

Cours de Mécanique Quantique Avec Exercices corrigés

Dr. Berrahal Mokhtar

Plan du Cours

□ Introduction

□ Partie I: Dualité Onde-Corpuscule de la lumière et de la matière

- Chapitre 1: Quantification du Rayonnement
- Chapitre 2: Ondes de Matière de Louis de Broglie

□Partie II: Fonction d'onde et Equation de Schrödinger

- Chapitre 3: E.S.D.T - Paquet d'onde
- Chapitre 4: Etas Stationnaires - Potentiels constants
- Chapitre 5: Applications - Potentiels Carrés

Introduction

1- Qu'est-ce que la Mécanique Quantique (M.Q) ?

- **La Physique Quantique** est la science qui étudie les systèmes et traite les phénomènes à l'échelle atomique ($10^{-10} \text{ m} \approx 1 \text{ \AA}$) et subatomique ($< 10^{-10} \text{ m}$)
- **La Mécanique Quantique (M.Q)** est le cadre théorique permettant de comprendre et de décrire la structure de la matière et la nature de la lumière aux échelles de l'infiniment petit.

3

2- Naissance de La M.Q. (1900-1930)

- Jusqu'à la fin du 19^{ème} siècle, la **physique "classique"** était basée sur l'étude de 2 types d'objets distincts:
 - **2a- la Matière:**
 - Objet caractérisé par sa **masse m**, sa **position r** et sa **quantité de mouvement p**.
 - C'est un objet qu'on peut localiser dans l'espace et dont l'étude est gouvernée par **la Mécanique Classique de Newton**.

- **2b - le Rayonnement considéré comme une Onde:**
 - C'est une déformation ou une perturbation qui se propage dans un milieu.
 - L'onde est caractérisée par **sa fréquence ν , sa longueur d'onde λ .**
 - **L'onde ne peut être localisée dans l'espace** et son étude est gouvernée par **l'électromagnétisme de Maxwell.**

5

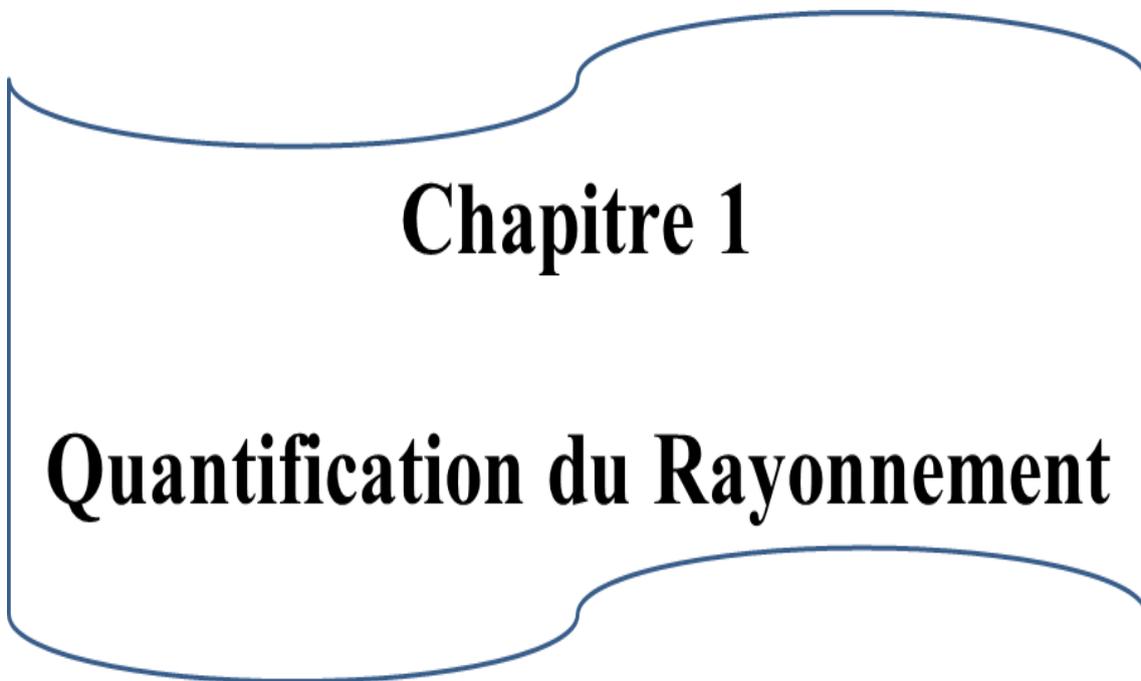
3- Les limites de la physique classique

- A la fin du 19^{ème} siècle et au début du 20^{ème} siècle, la physique passe par une crise :
- Une série de résultats expérimentaux exigent des concepts complètement incompatibles avec **la physique classique.**
- Ces nouveaux problèmes et ces phénomènes physiques, dont la physique classique était incapable d'expliquer, ont conduit à **la naissance de la physique quantique.**

- **Ces Problèmes** interviennent dans le cadre de l'étude de l'**interaction Rayonnement / Matière** tels que :
 - **Le Rayonnement du Corps Noir**
 - **L'Effet Photoélectrique**
 - **L'Effet Compton**
 - **Dualité Onde-Corpuscule**
 - **Le Spectre Atomique. etc**
- Nécessité de chercher d'autres formes de lois physiques capables d'expliquer ces phénomènes physiques  M.Q.

Partie I

Dualité Onde-Corpuscule de la lumière et de la matière



Chapitre 1

Quantification du Rayonnement

Introduction: Limites du modèle ondulatoire de la lumière

- En physique classique, le rayonnement est constitué par des ondes électromagnétiques.
 - Pratiquement, tous les phénomènes ondulatoires de la lumière sont connus;
 - Son spectre, les interférences, les diffractions.....
- **Peuvent être expliquées par la théorie de Maxwell et les équations ondulatoires**

... Mais il y avait des problèmes...

- Cette approche ondulatoire atteint ses limites lors de faibles échanges énergétiques entre lumière-matière et s'avère incapable d'expliquer certains phénomènes qui s'y produisent; par exemple: catastrophe ultraviolette (cf cours: Rayonnement du Corps Noir).

I - RAYONNEMENT DU CORPS NOIR

I - Rayonnement Thermique

- Lorsqu'on chauffe un corps (on augmente sa température), il commence à briller (rayonner) :
→ Il émet de la lumière.
- Lorsque T augmente, la couleur de la lumière émise change



Fig 1

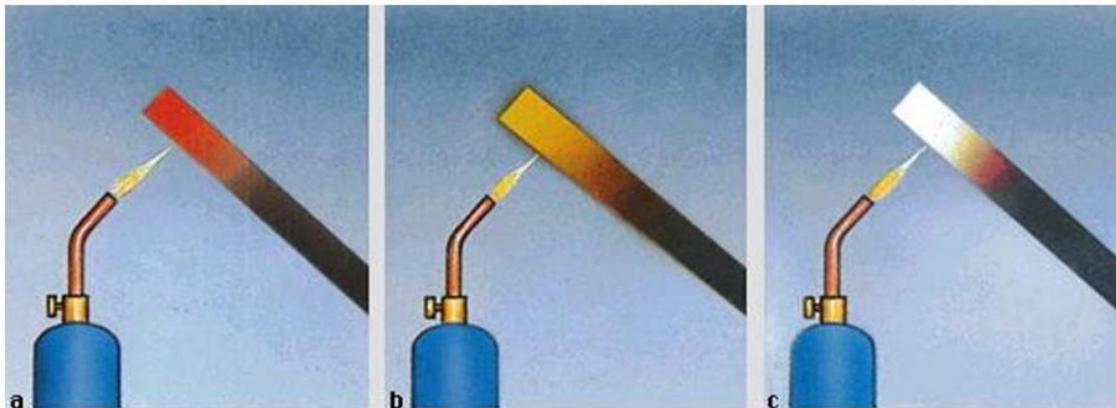


Fig 2

*En chauffant de plus en plus le fer
la couleur change.*



Fig 3

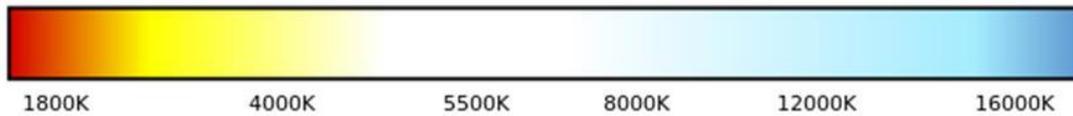


Fig 4

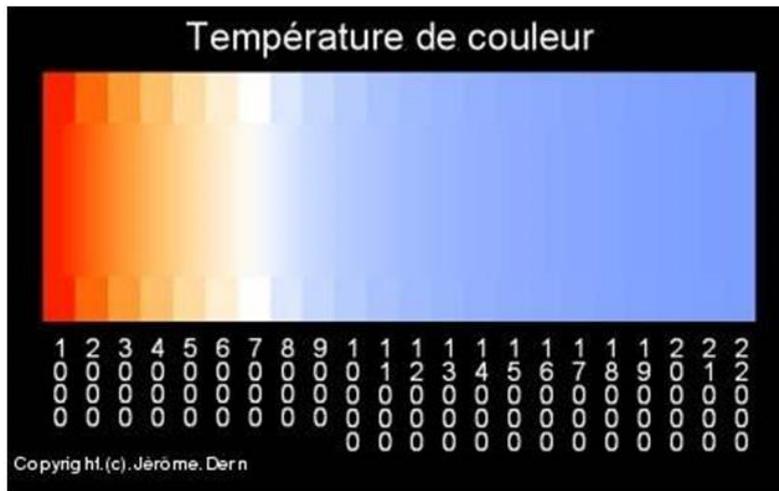


Fig 5

- Aux basses T , le corps chauffé émet une lumière **rouge**, quand T augmente, elle vire à **l'orange**, puis au **jaune**, au **blanc** et au **bleu**.

- C'est en découvrant les réponses à ces problèmes que les physiciens ont franchit la barrière séparant la physique classique de la physique quantique.
- Comprendre et décrire mathématiquement ce qui se passe quand un morceau de fer chauffé passe de la couleur rouge à la couleur blanche, en émettant une quantité de lumière de plus en plus importante.  ***Le problème du Corps Noir***

- Le Rayonnement du Corps Noir est l'un des problèmes qui est à l'origine de la physique quantique.
- La Théorie du Corps Noir s'applique lorsque l'on veut comprendre fondamentalement l'interaction Rayonnement / Matière
- On le retrouve aussi dans la cosmologie lorsqu'on étudie les étoiles, les trous noirs, ...
- à l'échelle de l'Univers entier par le rayonnement fossile laissé lors du Big-Bang.

II - Rayonnement du Corps Noir

- Un corps noir (C.N) est un corps ou un système **qui absorbe toutes les radiations** incidentes (pas de réflexion ni transmission)
- Le corps noir **émet du rayonnement** caractérisant uniquement ses propriétés thermiques et ne dépend pas du type de radiation absorbée.
- **N.B.** : Le terme «noir» ne veut pas dire que sa couleur est «noire».
- Un C.N est réalisé à l'aide d'une cavité ou un four percé d'un petit trou et dont les parois internes sont parfaitement réfléchissantes.

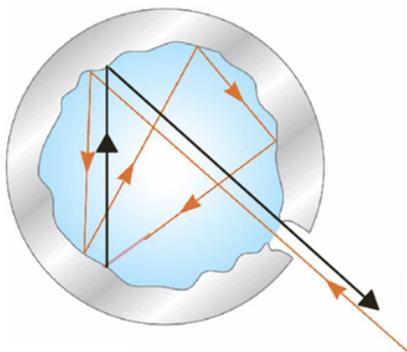
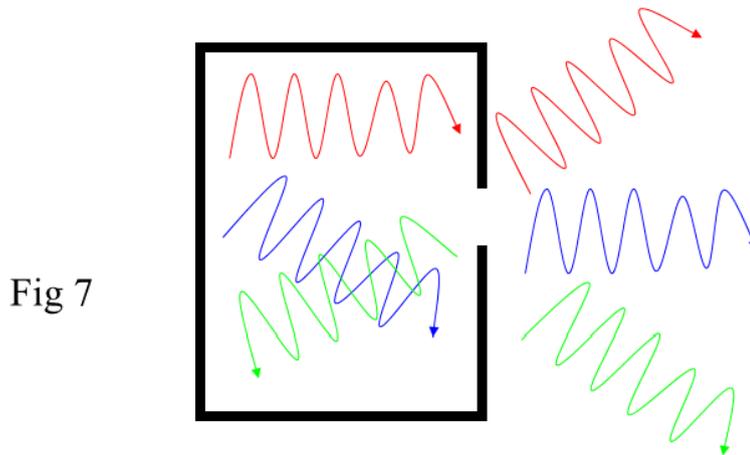


Fig 6

- Le rayonnement qui entre dans le trou est "piégé" à l'intérieur du four et entre en équilibre thermique avec le système.
- Ensuite à travers ce trou il y'a émission du rayonnement.



• **Ce qui sort du trou est :**
Le Rayonnement du Corps Noir (R. C. N.)

1 - Mesures expérimentales :

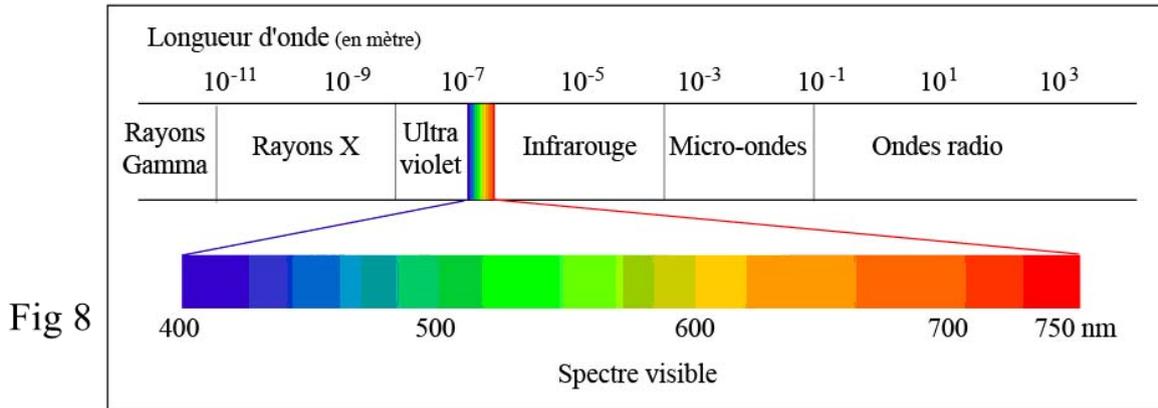
- Le C.N. émet une variété de longueurs d'onde λ d'intensités différentes,
- Le spectre des radiations est enregistré par un détecteur (spectromètre),
- La courbe de la densité d'énergie est tracée en fonction de la longueur d'onde λ ou de la fréquence ν .

Les domaines spectraux

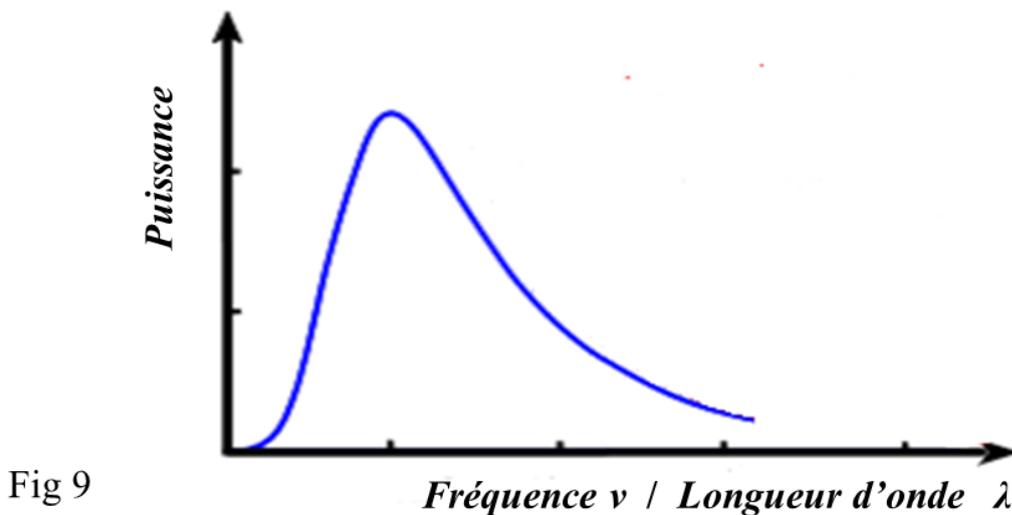
- La fréquence ν est liée à la longueur d'onde λ par :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

où $c = 3 \times 10^8$ m / s (vitesse de la lumière)



- Courbe de la Puissance du R.C.N émis par unité de volume à une température T en fonction de la fréquence ν ou de la longueur d'onde λ



Propriétés importantes du R. C. N.

