influence mutuelle des deux sphères. Les charges superficielles sur le fil fin sont supposées négligeables. Calculer, à l'équilibre, les charges Q_1' et Q_2' portées par les deux sphères.

Exercice 05

a) Trouver la charge de chacune des sphères ci-contre si leur charge totale est $Q = 40 \text{ nC}$.

b) Dédire leur potentiel commun V et l'énergie totale emmagasinée dans les trois sphères.

Les rayons respectifs des sphères sont $R_1 = 20 \text{ cm}$; $R_2 = 30 \text{ cm}$; $R_3 = 10 \text{ cm}$:

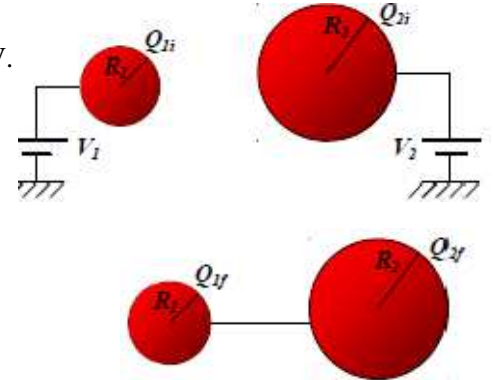


On supposera que les trois sphères sont assez loin l'une de l'autre pour négliger l'influence mutuelle.

Exercice 06

La sphère 1 ($R_1 = 30\text{cm}$) est reliée au générateur de tension $V_1 = 100\text{V}$.

La sphère 2 ($R_2 = 50\text{cm}$) est reliée à $V_2 = 150\text{V}$. Les sphères sont ensuite débranchées des générateurs et reliées ensemble par un fil conducteur assez long pour négliger l'influence mutuelle.



- Trouver l'énergie initiale emmagasinée.
- Trouver la charge finale de chaque sphère.
- Déduire l'énergie finale emmagasinée.
- Comparer les énergies puis expliquer la différence.

Exercice 07

Soit l'association de condensateurs de la figure 01. On donne $C_2 = C_3 = C_4 = C_1/2$ avec $C_1 = 4\mu\text{F}$.

- Calculer la capacité équivalente C_{eq} .
- Si l'on applique entre A et B une ddp $V_A - V_B = 100\text{V}$, calculer la charge et la ddp aux bornes de chaque condensateur.

Exercice 08

Trois condensateurs sont groupés comme l'indique de la figure 02. On donne $C = 3\mu\text{F}$.

- Comment choisir la capacité X pour que la capacité équivalente soit X ?
- On applique entre A et B une ddp $V = 400\text{V}$. Trouver la charge et la tension pour chaque condensateur

Solutions : Conducteur en équilibre & condensateurs

Exercice 01

La capacité de la sphère étant $C=4\pi\epsilon_0 R$, nous avons

$$Q=VC=V \cdot 4\pi\epsilon_0 R=200 \cdot 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 50 \cdot 10^{-2} \approx 11,1 \text{ nC}$$

Exercice 02

Puisque les deux sphères sont en contact, elles ont le même potentiel $V=220\text{V}$.

Donc, $Q_1 = VC_1 = V \cdot 4\pi\epsilon_0 R_1 \approx 12,2 \text{ nC}$:

$$Q_2 = VC_2 = V \cdot 4\pi\epsilon_0 R_2 \approx 24,4 \text{ nC}$$

Les deux sphères sont au même potentiel mais c'est la plus grande sphère qui porte plus de charges.

Exercice 03

1-La charge :

$$Q=V_0 C = -270 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 15 \cdot 10^{-2} \approx -4,5 \mu\text{C}$$

2-D'après le théorème de Coulomb, au voisinage immédiat extérieure du conducteur

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

$$Q < 0 \Rightarrow \sigma < 0$$

$$Q = \sigma \cdot S \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{S} = \frac{V \cdot 4\pi\epsilon_0 R}{4\pi R^2} = \frac{V\epsilon_0}{R} \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{V}{R}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} = \frac{V}{R} \vec{n}$$

$$\text{A.N : } \|\vec{E}\| = 18 \cdot 10^{15} \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$$

Exercice 04

1-La capacité de la sphère étant $C_1=4\pi\epsilon_0 R_1=10\text{pF}$

Le potentiel $V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 1000V$

2-La charge Q_I va se répartir sur les deux sphères de façon qu'à l'équilibre le potentiel soit le même sur les deux sphères.

$$V'_1 = V'_2 \Rightarrow \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2}$$

Avec la condition de la conservation de la charge $Q_1 = Q'_1 + Q'_2$

On trouve $Q'_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} Q_1$ et $Q'_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} Q_2$

A.N $Q'_1 = 0,9.10^{-8}C$ et $Q'_2 = 0,1.10^{-8}C$

Exercice 05

a) Pour trouver la charge de chaque sphère nous devons écrire trois équations

$$\begin{cases} \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \text{ (Sphères reliées : Même potentiel)} \\ \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} \text{ (Sphères reliées: Même potentiel)} \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} \\ Q_1 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} + \frac{C_3}{C_1} \right) = Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} \\ Q_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_1} \right) = Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \frac{Q}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_1}} \approx 13,3nC \\ Q_2 = \frac{R_2 Q_1}{R_1} \approx 19,9nC \\ Q_3 = \frac{R_3 Q_1}{R_1} \approx 6,6nC \end{cases}$$

b) Le potentiel commun des sphères est $V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \approx 598V$

L'énergie totale emmagasinée est $E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2} V^2 C_1 + \frac{1}{2} V^2 C_2 + \frac{1}{2} V^2 C_3 \approx 1,2 \cdot 10^{-5} J$

Exercice 06

a) L'énergie initiale emmagasinée:

$$E = E_{i1} + E_{i2} = \frac{1}{2} V^2 C_1 + \frac{1}{2} V^2 C_2 = \frac{1}{2} V^2 4\pi\epsilon_0 R_1 + \frac{1}{2} V^2 4\pi\epsilon_0 R_2 \approx 0,79 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

- b) Les deux sphères étant reliées, elles auront à l'équilibre le même potentiel V mais des charges différentes. Pour trouver leurs charges finales Q_{1f} et Q_{2f} , nous devons écrire deux équations:

$$\begin{cases} \frac{Q_{1f}}{C_1} = \frac{Q_{2f}}{C_2} & (\text{Sphères reliées : Même potentiel}) \\ Q_{1i} + Q_{2i} = Q_{1f} + Q_{2f} & (\text{Conservation de la charge}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{Q_{1f}}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_{2f}}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ V_1 C_1 + V_2 C_2 = Q_{1f} + Q_{2f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_{1f} = R_1 \frac{Q_{2f}}{R_2} \\ 4\pi\epsilon_0 (V_1 R_1 + V_2 R_2) = (1 + \frac{R_1}{R_2}) Q_{2f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_{1f} = 4,4 \text{ nC} \\ Q_{2f} = 7,7 \text{ nC} \end{cases}$$

- c) L'énergie initiale emmagasinée est

$$E = E_{f1} + E_{f2} = \frac{1}{2} \frac{Q_{1f}^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{2f}^2}{C_2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_{1f}^2}{R_1} + \frac{Q_{2f}^2}{R_2} \right) = 0,77 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

- d) On constate que $E_f < E_i$. Cette perte d'énergie est due à l'effet Joule lors du transfert des charges entre les deux sphères à travers le fil. L'énergie est perdue sous forme de chaleur.

Exercice 07

1. la capacité équivalente

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} + \frac{1}{C_4}$$

$$C_{eq} = \frac{C_1}{4} = 1 \mu F$$

$$2. Q_{eq} = C_{eq} (V_A - V_B) = 100 \mu C$$

$$Q_1 = Q_4 = Q_{eq} = 100 \mu F$$

$$V_A - V_C = \frac{Q_1}{C_1} = 25 \text{ V}$$

$$V_D - V_B = \frac{Q_4}{C_4} = 50 \text{ V}$$

$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_B)$$

$$V_C - V_D = 25 \text{ V}$$

$$Q_2 = C_2(V_C - V_D) = 50\mu C$$

$$Q_3 = C_3(V_C - V_D) = 50\mu C$$

Exercice 08

1- valeur de X

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + X} = \frac{1}{X}$$

$$X^2 + CX - C = 0$$

$$X = \frac{-C + \sqrt{5}C}{2}$$

$$X = 1,85 \mu F$$

3- charges et tensions

4-

$$Q = Q_{eq} = C_{eq}V = X.V = 7,4 \cdot 10^{-4} C \text{ donc } Q = 7,4 \cdot 10^{-4} C$$

$$\text{On a } V_A - V_D = \frac{Q}{C} = \frac{Q_{eq}}{C} = \frac{X}{C}V = 247V$$

$$V_D - V_F = V - (V_A - V_D) = 153V$$

$$Q' = C(V_D - V_F) = 4,6 \cdot 10^{-4} C$$

$$Q_X = X(V_D - V_F) = 2,8 \cdot 10^{-4} C$$

Résumé : Courant continu et électrocinétique

Définition:

Un courant électrique désigne un flux collectif de porteurs de charges électriques. Dans les métaux, ces porteurs sont des électrons (de charge négative), tandis que dans les liquides et les gaz, il peut s'agir soit d'électrons, soit d'ions positifs ou négatifs. La charge élémentaire correspond à celle de l'électron, soit $Q = e = -1,6 \times 10^{-19}$ Coulomb

Intensité du courant électrique

L'intensité du courant représente la quantité d'électricité (porteurs de charges) qui traverse une section d'un conducteur par unité de temps, prise avec un signe algébrique. $I = \frac{dQ}{dt}$

L'unité du courant est : Ampère (A)

Densité du courant électrique

La densité de courant, notée $\vec{j}$, correspond à la quantité de charge traversant une unité de surface par unité de temps. Il s'agit d'une grandeur vectorielle qui décrit le mouvement d'un ensemble de charges mobiles avec une vitesse moyenne v et une densité volumique de charge ρ .