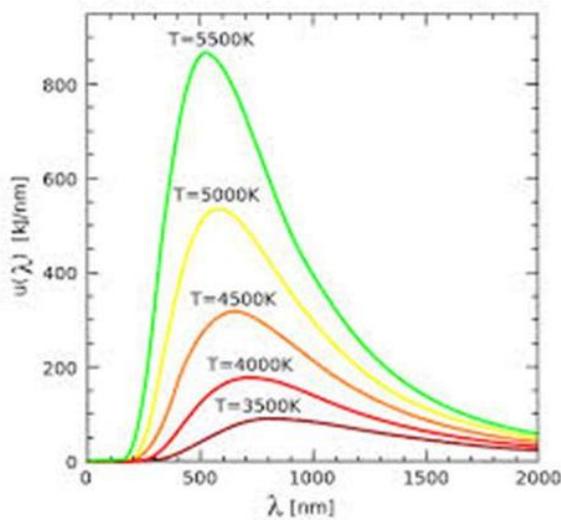
- Le R.C.N est caractérisé par deux propriétés importantes ;

À mesure que la Température T d'un C. N. augmente

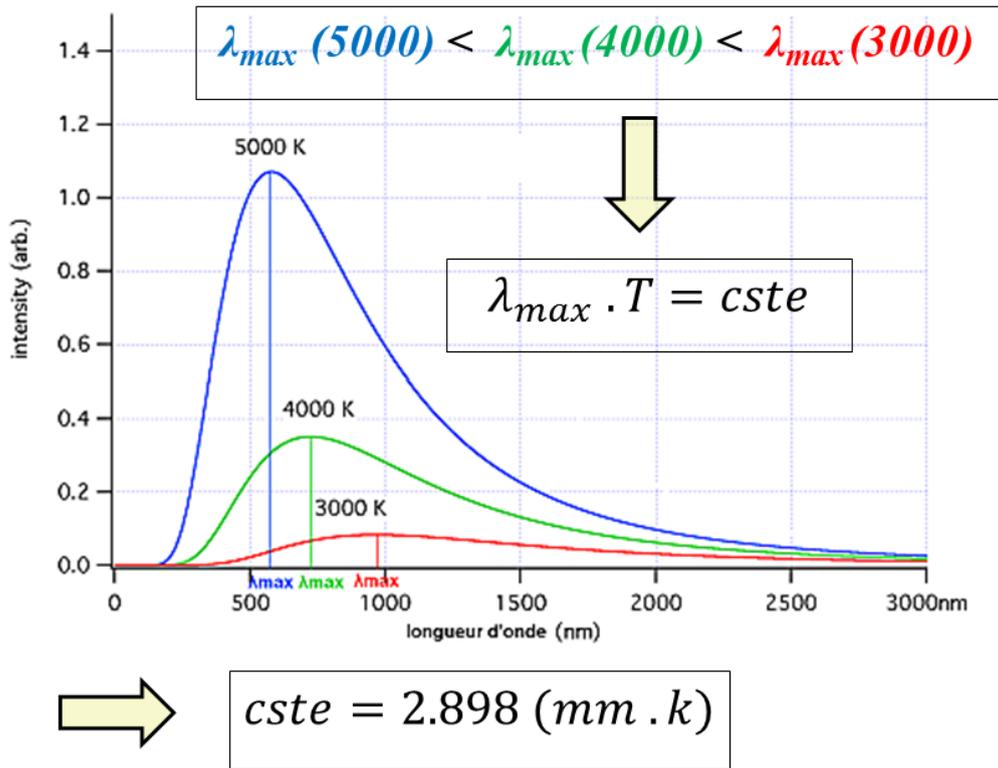
1- l'Intensité du Rayonnement émis par le C. N. augmente

2- Plus le **maximum** de la distribution du R.C.N. se déplace vers une longueur d'onde plus courte (petite).

Radiance Spectrale du C.N.



- **1^{ère} constatation:** la **densité spectrale** de la lumière émise par le C.N. **ne dépend que de T**



➔ Ces résultats expérimentaux ont conduit à des Lois empiriques.

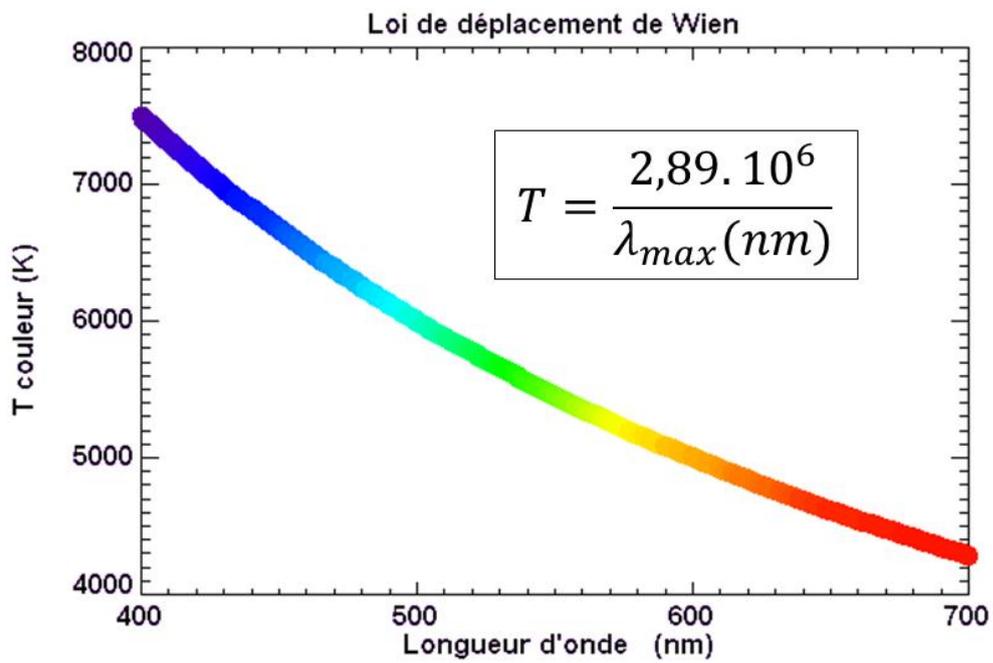
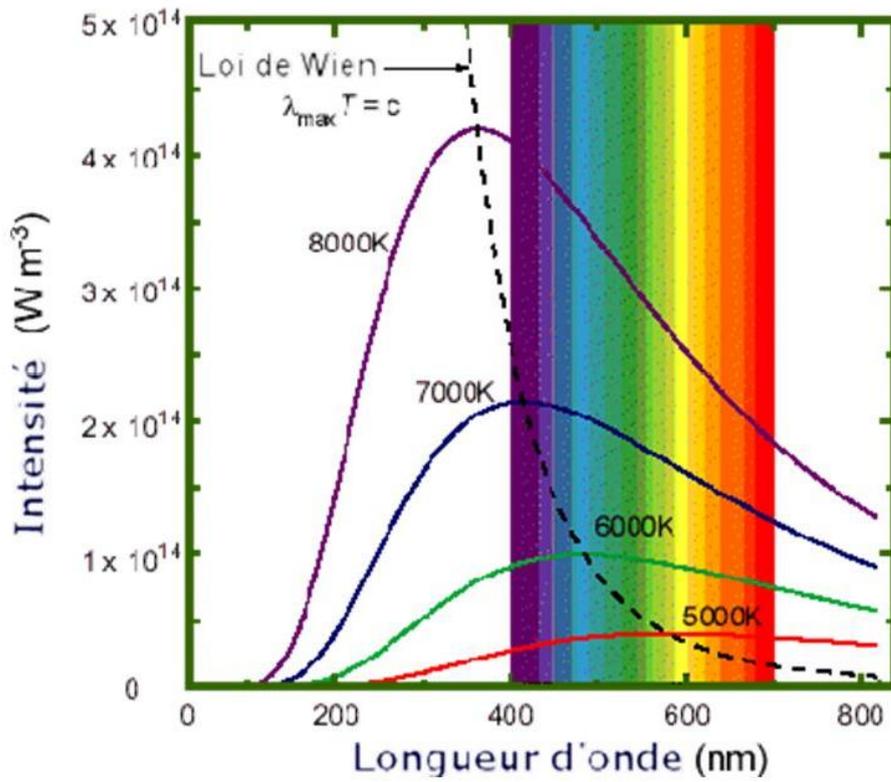
1a- Loi du déplacement de Wien (1893) :

- La longueur d'onde du maximum d'émission du R.C.N. est inversement proportionnelle à la température T du C.N.

- La loi du déplacement de Wien est donnée par,

$$\lambda_{max} = \frac{2.898}{T} \text{ (mm)}$$

- Mesure de λ_{max} (R.C.N) ➔ Température $T_{C.N}$

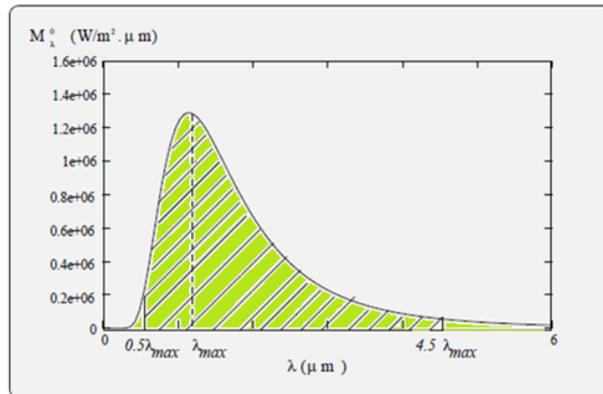


2a - Loi de Stefan-Boltzmann (1879)

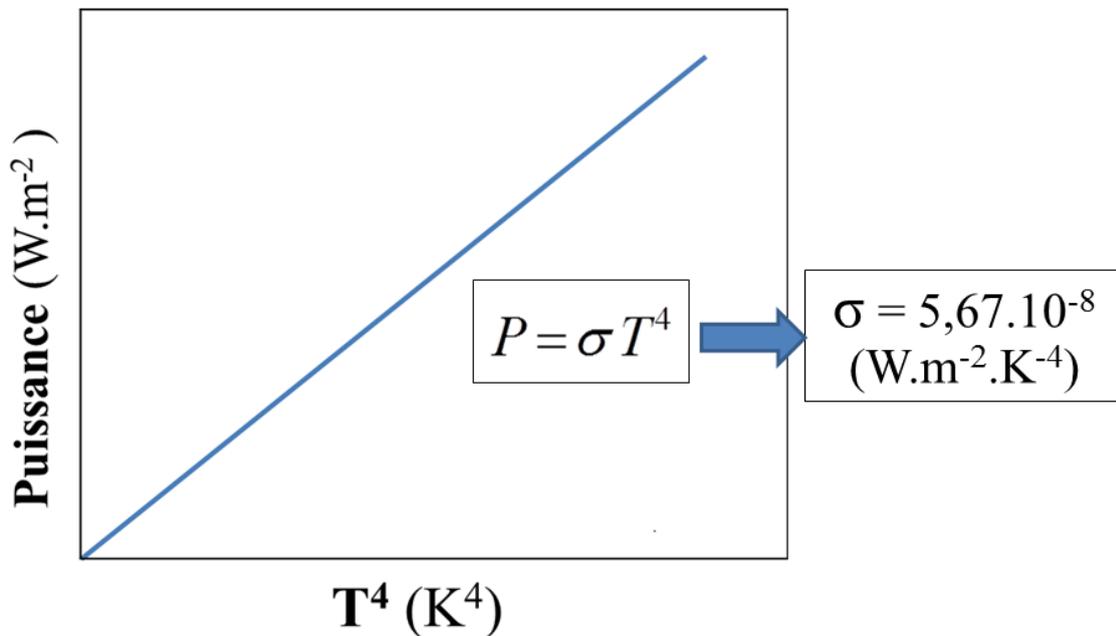
- La **Puissance rayonnée** par unité de surface (\equiv l'aire sous la courbe du spectre) est **proportionnelle** à la **4^{eme} puissance** de la Température **T** du C.N

$$P = \sigma T^4 \text{ (W / m}^2\text{)}$$

σ : constante de Stefan-Boltzmann



Puissance Rayonnée par le C.N



- **Applications de la loi de S-B**

La Puissance totale (ou luminosité* L) d'un C.N :

$$P_{tot} = S * P = S * \sigma * T^4 \text{ (en W)}$$

où S est l'aire du C.N.

* (Luminosité *est mesurée par un luxmètre*)

Remarque: pour une étoile sphérique $S = 4\pi R^2$

- *La connaissance de P_{tot} et de T permet de déterminer son rayon R .*

- **Cas d'un C.N. à rayonnement isotrope**

La Puissance rayonnée par le C.N par unité de volume est donnée par

$$P = \sigma^* T^4 \text{ (W/m}^3\text{)}$$

$$\sigma^* = 7,56.10^{-16} \text{ (W.m}^{-3}\text{.K}^{-4}\text{)}$$

Résumé des résultats expérimentaux du R.C.N

❖ La Densité Spectrale (D. S.) est identique pour tout C.N. de même température T,

∀ le matériau dont il est fabriqué

❖ La position du maximum de la courbe de la D. S. varie avec la température T :

C'est la Loi du déplacement de Wien.

❖ La puissance totale rayonnée varie selon la 4^{ème} puissance de T (en Kelvin) :

C'est la loi de Stefan-Boltzmann.

2 - Approches Théoriques

- La loi de Stefan-Boltzmann et la loi du déplacement de Wien ne présentaient pas l'équation complète de la distribution d'un C.N.



- Il fallait chercher l'équation théorique décrivant le spectre du R.C.N

- C'est chercher l'expression de la densité d'énergie du R.C.N, pour un T donné, en fonction de λ (ou ν) dans l'intervalle $[\lambda; \lambda + \Delta\lambda]$ $\mathcal{E}_T(\lambda)d\lambda$ ou dans $[\nu; \nu + \Delta\nu]$ $\mathcal{E}_T(\nu)d\nu$

- Telle que la puissance rayonnée par unité de surface sera calculée par intégration de $\mathcal{E}_T(\lambda)d\lambda$ ou $\mathcal{E}_T(\nu)d\nu$ sur tout le spectre du rayonnement,

$$P(T) = \int_0^{+\infty} \mathcal{E}_T(\lambda)d\lambda = \int_0^{+\infty} \mathcal{E}_T(\nu)d\nu$$

2a-Loi classique de Rayleigh-Jeans (R-J)

- R-J ont postulé: le rayonnement électromagnétique émis par le C.N. provient d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques qui ne sont autres que les atomes et les molécules formant ce C.N.

- Ils ont montré que la densité d'énergie est donnée par:

$$\mathcal{E}(\nu, T) = N(\nu) \langle E \rangle$$

$\langle E \rangle$: valeur moyenne de l'énergie d'un oscillateur harmonique de fréquence ν .

$N(\nu)$: nombre d'oscillations harmoniques de fréquence ν par unité de volume.

- En supposant que l'énergie des oscillateurs, dans la cavité du C.N., est continue
- Et en utilisant des lois de la thermodynamique - statistique R-J ont calculé :

$$N(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

$$\langle E \rangle = k_B T$$

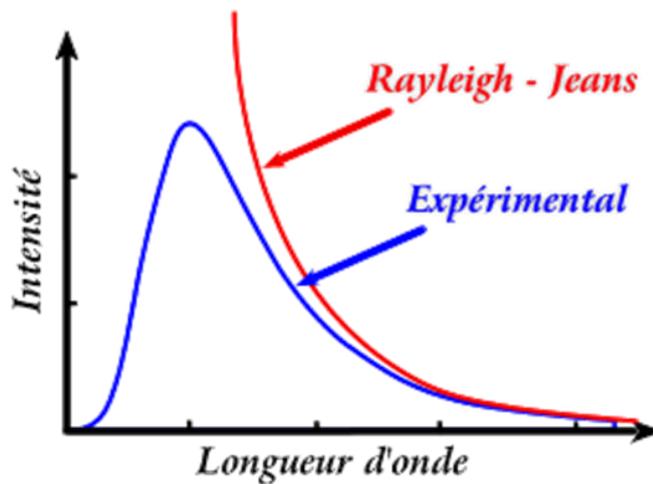
$$N(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4}$$

k_B : Cste de Boltzmann

- La densité d'énergie en terme de ν et de λ



$$\mathcal{E}_T^{R-J}(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$$
$$\mathcal{E}_T^{R-J}(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$$



1- Pas de maximum

**Incompatible avec
la Loi de déplacement de Wien**

$$2 - P^{R-J}(T) = \int_0^{\infty} \mathcal{E}_T^{R-J}(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} k_B T \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu = \infty$$



Pas de Loi de Stéfán

$$3 - \mathcal{E}_T^{R-J}(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T \text{ ou } \mathcal{E}_T^{R-J}(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{\lambda \rightarrow 0} \infty$$

• **L'énergie diverge: L'énergie rayonnée est infinie**

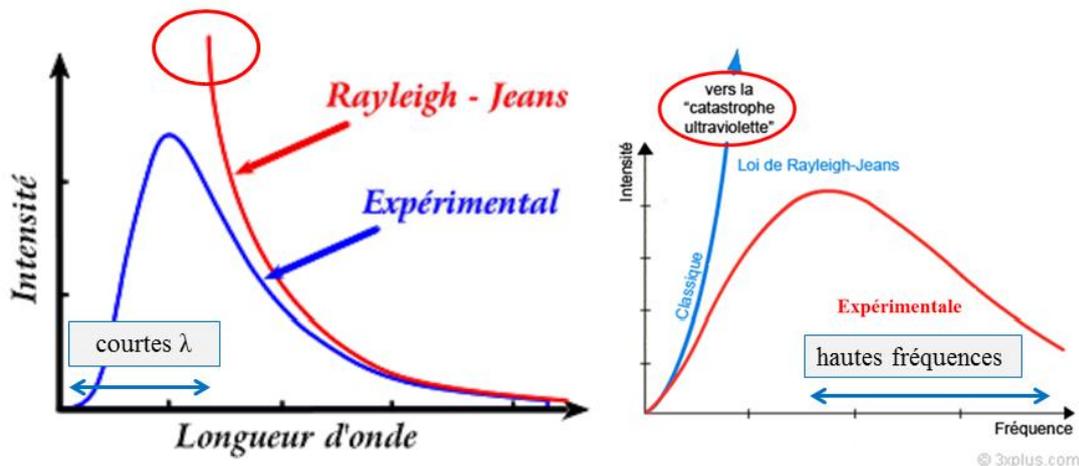
• Alors que la **courbe expérimentale** indique que l'énergie s'annule pour les **petites λ / grandes ν**



La Théorie classique de R-J est bien **convenable** pour les **grandes λ ou petites ν**

- Mais, elle est **non convenable** pour les **petites λ ou les grandes ν**
- Ces **contradictions** se produisent dans le **domaine des grandes ν / courtes λ** , c-à-d petites distances: **Domaine Microscopique**
- Cette contradiction est appelée :
« *Catastrophe Ultraviolette* »

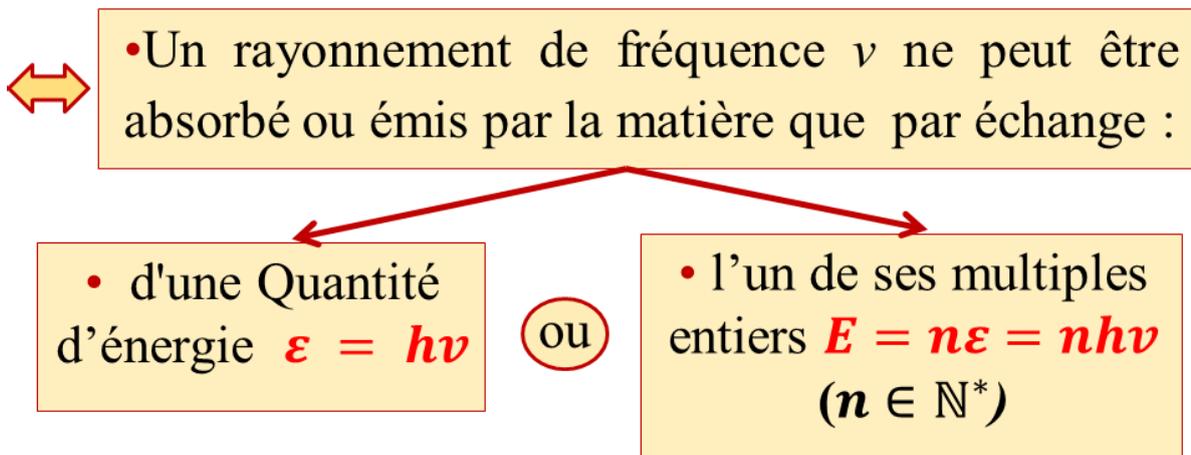
« catastrophe ultraviolette »



- «Catastrophe de l’U.V.» est un **problème** qui concerne l’**interaction Rayonnement-Matière** dans le **domaine des hautes ν / courtes λ** ;
- où la **M.C.** cesse d’être valable.

2b - Hypothèse de Planck

- Planck a postulé que: les **atomes** et **molécules** formant le C.N. ne peuvent **émettre** ou **absorber** du **rayonnement** que d'une manière **discrète**;



- La quantité d'énergie $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$ est appelée : quantum d'énergie (au pluriel: quanta)

- $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

est la constante de Planck

- $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

est la constante de Planck réduite

- $\omega = 2\pi\nu$ est la pulsation du rayonnement

2c - La Théorie de Planck de R.C.N

- À partir des mêmes considérations de R-J /

$$\mathcal{E}(\nu, T) = N(\nu) \langle E \rangle \quad \text{où} \quad \boxed{E = nh\nu}$$

- En utilisant les lois de la thermodynamique-statistique en terme de fréquence :

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}}$$

- La loi de Planck en terme de ν s'exprime,

$$\boxed{\mathcal{E}_T^P(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}}$$

- En terme de longueur d'onde ;

$$E = \frac{nhc}{\lambda}$$

$$\mathcal{E}(\lambda, T) = N(\lambda) \langle E \rangle$$

où :

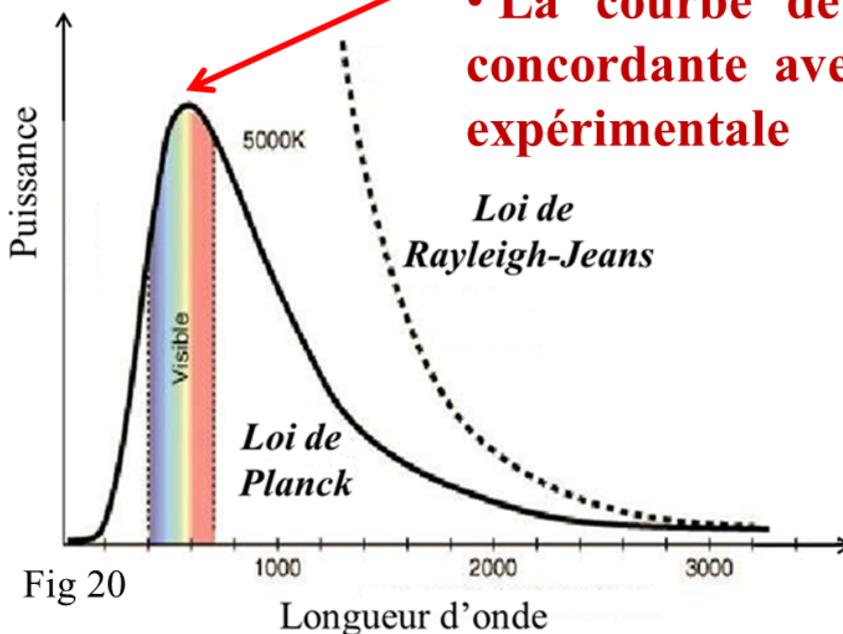
$$\langle E \rangle = \frac{hc}{\lambda} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1}$$

- La loi de Planck en terme de λ s'exprime,



$$\mathcal{E}_T^P(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1}$$

1- La catastrophe de l'U.V. est levée



- La courbe de Planck est concordante avec la courbe expérimentale

Fig 20

- La Théorie de Planck permet de retrouver;

➔ La loi empirique de Stéfan

$$P = \sigma T^4$$

➔ La loi empirique de déplacement de Wien

$$\lambda_{\max} = \frac{2.9}{T} \text{ (mm)}$$

➔ à basses fréquences ν , la loi classique de R-J

$$\mathcal{E}_T^P(\nu) \xrightarrow{h\nu \ll k_B T} \mathcal{E}_T^{R-J}(\nu)$$

- Ainsi, Planck instaura que lors de l'interaction rayonnement-matière, l'échange énergétique se fait par des **Sauts d'énergie (Quanta)**: $h\nu, 2h\nu, 3h\nu \dots$

➔ **l'énergie serait discrète (quantifiée)**

- Malgré que selon Planck, ce n'était qu'un artifice mathématique de calcul !!

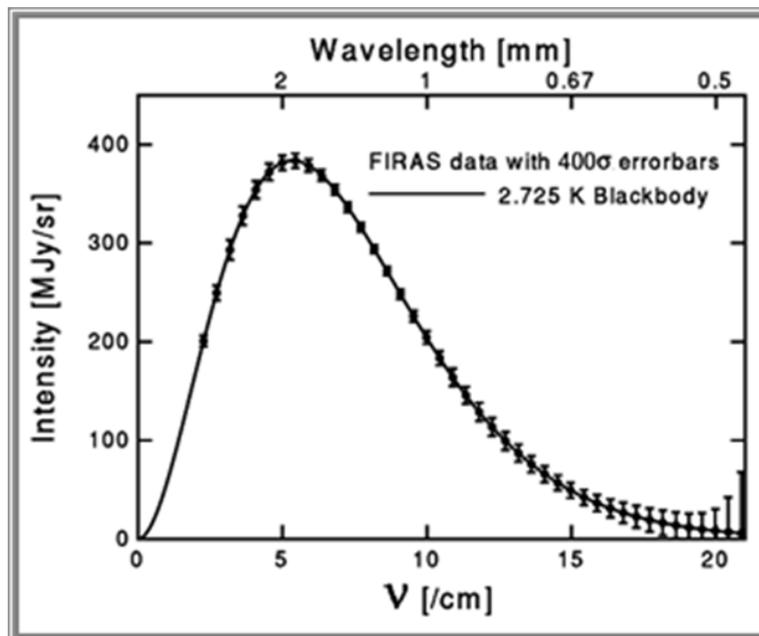
➔ • Cette **quantification de l'énergie** constitue:

- la base de la naissance de la **Théorie Quantique** qui s'est avérée un bon candidat pour la description du monde à l'échelle atomique et subatomique.

2d - Exemples de C.N.

➤ *Fond Diffus Cosmologique (F.D.C.)*

▪ C'est est un rayonnement électromagnétique qui baigne tout l'univers. Il a été émis quelques milliers d'années après le big-bang, lorsque l'univers était juste assez refroidi pour permettre aux atomes d'hydrogène de se former. Du fait de l'expansion de l'univers, ce rayonnement est aujourd'hui très dilué. Et il s'agit bien d'un rayonnement du corps noir à $T=2,725$ K.



➤ *Spectre du fond diffus cosmologique*

➤ *Spectre d'émission solaire*

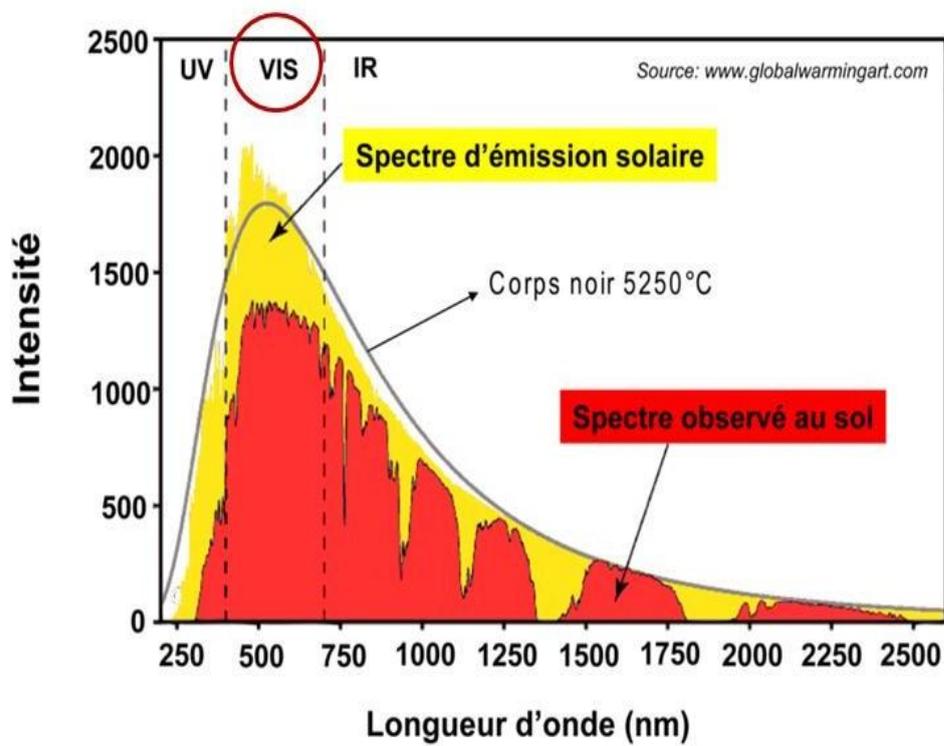


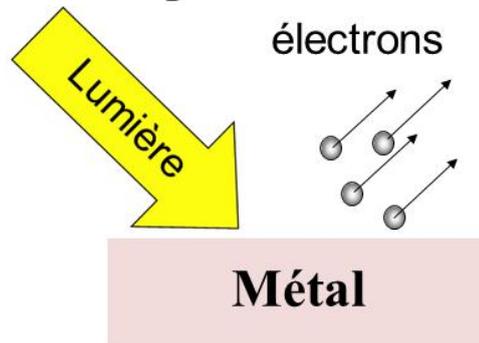
Fig 23

II- L'EFFET PHOTOÉLECTRIQUE

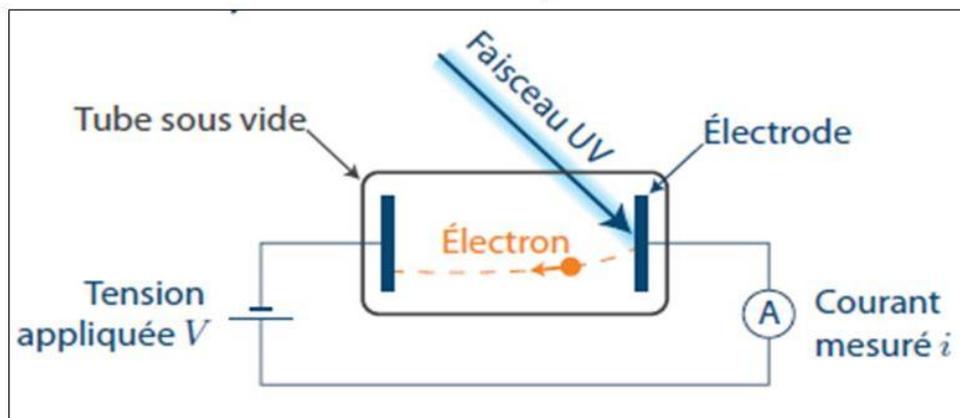
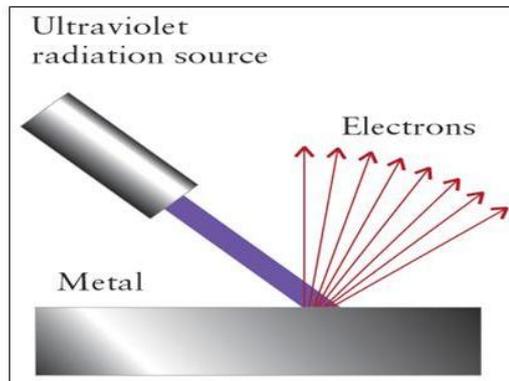
□ L'effet photoélectrique

- Il a été découvert par Hertz en 1887: Lorsque une plaque de métal est exposée à la lumière, il y'a éjection des électrons. Le mouvement de ces électrons arrachés est détecté sous forme d'un courant à travers un circuit électrique.

Ce phénomène est *l'effet photoélectrique*

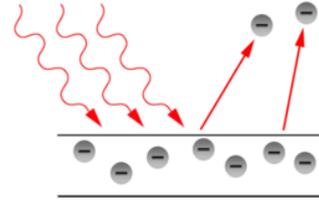


Circuit Électrique



Selon l'interprétation classique :

- Résonance entre l'oscillation de l'onde de lumière et une oscillation des électrons.
- l'intensité $I_{\text{élec}}$ du courant électrique mesuré devrait être proportionnelle à l'intensité lumineuse I_{lum} (puissance).
- si on augmente l'intensité de l'onde I_{lum} , l'énergie cinétique des électrons devraient augmenter et les électrons seront éjectés plus facilement.