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad \text{avec } \rho = nq = ne$$

Avec : n est le nombre d'électrons et $\vec{v}$ est vitesse moyenne de déplacement des charges.

Définition : L'intensité du courant représente le flux du vecteur densité du courant $\vec{j}$ à travers

une section « S » d'un conducteur ; son unité est A/m^2

En générale pour un fil la relation entre l'intensité du courant et sa densité sera : $J = \frac{I}{S}$

Rappel : La tension est la différence de potentiel entre deux points A et B (notée ddp) ou

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (\text{l'unité de } U \text{ est Volt}).$$

2. Loi d'Ohm

Conductivité électrique :

En présence d'un champ électrique $\vec{E}$, il y a une densité de courant à travers un fil conducteur de longueur l et de section S donnée par la relation :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{n\tau e^2}{m_e}$$

avec σ : la conductivité électrique.

τ : temps moyen séparant deux chocs successifs entre charges.

n : le nombre de charge par unité de volume.

m_e : masse de l'électron.

Remarque : La conductivité électrique s'exprime en Siemens/m ($S \cdot m^{-1}$).

Résistivité électrique

La résistivité électrique est l'inverse de la conductivité électrique $\frac{1}{\sigma} = \frac{RS}{l}$

Elle est exprimée en Ω/m

Résistance électrique

Définition : Le rapport entre la différence de potentiel U (ddp) entre deux points A et B d'un conducteur métallique et l'intensité du courant I qui le traverse reste constant tant que la température demeure inchangée. Ce rapport, noté R , définit la résistance électrique. $R = \frac{U}{I}$

La résistance d'un conducteur est exprimée en Ω (Ohm)

Son symbole dans un circuit électrique est :



Elle s'écrit par : $P = UI = R I^2$ son unité est watt

Cette puissance correspond à la puissance consommée lorsque qu'on a un récepteur et à la puissance fournie lorsque qu'on a un générateur.

Groupement des résistances

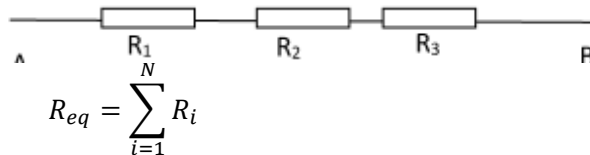
On distingue deux types de branchement des résistances dans un circuit électrique.

a. Groupement en série

Soient trois résistances branchées en série

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Si plusieurs résistances :

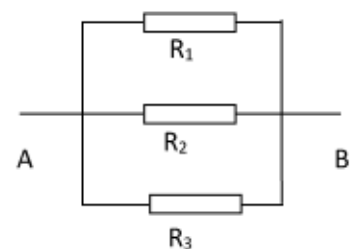


b. Groupement en parallèle

Soient trois résistances branchées en parallèle.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si plusieurs résistances :

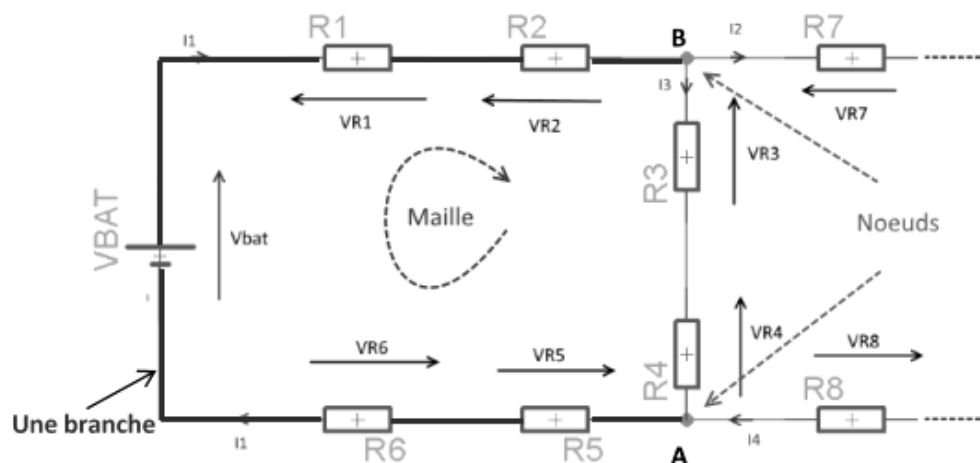


$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Circuit électrique :

Un circuit ou réseau électrique désigne un ensemble de composants électriques interconnectés par des fils conducteurs idéaux. Au sein d'un circuit, on distingue plusieurs types de dispositifs électriques, tels que la résistance, le générateur et le condensateur.