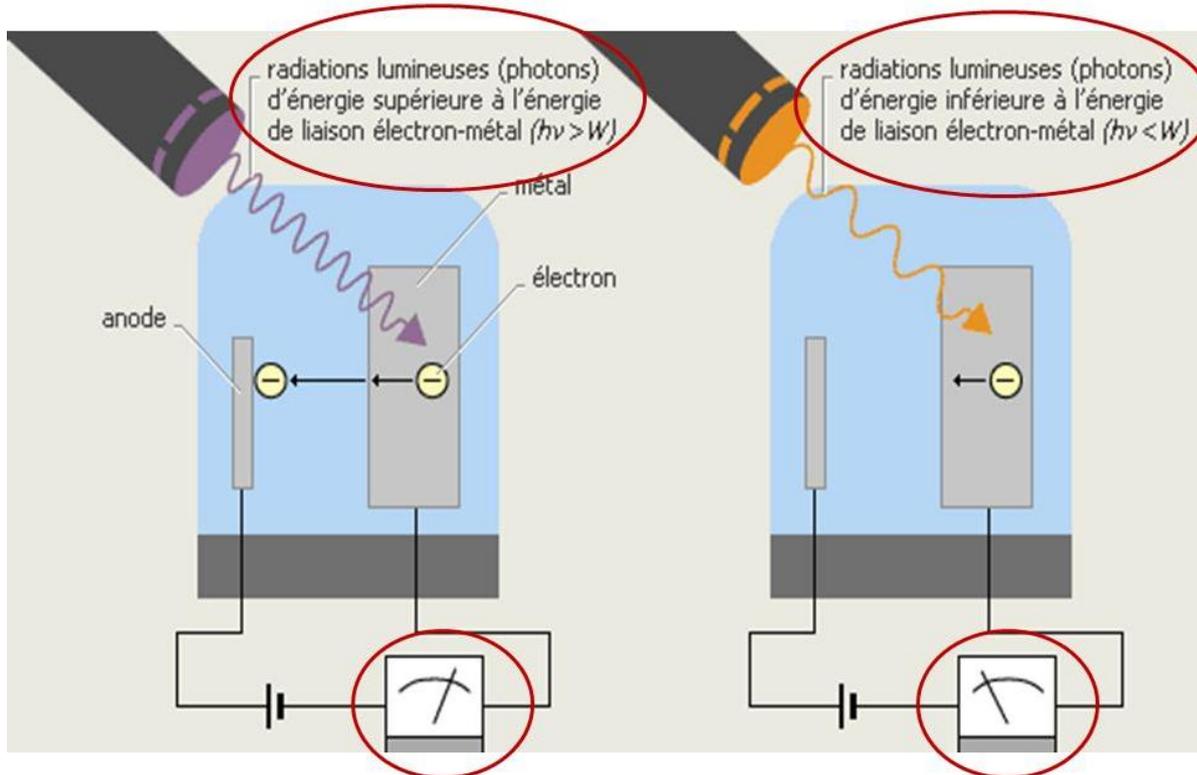


1 - Les observations expérimentales :

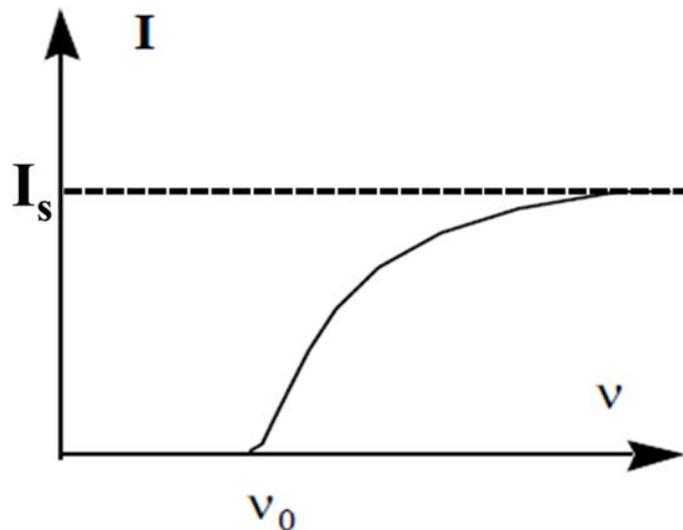
1- L'effet photoélectrique n'a lieu que si,

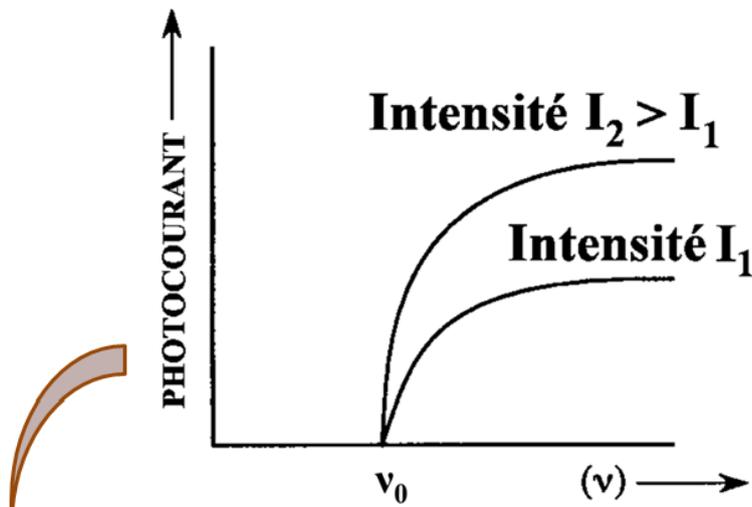
- la fréquence ν de la lumière : $\nu > \nu_0$
- ou sa longueur d'onde : $\lambda < \lambda_0$

ν_0 : fréquence seuil et λ_0 :longueur d'onde seuil



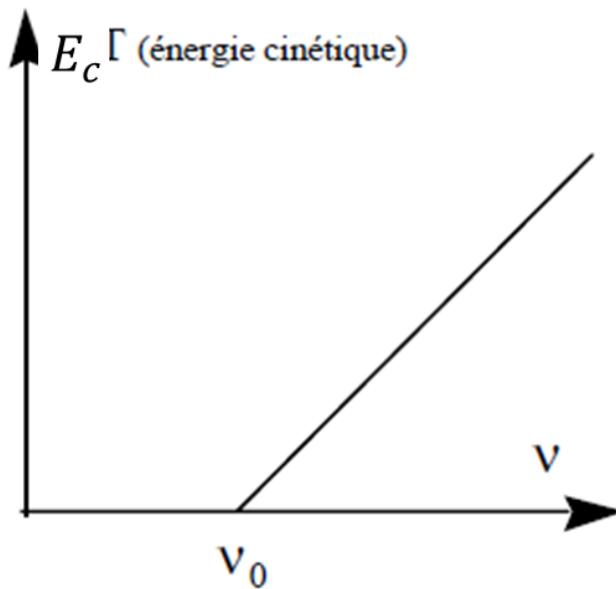
2- Le courant I croit jusqu'à une valeur asymptotique I_s :
appelé **Courant de Saturation**





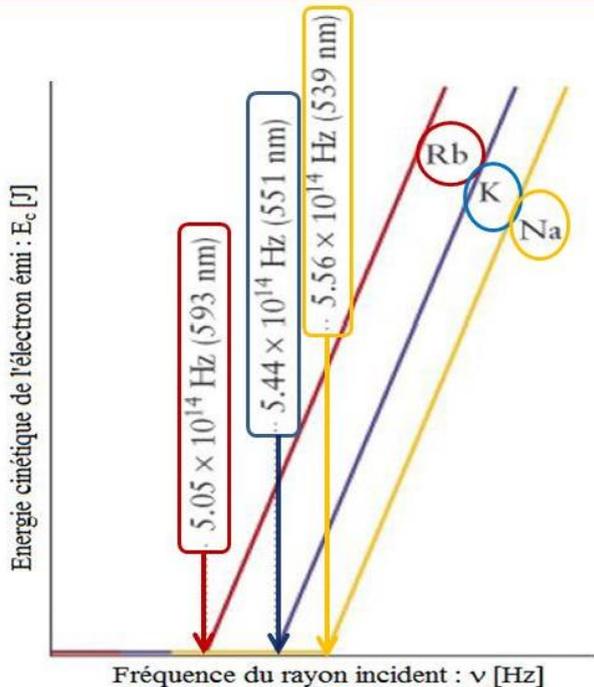
- 3- Si $\nu < \nu_0$ l'effet n'apparaît pas :
- \forall l'intensité du rayonnement et \forall le temps d'exposition de la photocathode à la lumière

4 - L'énergie cinétique des électrons émis varie linéairement avec la fréquence du rayonnement



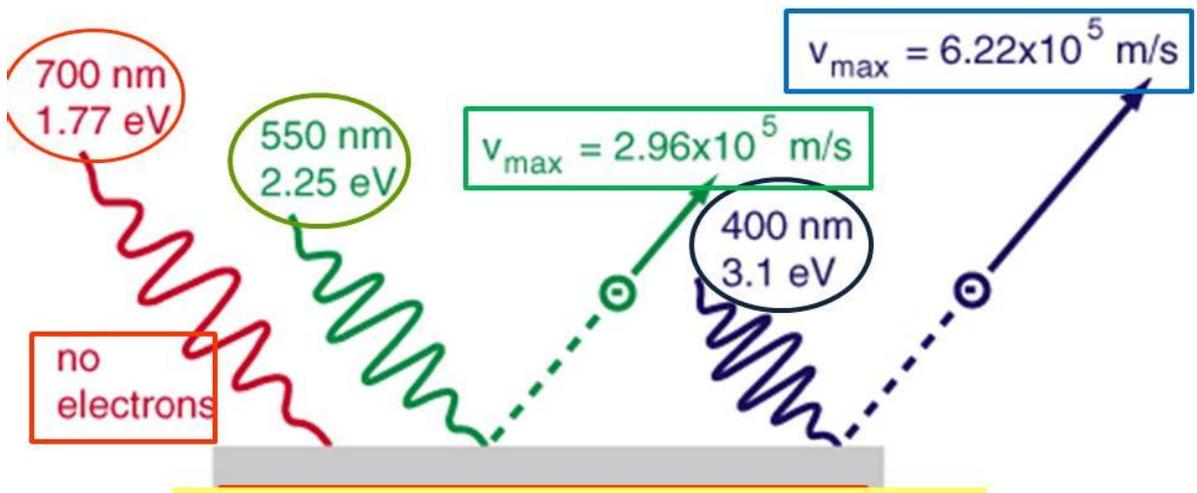
5- La fréquence seuil ν_0 est caractéristique du métal

- ν_0 dépend de l'énergie d'extraction W_0 des électrons



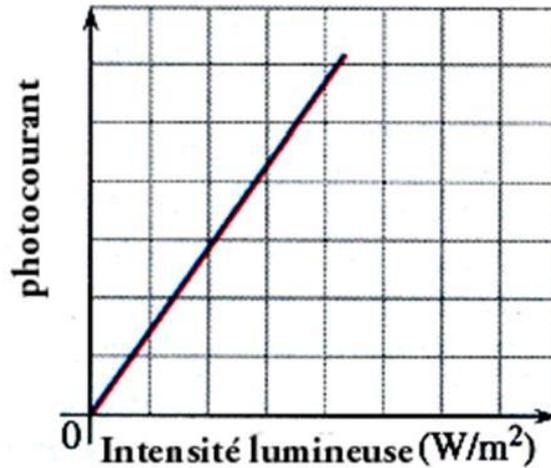
$\lambda=700 > \lambda_0=551$ (nm)

$550 \ \& \ 400 < 551$ (nm)



● Application au Potassium
 λ_0 (k) = 551 nm

6 - Le nombre des photoélectrons émis qui détermine l'intensité du courant électrique est proportionnel à l'intensité du rayonnement!



□ Conclusions :

- ➔ • L'émission des électrons est instantanée
- ➔ • Pas de temps caractéristique !
- ➔ • L'énergie cinétique des photoélectrons est indépendante de l'intensité du rayonnement
- ↔ • **En désaccord avec la physique classique!**

- La dépendance de l'énergie cinétique des électrons en fonction de la fréquence de la lumière incidente et son indépendance de la puissance de la lumière incidente ne trouvent pas d'explication dans la théorie classique.
- Cet effet est un phénomène d'interaction Rayonnement – Matière :
- C'est un domaine microscopique où la M.C. est insuffisante et la M.Q. est nécessaire.

➡ • Nécessité d'une Interprétation Quantique

2 - Hypothèse d'Einstein

- En 1905, Einstein a postulé que le rayonnement se compose de **grains de lumière** : des *corpuscules* appelés *photons* notés γ ayant chacun une *énergie individuelle* qui est **proportionnelle à la fréquence** de cette lumière *et qui est égale au quantum d'énergie*

$$E_{\gamma} = h\nu$$

où h est la constante de Planck

- Cette hypothèse a instauré **l'aspect corpusculaire de la lumière** et a reçu le nom de **la Théorie Corpusculaire**
- Tout comme la **Théorie Ondulatoire** qui considérait la lumière comme une **onde électromagnétique**.
- Ceci est la **Quantification du Rayonnement** qui a permis aussi de comprendre d'autres phénomènes de l'interaction Rayonnement-Matière à l'échelle subatomique.

3 - Interprétation d'Einstein

- L'effet photoélectrique est interprété comme un phénomène collectif de choc photon-électron.
- **L'électron étant lié au métal, pour l'extraire il faut lui fournir une énergie minimale W_0 :**
appelée **énergie d'extraction du métal**.
- Selon le matériau, Le photon doit avoir une quantité minimum d'énergie **$h\nu_0$:**
appelée énergie seuil **égale à W_0**

4 - Théorie d'Einstein

- Si l'énergie $h\nu$ du γ est supérieure à cette énergie seuil W_0 , l'électron sera arraché: l'effet aura lieu.

- Lors du choc $\gamma - e^-$, le quantum d'énergie $h\nu$ de γ est totalement absorbé par l'électron ;



- Une partie = Travail d'extraction W_0 est utilisée pour libérer l' e^-

- Le reste est sous forme d' E_c de l' e^- éjecté.

- Le bilan énergétique de l'effet photoélectrique

$$E_\gamma = h\nu = W_0 + E_c$$

or

$$h\nu_0 = W_0 = eV_0$$

Potentiel d'extraction

Énergie seuil

Énergie d'extraction

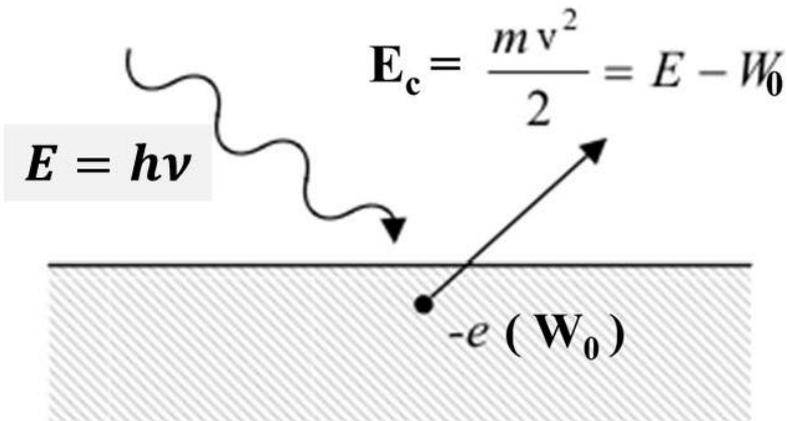
Fréquence seuil

$$\longrightarrow \nu_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{eV_0}{h}$$

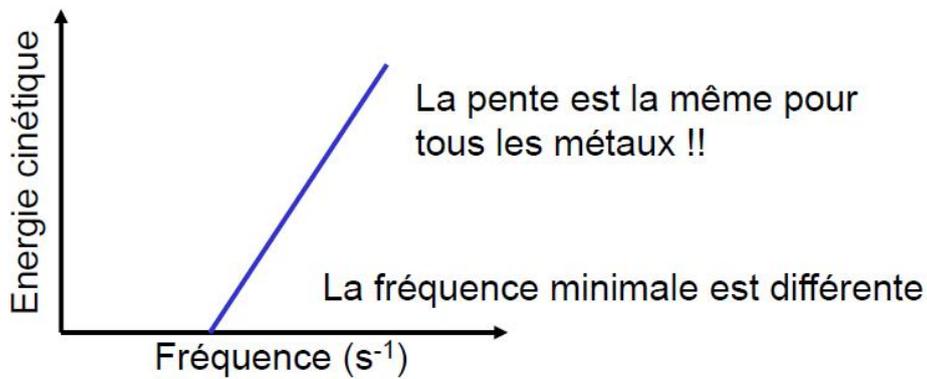
Énergie cinétique

$$\longrightarrow E_c = h\nu - W_0 = h(\nu - \nu_0)$$

Effet photoélectrique



- ➔ • L'énergie cinétique (ou vitesse) de l'électron arraché augmente avec la fréquence ν .