Un **nœud** est un point du circuit où se rejoignent au moins trois éléments. Une **branche** correspond à une portion du circuit située entre deux nœuds. Une **maille**, quant à elle, est un chemin fermé constitué de plusieurs branches, où chaque nœud donné est traversé au maximum une seule fois.



Les lois de Kirchhoff

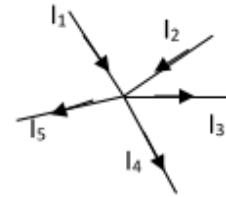
Les deux lois de Kirchhoff permettent l'analyse des réseaux électrique

-Loi des nœuds

Un **nœud** est un point de connexion entre plusieurs conducteurs électriques. La somme des intensités des courants entrant dans un nœud est égale à la somme des intensités des courants en sortant.

$$\sum I_{entrants} = \sum I_{sortants}$$

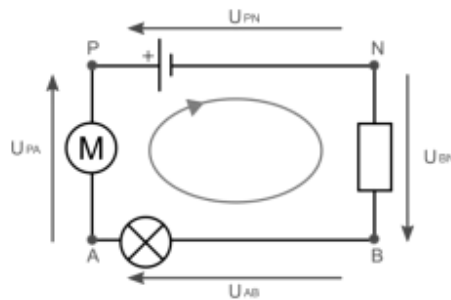
$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$



-Loi des mailles

La somme algébrique des tensions le long d'une maille est nulle : $\sum U_{maille} = 0$

$$U_{PA} + U_{AB} + U_{BN} + U_{NP} = 0$$



Exercices : Courant continu et électrocinétique

Exercice 01 :

Un fil de cuivre de diamètre 1,2mm transporte une charge électrique de 18000 en une heure. 1- Calculer la densité du courant.

2-Calculer le module de la vitesse V_d des électrons libres dans ce conducteur, en sachant que le cuivre contient $n=2.3 \cdot 10^{29}$ électrons libres/m³.

On donne : $e=-1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Exercice 02 : Courant dans un fil de cuivre

Un fil de cuivre cylindrique de diamètre $D = 1,63$ mm possède une résistivité ρ qui varie linéairement avec la température θ en °C : $\rho(\theta) = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)$ avec $\rho(20^\circ\text{C}) = 1,70 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ et $\alpha = 3,9 \cdot 10^{-3} (\text{°C})^{-1}$.

Quand un courant d'intensité 50 A s'établit dans le fil, sa température monte à 35°C

- 1-Quelle est la densité de courant dans le fil ?
- 2- Quelle est la résistivité du fil à cette température ?
- 3-Quelle est la conductivité du fil ?
- 4-Quel est le champ électrique dans le fil ?
- 5-Que pourrait-on calculer si on nous donne la longueur du fil ?

Exercice 03 :

Un ruban d'argent de conductivité $\gamma = 6,7 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, de section rectangulaire de largeur $\ell = 12,5$ mm et d'épaisseur $a = 0,2$ mm, est traversé suivant sa longueur par un courant constant d'intensité $I = 10$ A.

Calculer en supposant que chaque atome d'argent est susceptible de fournir un électron libre :

- 1) la densité volumique des charges mobiles de ce ruban,
- 2) la densité de courant et le module du champ électrique à l'intérieur du ruban,
- 3) la vitesse moyenne des charges mobiles et leur mobilité,
- 4) la puissance volumique dissipée dans ce conducteur.

On donne : charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, nombre d'Avogadro : $N = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $A_g = 108$,
masse volumique de l'argent : $\mu = 10,5 \text{ g.cm}^{-3}$

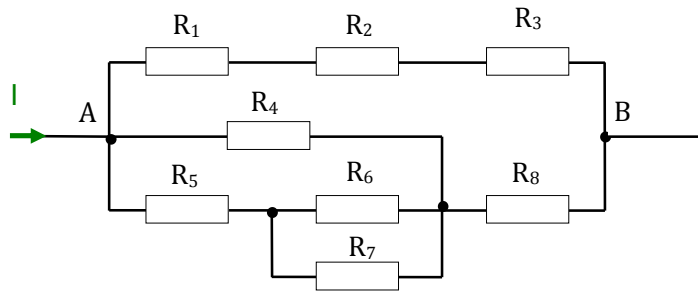
Exercice 04

Déterminer la résistance équivalente au dipôle AB

Données :

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 250\Omega$$

$$R_4 = R_6 = R_7 = R_8 = 500\Omega$$



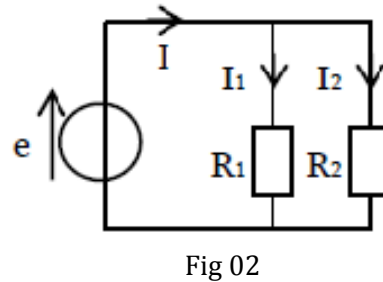
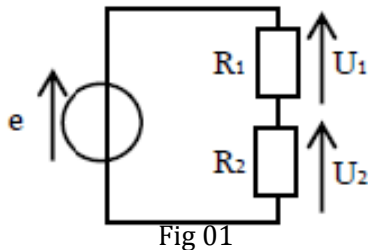
Exercice 05

-diviseur de tension

Déterminer l'expression des tensions U_1 et U_2 en fonction aux bornes des résistances R_1 et R_2 du diviseur de tension Fig 01

-diviseur de courant

Déterminer l'expression des courants I_1 et I_2 qui parcourant les résistances R_1 et R_2 : Fig 02

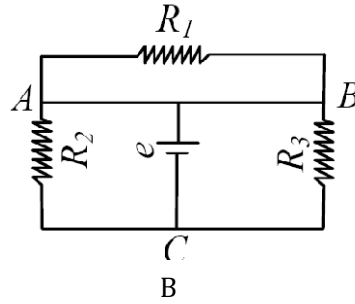
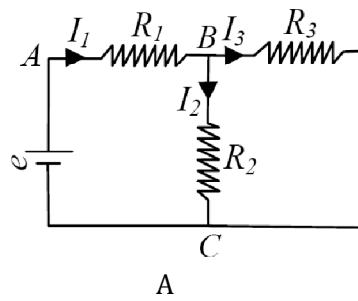


Exercice 06

On considère trois résistances $R_1=30\Omega$, $R_2=120\Omega$ et $R_3=40\Omega$ et un générateur de f.e.m $e=120\text{volts}$.

1. On monte les trois résistances et le générateur comme le montre la figure A. En utilisant les lois de Kirchhoff, calculer les courants I_1 , I_2 et I_3 qui traversent les résistances R_1 , R_2 et R_3 .

2. On assemble les trois résistances et le générateur comme le montre la figure B. Trouver les courants circulant dans les trois résistances ainsi que celui débité par le générateur.



Solution : Courant continu et électrocinétique

Exercice 01

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{t} = \frac{18000}{3600} = 5A$$
$$J = \frac{dI}{dS} = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = 4,42 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$$

$$J = n \cdot e \cdot v_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{n \cdot e} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

Exercice 02

1- Densité volumique des charges = concentration volumique des e^- $\times$ la charge d'un électron

$$\rho = n_e \cdot e$$

$n_e = n_a$ (Chaque atome fournit un électron)

$$n = \frac{10500}{108 \cdot 10^{-3}} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \approx 10^{10} \frac{C}{m^3}$$

2- La densité du courant

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{l \cdot a} = \frac{10}{12 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$$

3-

$$J = \gamma E \Rightarrow E = \frac{J}{\gamma} = \frac{4 \cdot 10^6}{6,7 \cdot 10^4} = 0,06 \frac{N}{C}$$

$$J = \rho \cdot v \Rightarrow v = \frac{J}{\rho} = \frac{4 \cdot 10^6}{10^{10}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$v = \chi \cdot E \Rightarrow \chi = \frac{v}{E} = \frac{J}{\rho \cdot E} = \frac{\gamma \cdot E}{\rho \cdot E} = \frac{\gamma}{\rho} = 6,7 \cdot 10^{-3} \frac{m \cdot C}{S \cdot N}$$

4-

$$P = \frac{U \cdot I}{V} = \frac{R \cdot I^2}{V} = \frac{I^2 \rho \frac{L}{a \cdot l}}{a \cdot l \cdot L} = \frac{I^2 \cdot \rho}{a^2 \cdot l^2} = \frac{I^2}{\gamma \cdot a^2 \cdot l^2} = 2,4 \cdot 10^5 \frac{W}{m^3}$$

Exercice 03

1- La densité de courant dans le fil

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{50,4}{\pi \cdot 1,63^2 \cdot 10^{-6}} \approx 2,4 \cdot 10^7 \text{ A/m}^2$$