- La pente est déterminée expérimentalement
- elle est égale à h : la constante de Planck

➔ $E_c = h(\nu - \nu_0)$

5 - Conséquences de cette théorie :

- La puissance totale (flux) d'une source émettant N photons (γ) par unité de temps est donnée par :

$$P = N.h.\nu$$

- ❖ Si $\nu > \nu_0$ l'effet aura lieu ;
- ❖ Si $\nu < \nu_0$ l'effet n'aura pas lieu ;
- \forall le nombre N de γ incidents
- donc, \forall l'intensité (puissance) du rayonnement

5a - Explication : Courant de saturation

- Si le nombre N de γ croît (puissance $P \nearrow$)
 - ➔ • Le courant I croît jusqu'à ce que les électrons de la photocathode s'épuisent
 - ➔ • Les γ incidents supplémentaires sont alors absorbés par la cathode sans qu'il y'aura éjection d'électron
 - ➔ • I ne croît plus, il atteint la saturation : I_s

5b- Interprétation de l'Hypothèse de Planck

- L'hypothèse de Planck du R.C.N est une conséquence directe de celle d'Einstein
- En effet, quand la matière absorbe / émet un rayonnement:
- elle absorbe/émet un nombre entier de photons
- donc une énergie égale au quantum d'énergie $h\nu$ ou à l'un de ses multiples entiers $n h\nu$ (*Quanta*):



l'Energie est Quantifiée

6 - Propriétés du Photon

- C'est un corpuscule indivisible d'énergie propre :

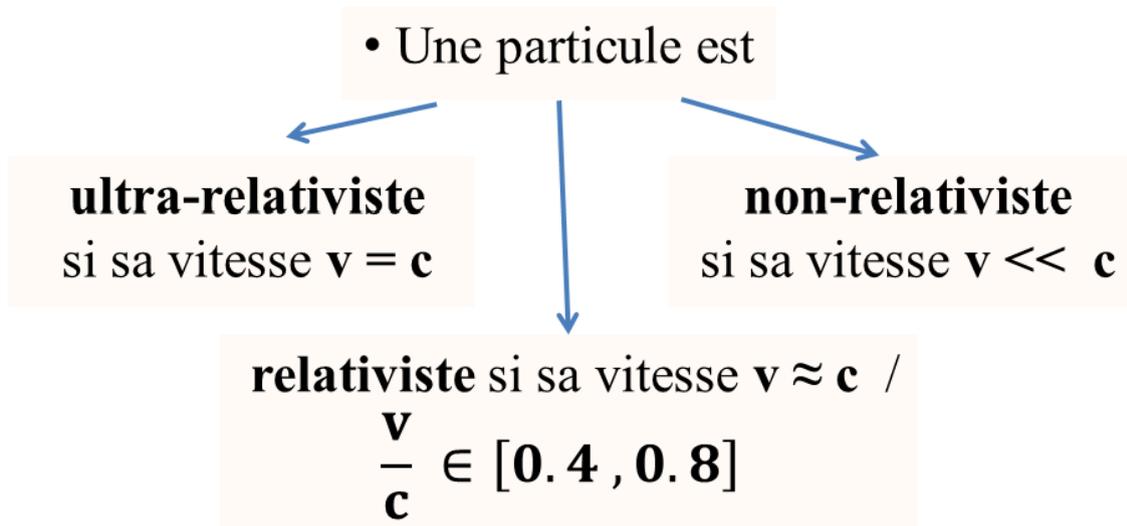
$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

- Sa vitesse dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
- C'est une particule ultra-relativiste



- Il est nécessaire d'appliquer la formulation de la Relativité Restreinte

7 - Relativité Restreinte



- Considérons **une particule relativiste** de **masse m** et en mouvement **de vitesse v**

➔ • Son Energie totale est :

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

- Son Impulsion est

$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$

masse au repos



• Relation Energie-Impulsion

$$\frac{P}{E} = \frac{v}{c^2}$$



• Energie au repos :

$$E_0 = m_0 c^2$$



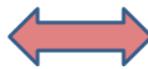
• Energie cinétique :

$$E_c = E - E_0 = \Delta m \cdot c^2$$

• Pour le photon :

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\frac{P_\gamma}{E_\gamma} = \frac{c}{c^2} = \frac{1}{c}$$



$$P_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

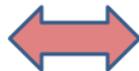


$$P_\gamma = \hbar k$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde



$$E_\gamma^2 = P_\gamma^2 c^2 + m_\gamma^2 c^4$$



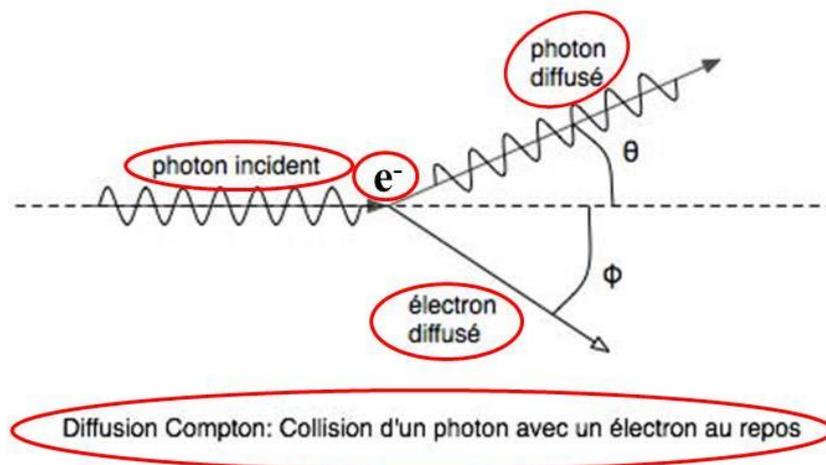
$$m_\gamma = 0$$

• Le photon est une particule de masse nulle

*III - Effet Compton
ou
Diffusion Compton*

- Lorsqu'un rayonnement de fréquence ν (de longueur d'onde λ) est projeté sur un électron libre et au repos ou très faiblement lié à un métal:
- Il y'a une diffusion du rayonnement (changement de direction) d'un angle θ par rapport à la direction incidente,
- Une éjection de l'électron sous un angle ϕ par rapport à la direction du rayonnement incident

Observations expérimentales



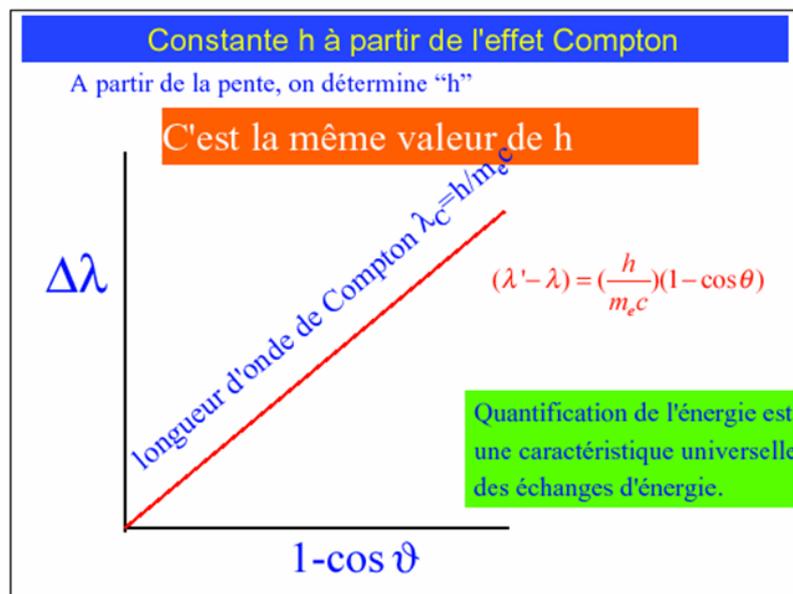
C'est un choc-relativiste

- À partir des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion on montre que :

(Voir T.D.)

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta)$$

- $\Delta\lambda$ est indépendante de λ incidente
- λ' dépend de l'angle de diffusion θ , et $\lambda' > \lambda$
- Diminution de fréquence $\nu' < \nu$
- Le photon perd son énergie au profit de gain de l' E_c de l' e^- éjecté / $E_{\gamma'} < E_{\gamma}$



❖ Conclusion

* Depuis la théorie d'Einstein en 1905, les débats sur l'existence du photon étaient en cours, cette expérience de l'effet Compton en 1923 a été comme une Confirmation de :

- l'existence des photons
- le photon possède une impulsion

 • L'aspect Corpusculaire de la lumière

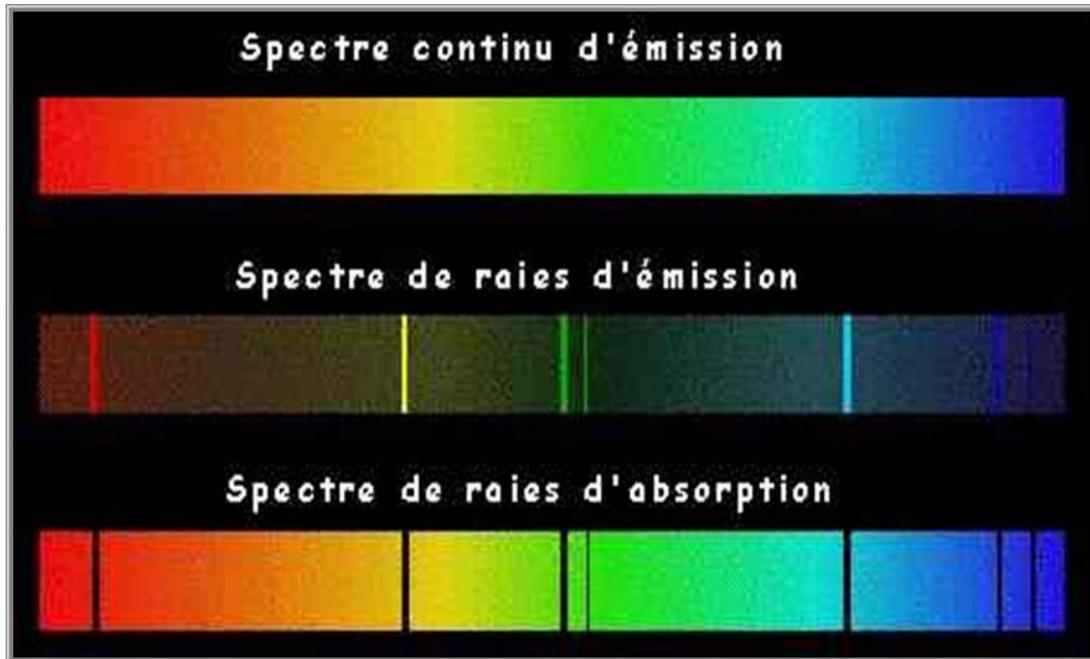
IV – SPECTRES ATOMIQUES

Introduction

- Vers la fin du 19^{ème} siècle, les spectres atomiques qui étaient un autre problème très connu a aussi conduit à des développements considérables de la théorie des quanta.
- En effet, on constata que **lorsqu'un atome est excité ou irradié il n'émet ou n'absorbe de la lumière que seulement pour certaines valeurs discrètes de fréquences ou de longueurs d'onde bien déterminées.**

Spectre de raies

- On appelle spectre d'un rayonnement la répartition des intensités monochromatiques en fonction de λ ou ν
- *Spectre de raies d'émission* ou *d'absorption* d'un atome = Spectre de radiations discrètes émises ou absorbées par cet atome.



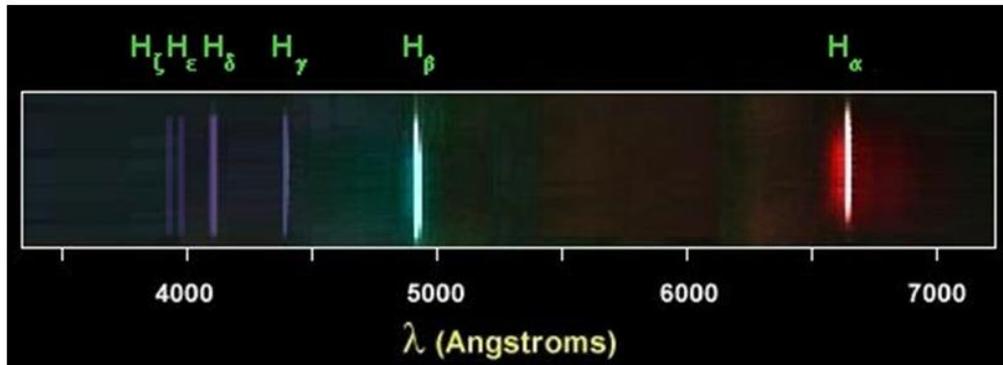
Lois empiriques

- Les expériences ont montré que les raies d'émission de l'atome d'hydrogène sont réparties en fonction de longueur d'onde λ en séries bien déterminées appelées séries spectrales: Séries de Lyman, de Balmer, de Pashen..., qui sont données par la loi empirique de Ritz Balmer -Rydberg :

$$\nu_{nm} = \frac{c}{\lambda_{nm}} = cR_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (n, m = 1, 2, \dots \quad (n < m))$$

$$R_H = 1,097373 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad \text{Constante de Rydberg}$$

Série de Balmer de l'hydrogène



- Elles sont exprimées par la loi empirique de Balmer –Rydberg:

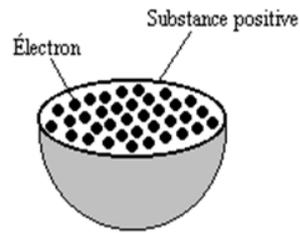
$$\nu_{2n} = \frac{c}{\lambda_{2n}} = cR_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Interprétation des spectres de raies

- Les spectres de raies (d'émission ou d'absorption) caractérisent chaque élément atomique et indiquent "une Identité de nature discrète" dans les atomes. Cette discontinuité ne trouvait pas d'explication dans le cadre de la mécanique classique.
- Pour interpréter ces résultats expérimentaux, plusieurs modèles atomiques ont été proposés.

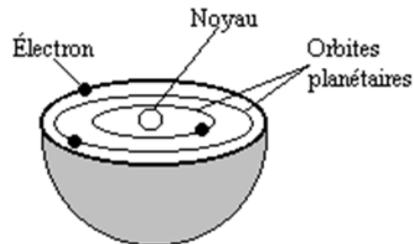
- Modèle de Thomson (1902)

▪ L'atome est comme une sphère remplie d'une substance électriquement positive et fourrée d'électrons négatifs immobiles.



- Modèle planétaire de Rutherford (1909)

▪ Les électrons de charge négative tournent autour du noyau de charge positive



96

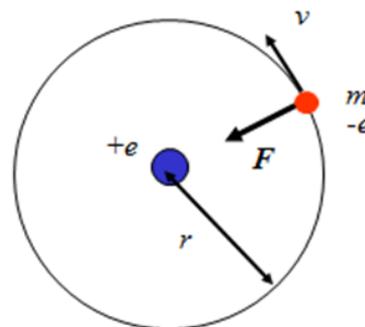
- Modèle de Bohr (1913)

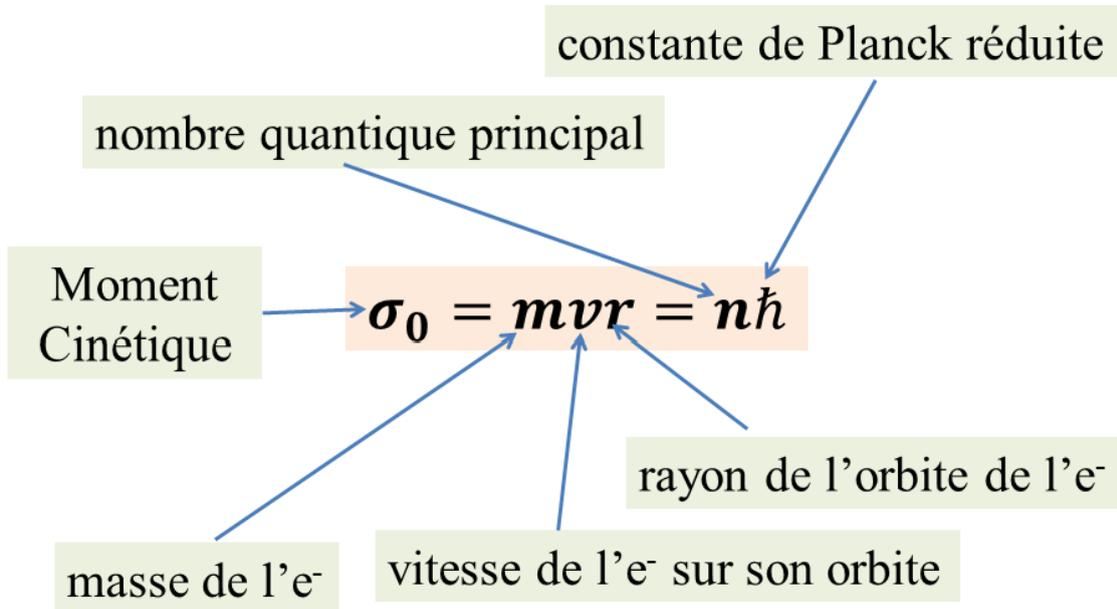
"Conditions des Quanta"

1^{ère} hypothèse de Bohr :

❖ *Quantification du moment cinétique*

- Le moment cinétique de l' e^- , en mouvement sur son orbite autour du noyau, ne peut prendre comme valeurs que des multiples entiers n de \hbar .
- Ces orbites ainsi définies sont appelées «*orbites stationnaires*» qui sont les seules compatibles avec la stabilité de l'atome.