2- La résistivité du fil à 35°C

$$\rho(20^\circ\text{C}) = \rho_0(1 + \alpha 20) \Rightarrow \rho_0 = \frac{\rho(20^\circ\text{C})}{(1 + \alpha 20)}$$

$$\rho(35^\circ\text{C}) = \rho_0(1 + \alpha 35) = \rho(20^\circ\text{C}) \frac{(1 + \alpha 35)}{(1 + \alpha 20)} \approx 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$$

3- la conductivité du fil à 35°C

$$\sigma = \frac{1}{\rho(35^\circ\text{C})} = \frac{1}{1,8 \cdot 10^{-8}} \approx 0,56 \cdot 10^{-8} \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$$

$$J = \sigma \cdot E \Rightarrow E = \frac{J}{\sigma} = 0,43 \frac{N}{C}$$

4- Si on nous donne la longueur du fil, on pourrait calculer :

a- Sa résistance :

$$R = \rho(35^\circ\text{C}) \frac{L}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

b- la tension appliquée au fil :

$$U = R \cdot I$$

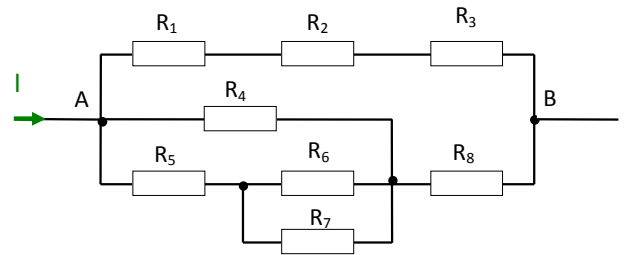
c- La puissance dissipée dans le fil

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2$$

Exercice 04

Résistance équivalente

R_6 et R_7 sont en parallèle, donc :



$$\frac{1}{R_{67}} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \Rightarrow R_{67} = \frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7} = 250 \, \Omega$$

On appelle $R_{67} = R_{eq1}$

R_{eq1} est en série avec R_5

$$R_{eq2} = R_{eq1} + R_5 = 250 + 500 = 750 \, \Omega$$

R_{eq2} est en parallèle avec R_4

$$\Rightarrow R_{eq3} = \frac{R_{eq2} \cdot R_4}{R_{eq2} + R_4} = 300 \, \Omega$$

R_{eq3} est en série avec R_8

$$R_{eq4} = R_{eq3} + R_8 = 300 + 500 = 800 \, \Omega$$

$$R_{eq5} = R_1 + R_2 + R_3 + 750 \, \Omega$$

R_{eq4} est en parallèle avec R_{eq5}

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{R_{eq4} \cdot R_{eq5}}{R_{eq4} + R_{eq5}} = 387 \, \Omega$$

Exercice 05 :

a-Diviseur de tension

En utilisant la loi des mailles puis la loi d'Ohm avec les tensions U , U_1 et U_2 , il est possible de déduire la relation entre les tensions de sorties U_1 et U_2 et la tension d'entrée U :

$$\begin{cases} I = \frac{U}{(R_1 + R_2)} \\ U_1 = I \cdot R_1 \\ U_2 = I \cdot R_2 \end{cases}$$

En remplaçant la première équation dans la deuxième et la troisième on trouve :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \\ U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \end{cases}$$

b- Diviseur de courant

La démonstration de résultat peut se faire ainsi : soit U la tension aux bornes de R_1 et de R_2 (puisque'elles sont en parallèles). On a :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{U}{R_1} \\ I_2 = \frac{U}{R_2} \\ U = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} I \end{cases}$$

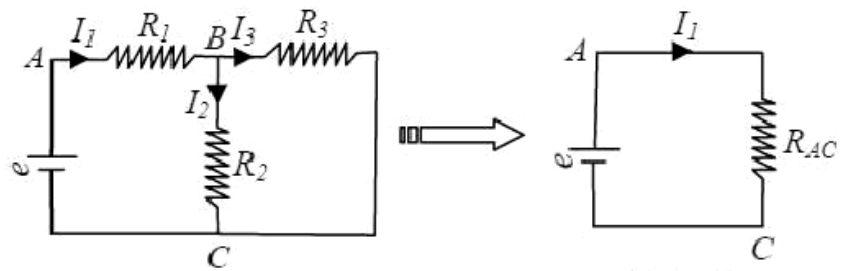
En remplaçant la troisième équation dans la première et la deuxième on trouve

$$\begin{cases} I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \\ I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \end{cases}$$

Exercice 06 :

-Le circuit A

Le circuit peut être simplifié comme suit



$$I_1 = \frac{e}{R_{AC}} = \frac{120}{60} = 2A$$

-Pour I_2 , on utilise la loi des mailles

$$e - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{e - R_1 I_1}{R_2} = \frac{120 - 30 \cdot 2}{120} = 0,5A$$

-Pour I_3 , on utilise la loi des nœuds

$$: I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow I_3 = I_1 - I_2 = 1,5A$$