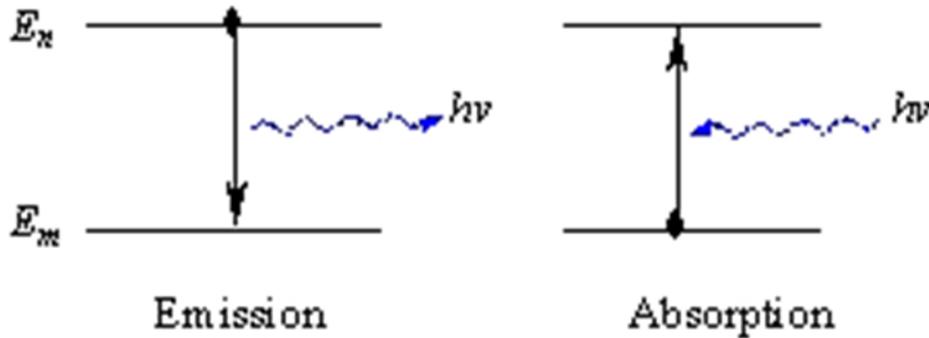


• **2^{ème} Postulat : Règles des quanta de Bohr**

- à Chaque orbite permise d'ordre n correspond un niveau d'énergie bien déterminé E_n .
- Les **transitions des électrons** se font par "sauts":
- Un e⁻ passe d'une orbite d'énergie E_n vers une orbite d'énergie E_m plus petite (plus grande) par **émission (absorption) d'un photon d'énergie**
= La différence d'énergies entre les 2 niveaux

$$E_\gamma = h \nu_{nm} = E_m - E_n$$

Emission et absorption d'un photon par un atome



$$E_\gamma = h \nu = E_m - E_n$$

- Grâce au Modèle de Bohr basé sur la quantification des énergies atomiques et du moment cinétique des orbites électroniques on a pu interpréter les spectres de raies de l'atome d'hydrogène et on a pu déterminer,

- Les rayons des orbites quantifiées de Bohr

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} n^2$$

- Les énergies quantifiées des états stationnaires

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ (eV)} \quad (1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J})$$

(voir T.D)

- Ces résultats théoriques ont été en bonne concordance avec la loi empirique de Ritz;
- Les séries de Lyman, de Balmer et de Paschen ont été reproduites,
- et une bonne valeur théorique de la constante de Rydberg a été également retrouvée (Voir T.D).

$$R_H \text{ théorique} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}$$

Illustration des Séries Spectrales

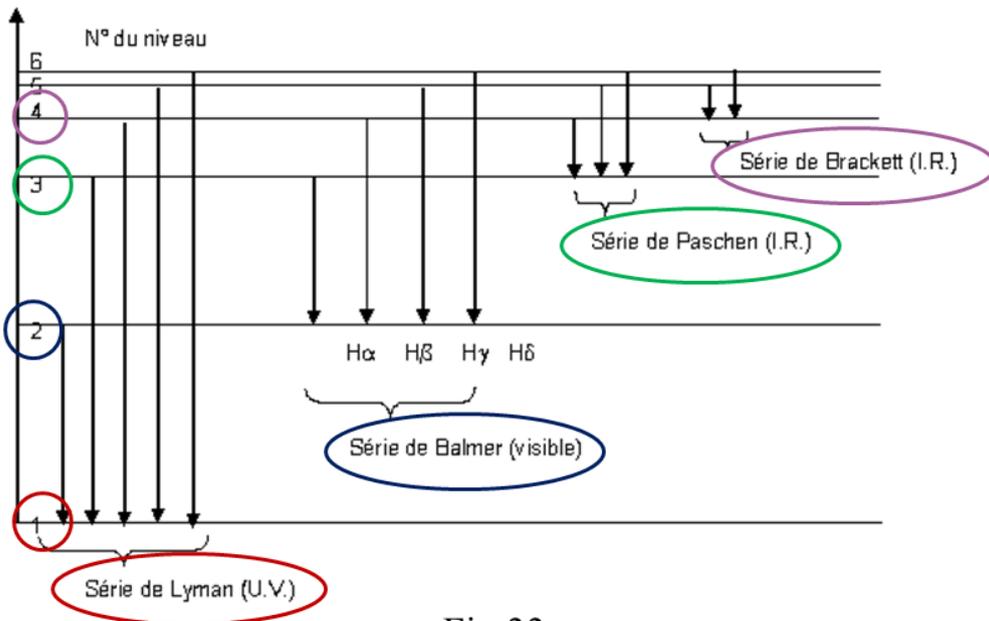
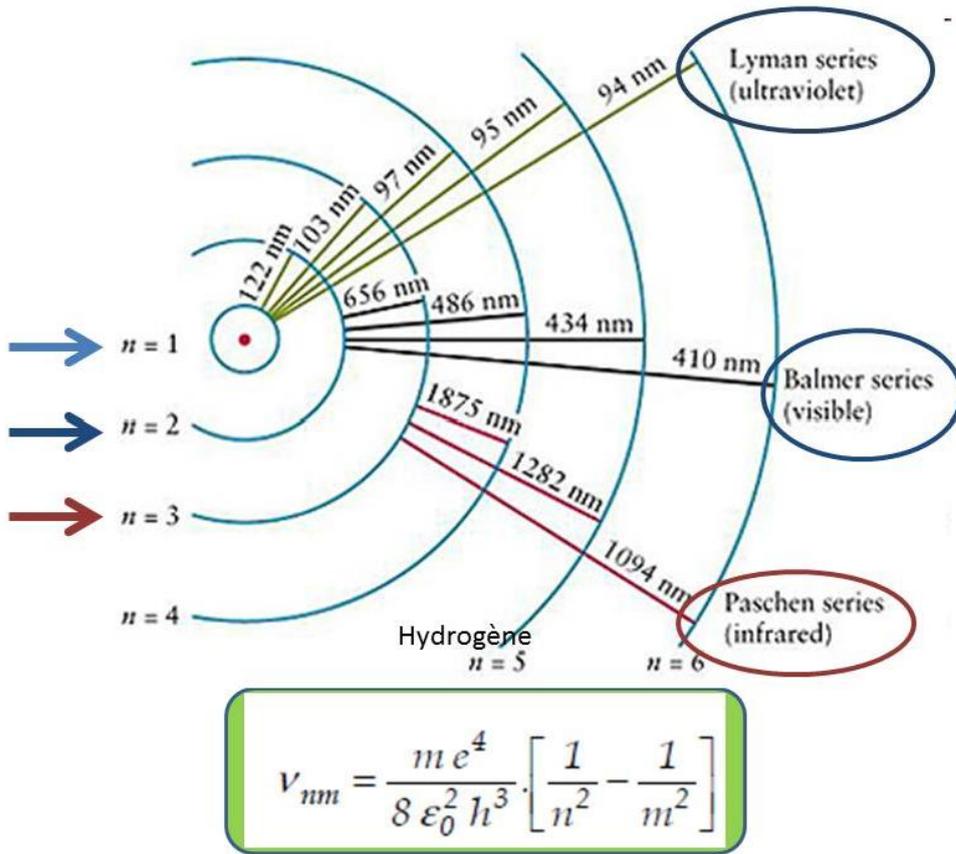
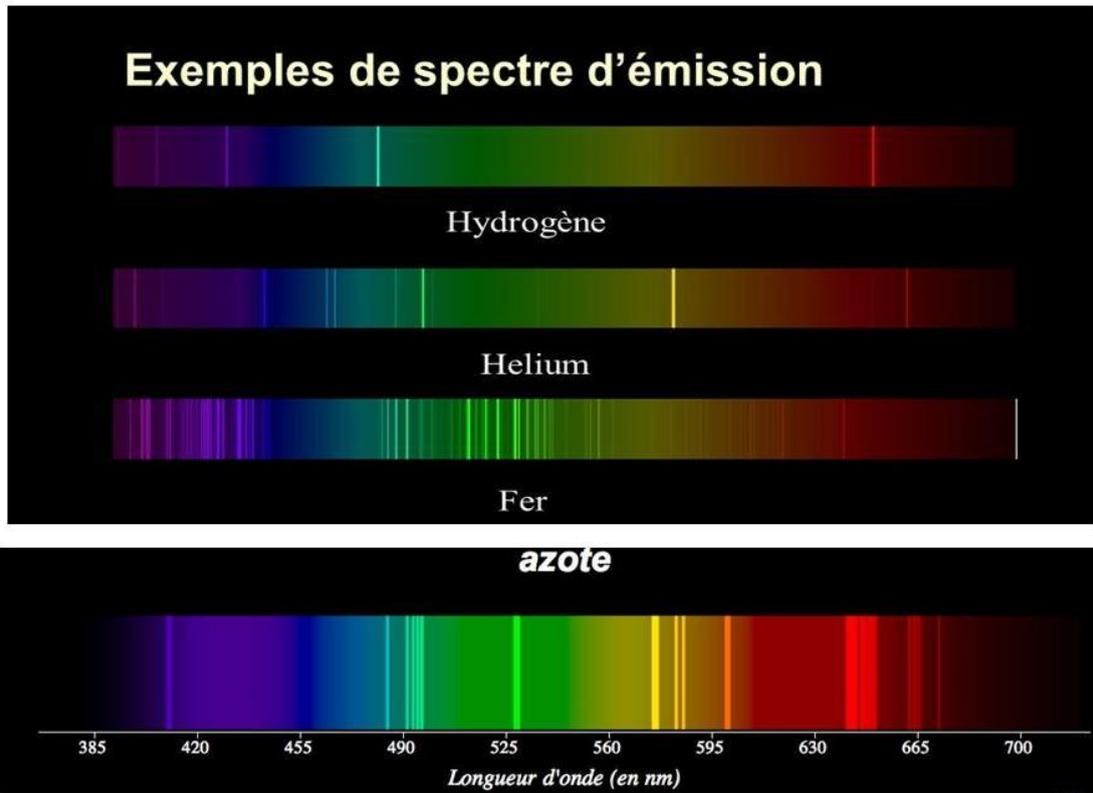


Fig 33



→ Les séries spectrales des raies sont caractéristiques pour chaque atome.

→ Elles représentent une signature spectrale grâce à laquelle chaque atome est identifié à travers la reconnaissance de son spectre.



Conclusion

- La Théorie des quanta, a été introduite par Planck pour expliquer le spectre du R.C.N., est dont l'énergie est explicitement liée à la constante de Planck,
 - est, ensuite, utilisée par Einstein pour interpréter l'effet photoélectrique et inventer les corpuscules de lumière: les photons,
 - et enfin, utilisée dans le modèle atomique de Bohr.

- Cette Théorie des quanta a été un outil fondamental qui a expliqué des phénomènes liés à l'interaction rayonnement matière.
- Mais, elle n'a pu interpréter que l'aspect corpusculaire de la lumière,
- et il a fallu trouver une Théorie plus générale qui permet de traiter aussi l'aspect ondulatoire de la lumière qui était bel et bien omniprésent.

❑ À partir de 1924, la Théorie des Quanta fut progressivement abandonnée et remplacée par une théorie plus cohérente qui a pu expliquer tout ce que la Théorie des Quanta laissait dans l'ombre :



la Mécanique Quantique

Chapitre 2

Ondes de Matière de Louis De Broglie

I- Ondes de Matière de Louis de Broglie

- On appelle Matière toute particule ayant une masse

➤ Hypothèse de Louis de Broglie L.D.B (1924):

- ❖ Il a supposé que:
- ❖ Puisque à une onde électromagnétique on avait associé un corpuscule (photon) ;

$$\text{d'énergie : } E_{\gamma} = h\nu$$

$$\text{et d'impulsion : } P = \frac{h}{\lambda}$$

- Réciproquement, à toute particule de masse m en mouvement de vitesse v , on peut associer une onde appelée « **Onde de De Broglie** » ou « **Onde de matière** » de longueur d'onde donnée par:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

et d'énergie :

$$E = h\nu$$

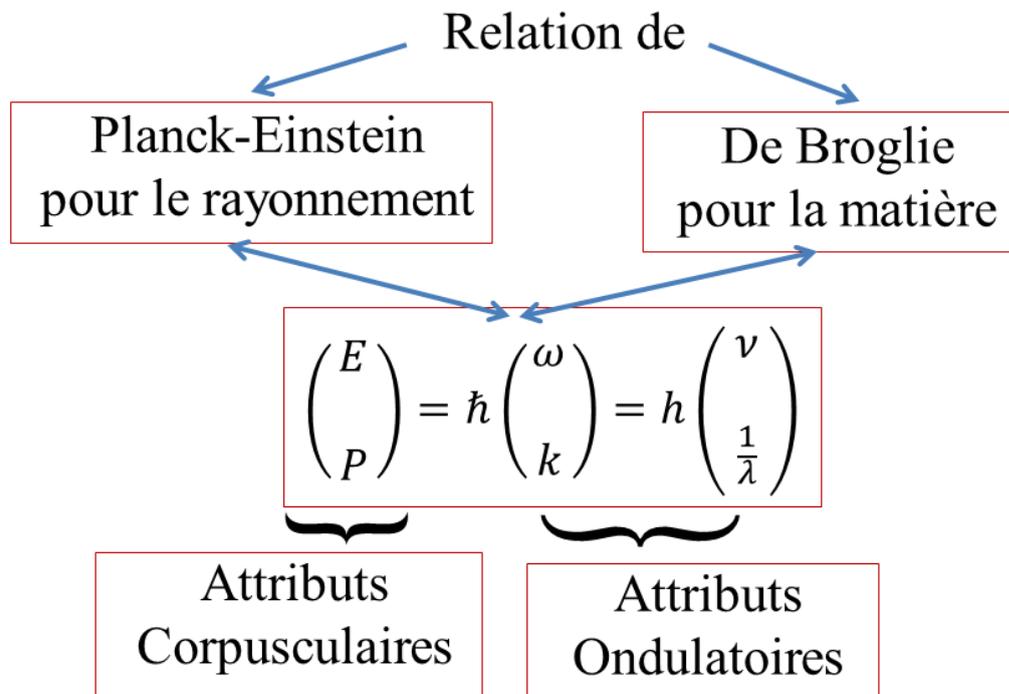
➤ Arguments de Louis de Broglie (L.D.B.)

- 1- Les relations de L.D.B qui définissent les grandeurs ondulatoires de la matière en fonction de ses grandeurs corpusculaires

sont équivalentes à une Généralisation

des relations de Planck-Einstein pour le photon qui définissent ses grandeurs corpusculaires en fonction de ses grandeurs ondulatoires

Dualité Onde-Corpuscule Généralisée



2 – L’hypothèse de De Broglie a donné une bonne interprétation au postulat de Bohr. En effet,

- Vu que les atomes sont stables, l’onde de matière associée à l’e⁻, en mouvement autour du noyau, ne sera stable que si elle est stationnaire :



la longueur du trajet effectué par l’onde = un nombre entier de sa longueur d’onde λ

$$2\pi r = n\lambda$$

$$2\pi r = n\lambda$$

d’après De Broglie



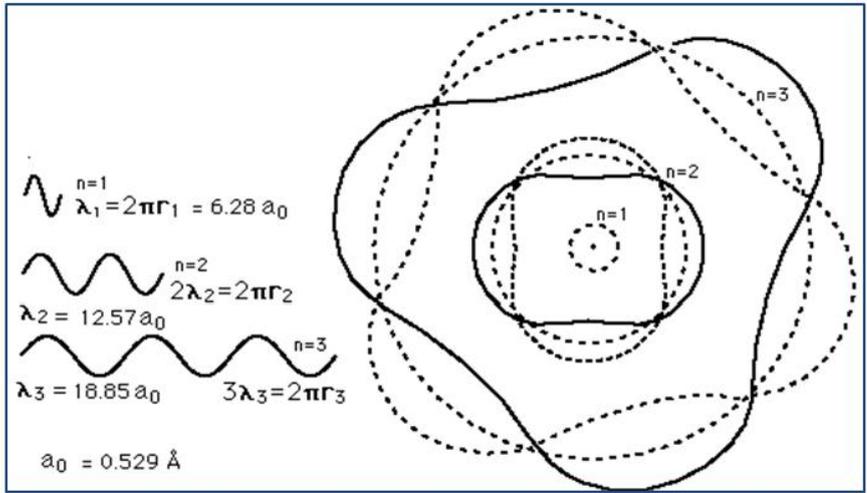
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$



$$mvr_n = n\hbar$$



on retrouve la règle des quanta de Bohr

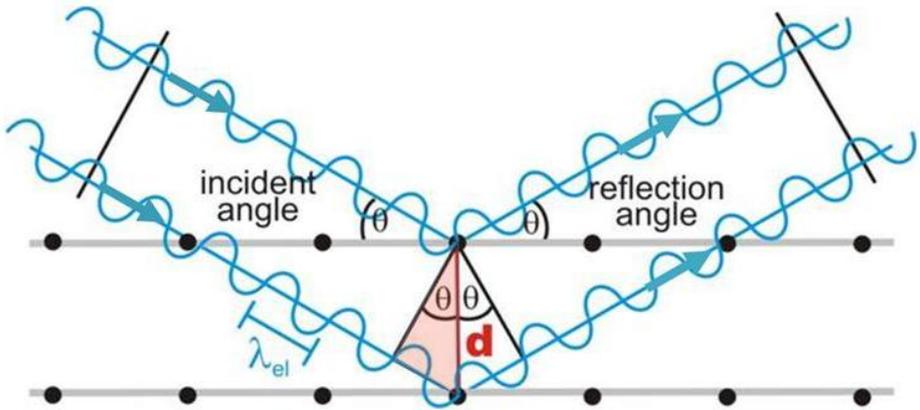


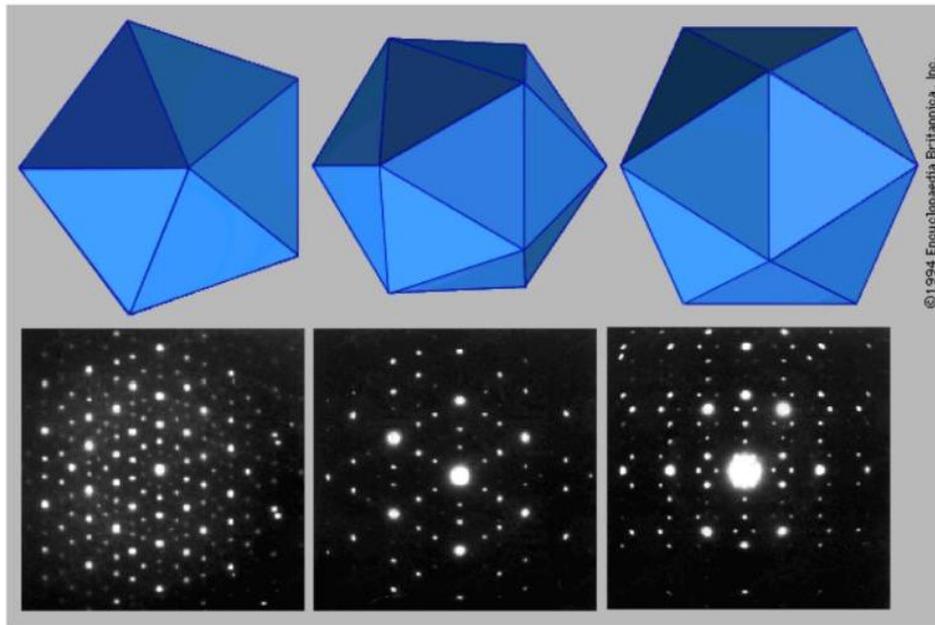
a_0 est le rayon de Bohr

II- Preuves expérimentales

1-Expérience de Davisson et Germer (1927): Diffraction des e^-

- D-G ont envoyé un faisceau d'électrons accélérés sous l'effet d'une tension U sur un cristal de Nickel,





Diffraction des électrons

- Il y'a une diffraction électronique identique à celle des rayons X puisque elle obéit à la loi de Bragg,

$$2d \sin\theta = n\lambda_{Bragg}$$

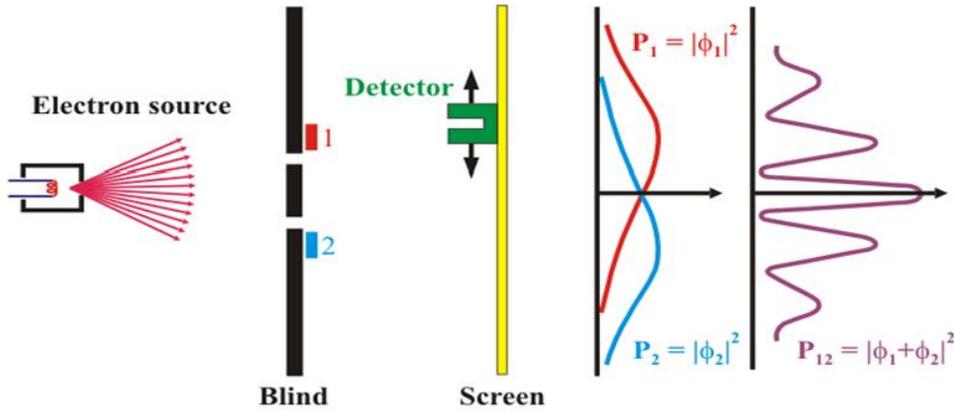
- Or, l'onde de matière associée à ces électrons est,

$$\lambda_{Broglie} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e|e|U}}$$

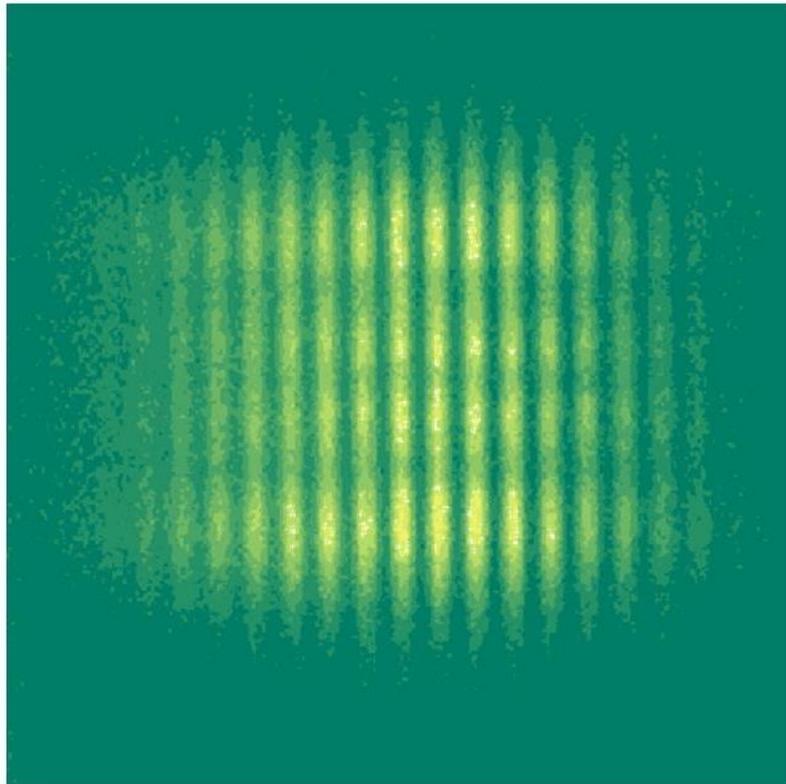
- ils ont montré que: $\lambda_{Broglie} \approx \lambda_{Bragg}$

2 – Interférences des e⁻

- L'interférence des électrons a été aussi prouvée expérimentalement à l'aide des fentes de Young:



- **Ces ondes de matière de De Broglie sont bien une réalité physique**



Conclusion

- La dualité onde-corpuscule est un concept quantique auquel obéissent tous les objets atomiques et subatomiques (photon, e^- , atome,...)
- ➔ • En 1927, Bohr a présenté une interprétation de cette dualité en introduisant,
- Le "principe de complémentarité" qui stipule que :
 - Un objet quantique ne peut se manifester que sous un seul de ses 2 aspects ondulatoires

➤ Diffraction, Interférence:

- Seul l'aspect ondulatoire est mis en évidence.

➤ Effets photoélectrique, Compton :

- Seul l'aspect corpusculaire est mis en évidence.

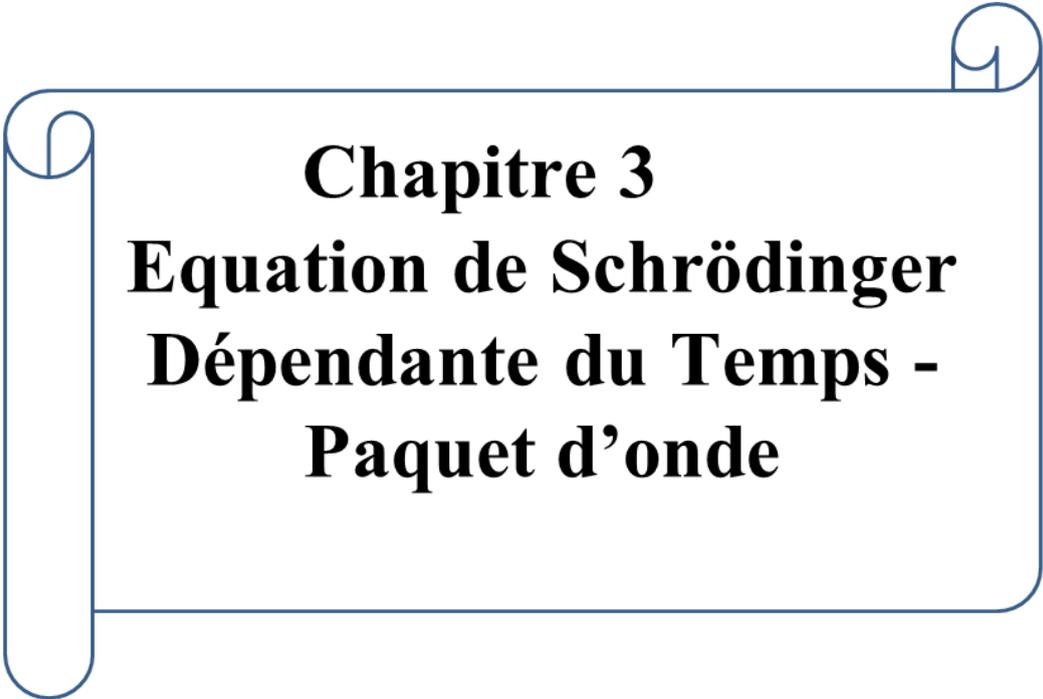


➔ Naissance de la physique quantique

↔ Etude Théorique des 2 aspects:
ondulatoire et corpusculaire

Partie II

Fonction d'onde et
Equation de Schrödinger



Chapitre 3
Equation de Schrödinger
Dépendante du Temps -
Paquet d'onde

I - Fonction d'onde

- Pour décrire l'onde de matière associée à une particule en mouvement,
 - on introduit une fonction réelle ou complexe de variables réelles (spatiales x, y, z et du temps t)
 - $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(x, y, z, t)$; appelée **fonction d'onde**
 - $\Psi(\vec{r}, t)$ décrit l'état physique de la particule.

↔ *Elle contient toutes les informations sur l'état dynamique de la particule.*

1 - Interprétation Physique de la Fonction d'Onde

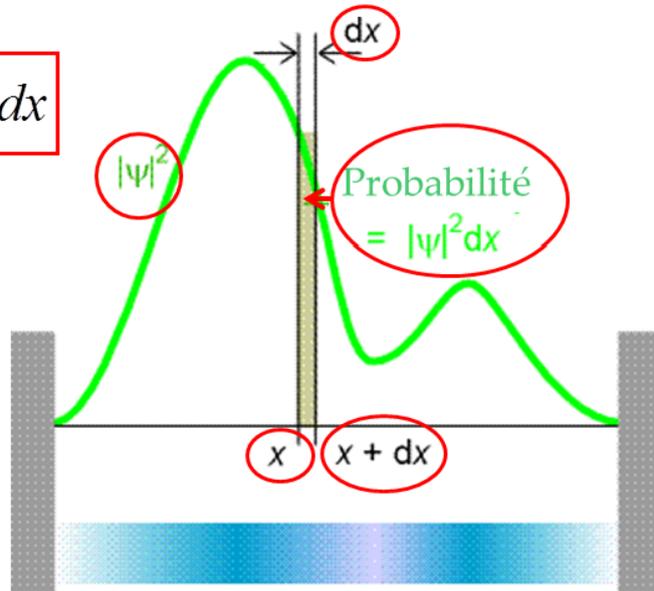
- Max Born a introduit une interprétation statistique **du carré du module de la fonction d'onde** /
- La **Densité de Probabilité de présence** de la particule en x à l'instant t est

$$|\Psi(x, t)|^2 = \Psi(x, t) \Psi^*(x, t)$$

$\Psi(x, t)$: fonction d'onde à 1 dimension (OX)

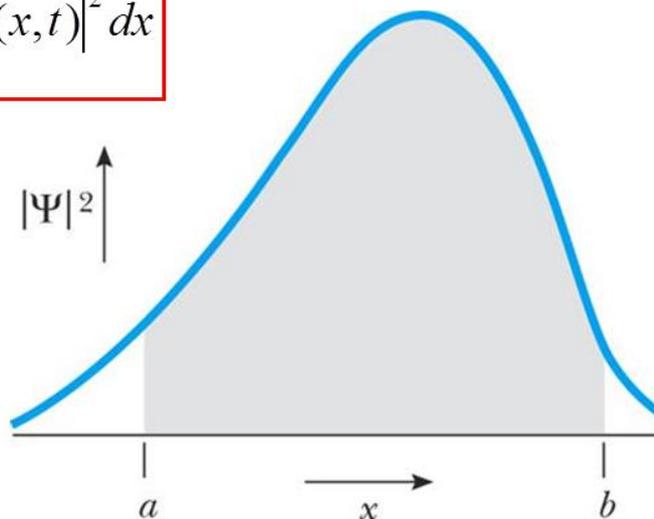
- La Probabilité de trouver la particule dans un point compris entre x et $x + dx$ à un instant t est:

$$dPr(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 dx$$



- **Probabilité de trouver la particule à l'instant t à une position : $a \leq x \leq b$**

$$Pr(a \leq x \leq b, t) = \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx$$



© 2005 Brooks/Cole - Thomson

Condition de Normalisation de $\Psi(x,t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$$

• Probabilité de présence de la particule à une position $-\infty < x < +\infty$

↔ Probabilité de l'événement certain de trouver la particule à une position x dans tout l'espace

• La fonction d'onde $\Psi(x, t)$ est dite normalisée

❖ Si la Condition de Normalisation n'est pas satisfaite,

➡ On a 2 cas :

❖ 1^{er} cas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx \rightarrow \infty$$

• On dit que $\Psi(x,t)$ n'est pas de carré sommable.

• $\rightarrow \Psi(x,t)$ ne peut servir de fonction d'onde.

❖ 2^{ème} cas: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = I$ (I réel positif)

• $\Psi(x,t)$ est dite de carré sommable

→ On peut construire une fonction d'onde $\varphi(x,t)$:

• $\varphi(x,t) = N \Psi(x,t)$ qui satisfait à la Cdt. de Norm.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x,t)|^2 dx = |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1 \quad \text{où } N \in \mathbb{C}$$

➡ $|N| = \frac{1}{\sqrt{I}}$ ➡ $N = \frac{1}{\sqrt{I}} e^{i\theta}$ où $\theta = \text{Arg}(N)$

➡ $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{I}} e^{i\theta} \psi(x,t)$ est bien normée

• $e^{i\theta}$ est un facteur de phase qui ne joue aucun rôle dans les quantités physiques ($|e^{i\theta}| = 1$)

• Car les grandeurs physiques «Densités de Probabilité de présence»

$$|\varphi(x,t)|^2 = \frac{1}{I} |\psi(x,t)|^2 \quad \text{n'en dépendent pas.}$$

• Une fonction d'onde est toujours déterminée à un facteur de phase près

• Une détermination réelle de la constante de Normalisation $N = \frac{1}{\sqrt{I}}$ ($\theta = 0$) est bien suffisante

II - Equation de Schrödinger Dépendante du Temps (E.S.D.T)

- C'est une équation d'onde qui permet d'étudier l'évolution de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ qui décrit l'état physique de la particule en mouvement.
- L'E.S.D.T est une équation différentielle linéaire et du 1^{er} ordre en t.
- L'E.S.D.T doit obéir aux trois principes.

1 - Principe d'évolution :

(L'E.S.D.T est du 1^{er} ordre en t)

- La connaissance de $\Psi(x,t_0)$ à un instant initial t_0 permet la détermination de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$, à un facteur de phase près, à tout instant $t > t_0$.

2 - Principe de Superposition :

(L'E.S.D.T est linéaire en x et en t)

- Toute combinaison linéaire des solutions de l'E.S. est aussi une solution.
 - En effet,
 - Si $\varphi_1(x,t)$ et $\varphi_2(x,t)$ sont des solutions
 - alors, $\Psi(x,t) = \alpha \varphi_1(x,t) + \beta \varphi_2(x,t)$ est une solution aussi.
- où α et β sont des nombres complexes.

3 - Principe de Correspondance :

- Il postule que: à une grandeur physique classique on associe un Opérateur qui agit sur les fonctions d'onde /

$$M \cdot C \rightarrow M \cdot Q$$

$$\textit{Position} : \quad x \rightarrow \hat{x}$$

$$\textit{Impulsion} : \quad \vec{P} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \quad (\text{à 1 dim.}) \quad p_x \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\textit{Energie totale} : \quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\textit{Energie cinétique} : \quad E_c = \frac{P^2}{2m} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$E = \frac{P^2}{2m} + V(x) \longrightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

Hamiltonien

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

✓ C'est l'E.S.D.T .

- La résolution de l'E.S.D.T fournit un ensemble de solutions mathématiques.
- Mais, les propriétés exigées pour les fonctions d'onde ne permettent de retenir que les solutions physiques compatibles avec le problème étudié.

III - Cas d'une Particule Libre (P.L.)

- C'est une particule qui n'est soumise à aucun potentiel extérieur / $V(x) = 0$
- Son **énergie totale est purement cinétique**

$E = E_c = \frac{P^2}{2m}$

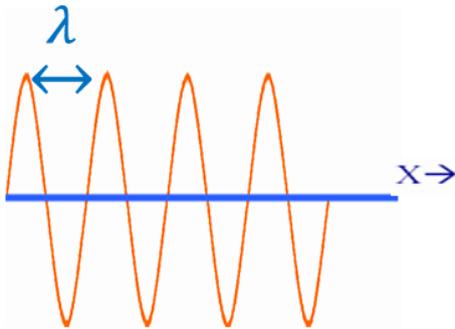
- Elle obéit à l'E.S.D.T. particulière:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

➤ Onde Plane Monochromatique (O.P.M)

- C'est une solution de l'E.S.D.T particulière et simple obtenue par analogie à l'équation d'onde classique des ondes électromagnétiques /

$$\varphi_p(x, t) = A e^{-i(\omega t - kx)} = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - Px)}$$



Relations de De Broglie

$$E = \hbar\omega \text{ et } P = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda}$$

❖ Mais, l'O.P.M est-elle Une Solution Acceptable?