Le circuit B :

Le courant I_1

Le point A est le même que le point B

$$\Rightarrow V_B - V_B = 0 \Rightarrow I_1 = 0A$$

$$I_2 = \frac{V_A - V_C}{R_2} = \frac{e}{R_2} = 1A$$

$$I_3 = \frac{V_B - V_C}{R_3} = \frac{e}{R_3} = 3A$$

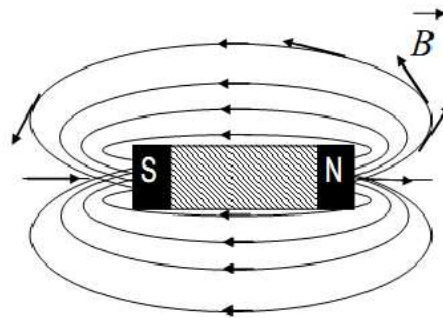
Le courant débité par le générateur, au nœud C on a :

$$I = I_2 + I_3 = 1 + 3 = 4A$$

Résumé : Magnétisme

Champ magnétique

L'environnement proche d'un aimant se distingue par la présence d'un champ magnétique. Ce dernier correspond à une zone de l'espace dans laquelle chaque point exerce une force sur le pôle d'un petit aimant. À l'instar de l'électrostatique, on définit un vecteur champ magnétique, noté $\vec{B}$, qui est tangent aux lignes de champ (Figure ci-dessous).



Lorsque plusieurs champs magnétiques influencent simultanément une charge électrique en mouvement, le champ magnétique résultant est obtenu en effectuant la somme vectorielle de l'ensemble des champs appliqués

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n$$

La force de Lorentz

La force de Lorentz désigne la force exercée sur une particule chargée lorsqu'elle se trouve au sein d'un champ électromagnétique et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

L'unité de mesure du champ magnétique est le Tesla (T)

La force de Laplace

Lorsqu'un fil conducteur, parcouru par un courant I , est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, chaque élément $d\vec{l}$ du fil subit une force:

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Cette force est orientée perpendiculairement au plan défini par le champ magnétique et l'élément de courant considéré. Son sens est déterminé à l'aide de la règle du bonhomme d'Ampère

La loi de Biot et Savard

Elle permet de déterminer le champ magnétique en un point M, situé à une distance r d'une distribution de courant, en intégrant le champ magnétique élémentaire généré par cette distribution.

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Le champ magnétique est une grandeur définie et continue en tout point de l'espace, sauf aux endroits où circulent les courants responsables de sa génération.

Enoncé de la loi de Faraday-Henry:

Dans tout circuit fermé exposé à un champ magnétique, une force électromotrice d'induction est générée. Elle est égale à la dérivée du flux magnétique traversant le circuit par rapport au temps, autrement dit, à la vitesse de variation du flux, avec un signe opposé.

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Exercices : Magnétisme

Exercice 01

Un éclair transporte couramment un courant maximum de $20kA$.

Quel est le champ magnétique maximum qu'il produit à $1m$? à $300m$?

Exercice 02

Une ligne rectiligne de tension est située à une hauteur de $12m$ au dessus du sol. Elle transporte un courant de $300A$ dans la direction de l'Ouest.

1-Décrire le champ magnétique qu'elle produit et calculer sa valeur sous la ligne au niveau du sol.

2-Comparer le avec le champ magnétique terrestre si on suppose que $B_0 = 5 \cdot 10^{-5} T$

Exercice 03

Deux fils conducteurs rectilignes, infinis, parallèles, et distants de $d = 20cm$, sont traversés

l'un par un courant $I_1 = 20A$, l'autre par un courant $I_2 = 80A$.

1/ les courants sont de même sens. Calculer l'intensité du champ magnétique résultant en un point M situé dans le plan des conducteurs, à égale distance de chacun d'eux. Trouver dans ce plan la distance par rapport aux conducteurs, de la droite où le champ magnétique est nul.

2/ Même questions avec des courants de sens contraires.

Solution: Magnétisme

Exercice 01

- 1- En admettant qu'une partie de l'éclair est rectiligne :

$$A = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$$

$$B \cdot 2\pi r = \alpha_0 \cdot I_0 \Rightarrow B = \frac{\alpha_0 \cdot I_0}{2\pi r}$$

$$\alpha_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm} \cdot \text{A}^{-1}$$

Pour $r=1\text{m}$

$$B = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 1} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Pour $r=300\text{m}$

$$B = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 300} = 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Exercice 02

- 1- D'après la règle de la main droite, si le courant circule vers l'ouest, le vecteur du champ magnétique produit par ce courant est dirigé vers le sud.

Le champ magnétique B au niveau du sol

$$B = \frac{\alpha_0 \cdot I_0}{2\pi r} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 300}{2\pi \cdot 12} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

- 2- Comparaison avec le champ magnétique terrestre B_0

$$\frac{B}{B_0} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-5}} = 0,1$$

Le champ produit par la ligne ne représente que 10% du champ magnétique terrestre.

Exercice 03

1- Le champ magnétique produit au point M est égale à la résultante

$$\vec{B}_M = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

D'après la règle de la main droite $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont en sens opposé

$$B_M = B_2 - B_1$$

$$B_M = \frac{\alpha_0 \cdot I_2}{2\pi \frac{d}{2}} - \frac{\alpha_0 \cdot I_1}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\alpha_0}{\pi d} (I_2 - I_1) \Rightarrow B_M = 1,2 \cdot 10^{-4} T$$

L'annulation de champ magnétique $\vec{B}$ ne peut se faire à l'extérieur de l'espace situé entre A et B, mais entre les deux conducteurs (figure b).

$$B_0 = B_2 - B_1 = \frac{\alpha_0 \cdot I_2}{2\pi(d-x)} - \frac{\alpha_0 \cdot I_1}{2\pi x} = 0 \Rightarrow x = \frac{I_1}{I_1 + I_2} d \Rightarrow x = \frac{d}{5}$$

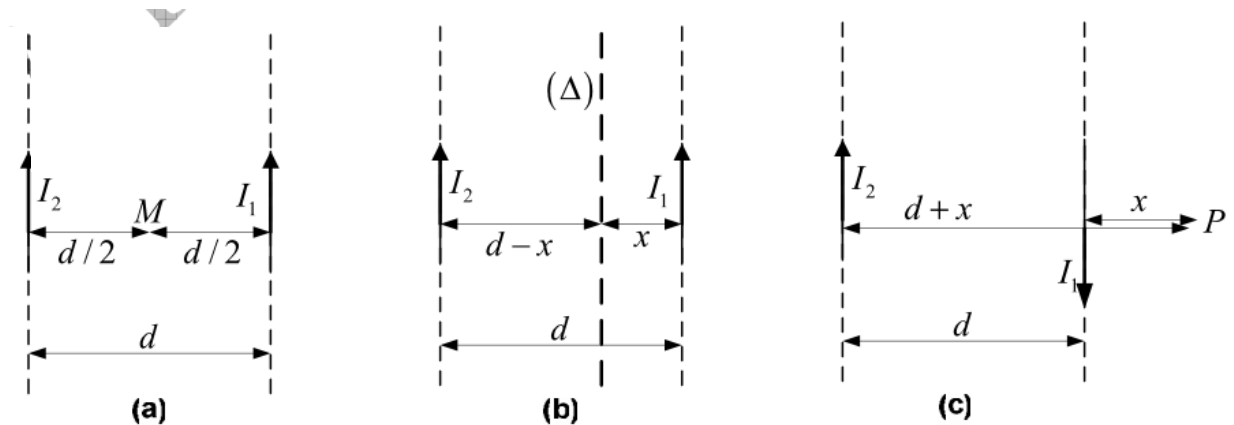
2- Dans ce cas $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ ont le même sens :

$$B_M = B_2 + B_1$$

$$B_M = \frac{\alpha_0 \cdot I_2}{2\pi \frac{d}{2}} + \frac{\alpha_0 \cdot I_1}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\alpha_0}{\pi d} (I_2 + I_1) \Rightarrow B_M = 2 \cdot 10^{-4} T$$

L'annulation de champ magnétique $\vec{B}$ se fait à l'extérieur de l'espace situé entre A et B (figure c).

$$B_0 = \frac{\alpha_0 \cdot I_2}{2\pi(d+x)} - \frac{\alpha_0 \cdot I_1}{2\pi x} = 0 \Rightarrow x = \frac{I_1}{I_2 - I_1} d \Rightarrow x = \frac{d}{3}$$



Références

- 1- A. Fizazi, " Electricité et Magnétisme", OPU, 2012.
- 2- David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; "Physique – Tome 2 : Électricité et magnétisme", De Boeck Supérieur, 2003
- 3- Magné Jacques René, Magné-Marty Rose-Marie, Physique (mécanique - thermodynamique - phénomènes ondulatoires - électricité - magnétisme - électromagnétisme) (rap - de cours, exercices et qcm corrigés), Édition ellipse 1977
- 4- E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Naim et N. Piccioli "La physique du Fac, Electrostatique et Electrocinétique" 2ième Edition, Edi-Science, 2006.
- 5- Jean-Paul Bellier, Christophe Bouloy, Daniel Guéant, Expériences de physique - Électricité, électromagnétisme, électronique, transferts thermiques - 5e édition , Capes/Agrégation/CAPLP, Édition Dunod 2020