- Or, la **Densité de Probabilité de présence** est :

$$|\varphi_p(x, t)|^2 = |A|^2$$

➡ • La **probabilité de présence** est donnée par:

$$\text{Pr} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_p|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 dx \rightarrow \infty$$
➡

• la **particule est non localisée**

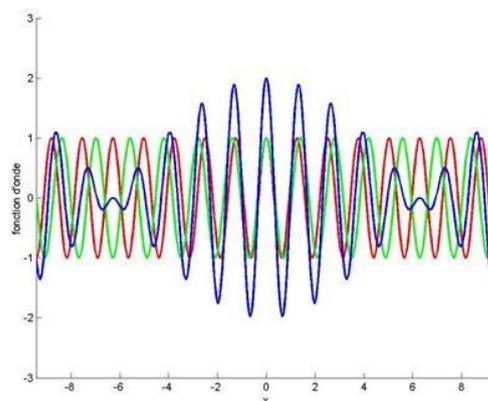
- L'O.P.M n'est pas de carré sommable,
- ➡ • donc, elle ne peut servir de fonction d'onde.

- Application de Principe de Superposition

- l'O.P.M est une solution de l'E.S.D.T mais elle ne peut pas décrire un état physique de la P.L.
- Or, d'après le Principe de Superposition :
- Toute Superposition linéaire des O.P.M (qui sont des solutions de l'E.S.D.T.)
- Est aussi une Solution de l'E.S.D.T.

- Exemples de superpositions d'O.P.M

- Superposition de 2 O.P.M



- Superposition de 3 O.P.M

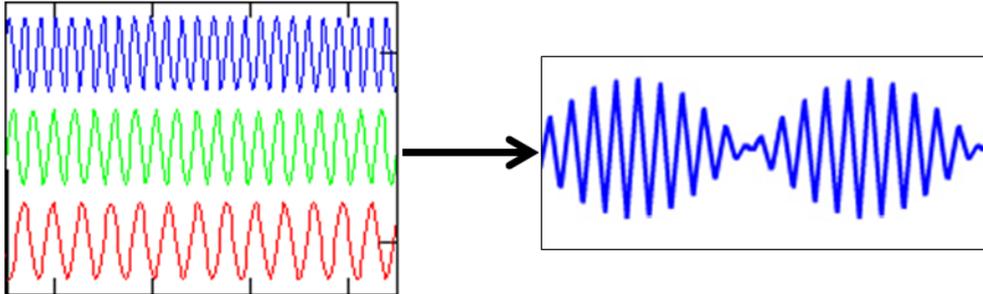


Fig 42

- **N.B. :** Ces O.P.M ont de longueurs d'onde ou fréquences très voisines

IV - Paquet d'Ondes Libres (P.O.L.)

- Un P.O.L. est une Superposition d'une infinité d'O.P.M. ($\varphi_p(x,t)$) de toutes les longueurs d'onde λ ($= \frac{h}{p}$) (ou fréquences) possibles.
- Il est défini comme,

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) \varphi_p(x, t) dp$$

- ✓ $A(p)$ est l'amplitude de l'O.P.M. $\varphi_p(x, t)$
- ✓ Les O.P.M. $\varphi_p(x, t)$ sont appelées :
Composantes du P.O.L

- Un P.O. s'exprime d'une manière explicite sous la forme:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - Px)} dp$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}(p,t) e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp$$

L'O.P.M.
 $\varphi_p(x, t)$

✓ La fonction : $\bar{\Psi}(p,t) = f(p) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

est, par définition, la **Transformée de Fourier (T.F.)** de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$.

Or, la T.F. est défini par:

$$\bar{\Psi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,t) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx$$

• à t=0 $\bar{\Psi}(p,0) = f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,0) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx$



• L'amplitude $f(p)$ est égale à la T.F de $\Psi(x,0)$ à l'instant t=0

La T.F. obéit à l'égalité de Parseval-Plancherel

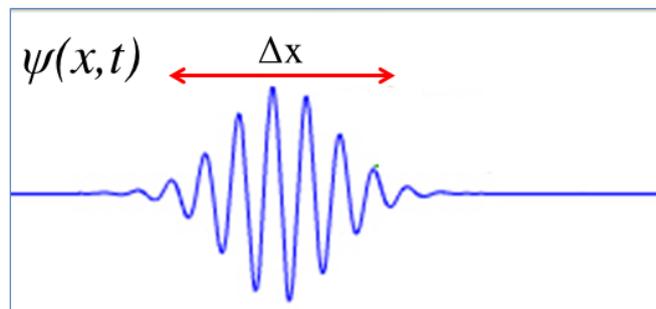
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{\Psi}(p,t)|^2 dp = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(p)|^2 dp = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,0)|^2 dx$$

- Si $\bar{\Psi}(p, t)$ est normée alors $\Psi(x, t)$ l'est aussi, et inversement, et ce à tout instant t ;
- la norme est conservée dans le temps.

D'après cette propriété;
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(p)|^2 dp$$

- La construction d'un P.O. consiste, donc, à choisir l'amplitude $f(p)$ en une fonction de carré sommable et normalisée.
- La fonction d'onde résultante $\psi(x, t)$ est, alors aussi, normalisée à tout instant t .

Le P.O. $\psi(x, t)$ est, donc, une superposition linéaire d'O.P.M qui interfèrent destructivement en dehors d'une région bien localisée de l'espace : **de largeur Δx**



Le P.O.L peut bien décrire bien l'état physique de la Particule Libre (P.L).

1 - Vitesse de Phase

- C'est la vitesse de propagation des plans équi-phases de l'onde progressive
= vitesse de propagation de chaque O.P.
 $Ae^{-i(\omega t - kx)}$, composant le P.O., qui est caractérisée par le nombre d'onde k et la pulsation ω
- La phase $\varphi = \omega t - kx$ / $d\varphi = 0 \iff \omega dt - k dx = 0$
- **La vitesse de phase** est définie par: $V_\varphi = \frac{\omega}{k}$
- Une comparaison de la célérité des ondes
 - électromagnétiques : $c = \lambda \nu$ «Rayonnement»
 - de matière : $V_\varphi = \lambda \nu$ « Matière »

2 - Vitesse de groupe

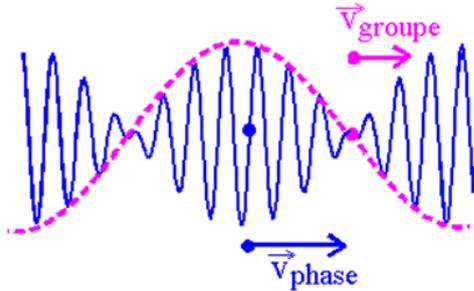
- C'est la vitesse de propagation du maximum central du P.O., elle est définie par la relation:

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}$$

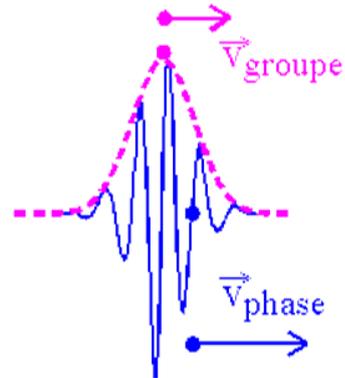
- Cas d'un P.L. : $E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow V_g = \frac{p}{m} = V$
- Ce résultat est général; la vitesse de groupe est égale à la vitesse de la particule. (T.D)
- La Dualité O.C est manifeste : $V_g = V$

Comparaison entre V_g et V_ϕ

- Superposition de 2 O.P.M



- Paquet d'ondes



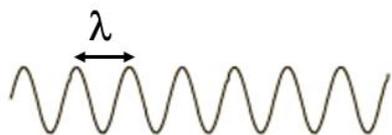
Les 2 vitesses V_g et V_ϕ sont liées par la relation :

$$V_g \cdot V_\phi = c^2 \quad (\text{T.D})$$

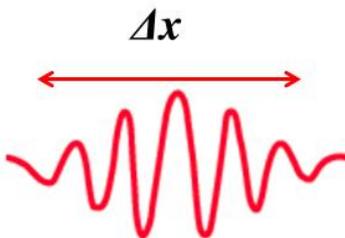
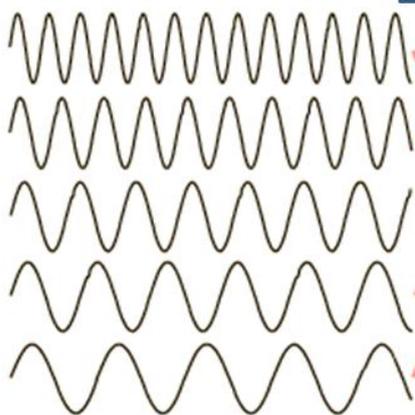
V - Principe d'Incertainde de Heisenberg (P.I.H)

- On a vu pour qu'une particule soit localisée, il fallait superposer un nombre infini d'O.P.M.
- Or, chaque O.P est caractérisée par une impulsion p (ou λ) possible de la particule,
- Inversement, si l'on considère une seule O.P associée à la particule, son impulsion p est bien connue, mais sa position se retrouve indéfinie car l'onde est délocalisée.

Illustration



▪ **O.P.M :** $p = \hbar k = h/\lambda$
 ✓ p est connue avec précision
 Δp est faible ($\neq 0$)
 ✓ Mais x indéfinie $\Delta x = \infty$



▪ **Paquet d'ondes :**
 ✓ Δx est précise
 ✓ mais Δp non

Fig 45

➤ • le P.I.H stipule qu'il est impossible de connaître simultanément avec précision la position x et l'impulsion p d'une particule quantique.

• Son expression mathématique est donnée par la Relation d'Incertitude de Heisenberg (R.I.H):

Incertitude absolue sur la mesure de la position

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Incertitude absolue sur la mesure de l'impulsion

- Dans la R.I.H., x et p ont des rôles symétriques;
- On les appelle : Variables Conjuguées.

• La symétrie entre ces grandeurs conjuguées est une conséquence du «Principe de complémentarité» de la dualité onde-corpuscule en M.Q.,.

• **Illustration:** Considérons une particule au repos et mesurons sa position x avec une incertitude Δx :

• à partir de la R.I.H $\Rightarrow \Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x}$

• c-à-d la simple mesure de la position d'une particule au repos ($p=0$) lui a communiqué un mouvement d'impulsion au moins égale à $\frac{\hbar}{\Delta x}$.

157

❖ Conséquences de La R.I.H. :

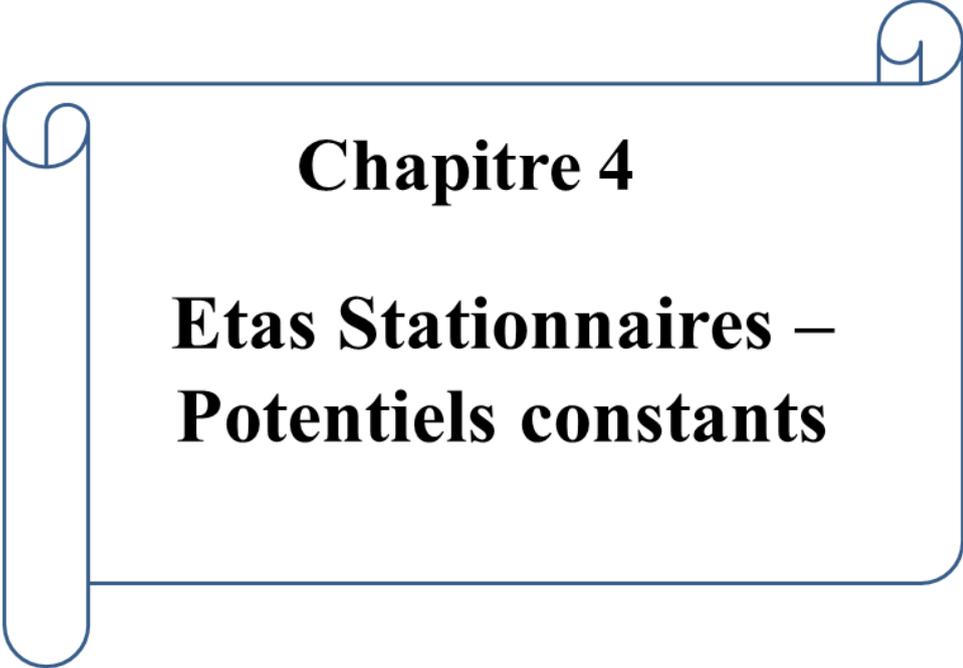
• Mesurer c'est Perturber en M.Q.

• La notion de trajectoire perd son sens en M.Q. ;
• elle est remplacée par la notion de fonction d'onde, de nature probabiliste, qui décrit l'état quantique.

• L'état quantique, perturbé par la simple mesure des grandeurs associées au système, est aussi de nature probabiliste.

❖ *Conclusion*

- En M.Q., la théorie des ondes de matière présente un problème d'indéterminisme vue son interprétation probabiliste lui aussi lié au P.I.H.
 - La M.Q. n'obéit pas au principe de causalité au sens classique
 - Mais, elle obéit au principe d'évolution, au sens quantique, que doit satisfaire l'E.S. ;
- ✓ Si on connaît $\Psi(x, t_0)$ on peut déterminer de façon unique (à un facteur de phase près) $\Psi(x, t)$.



Chapitre 4

Etas Stationnaires – Potentiels constants

Introduction : - E.S.D.T

- Soit une particule en mouvement d'impulsion P , soumise à un potentiel $V(x,t)$, d'énergie totale E et elle est décrite par une fonction d'onde $\Psi(x,t)$.
- D'après le principe de correspondance :
$$E = \frac{P^2}{2m} + V(x,t) \rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi$$
- L'opérateur :
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$$
est appelé Hamiltonien du système
- L'E.S.D.T s'écrit alors :
$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

161

I - Etats stationnaires

- Lorsqu'une particule est soumise à un potentiel indépendant du temps $V(x)$,
 - Les solutions de l'E.S. sont dites des solutions stationnaires.
 - Le système est dit conservatif et son énergie totale E est une constante.

• Soit $\Psi(x, t)$ une solution stationnaire de l'E.S.D.T

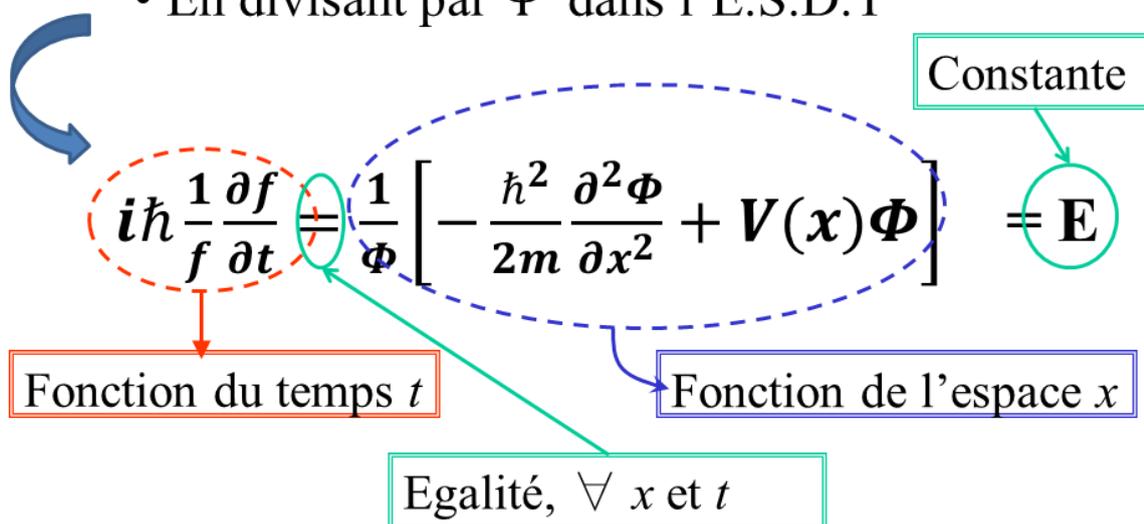
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = H\psi$$

• Dans ce cas, l'évolution en t et en x sont indépendantes et on peut faire, donc, une séparation des variables spatiale et temporelle.

• La fonction d'onde stationnaire peut s'écrire,

$$\Psi(x, t) = \Phi(x) \cdot f(t)$$

• En divisant par Ψ dans l'E.S.D.T



• On obtient deux équations différentielles indépendantes : une équation en x et une autre en t.

- Le terme dont la dépendance en x s'écrit alors,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + V(x) \Phi(x) = E \Phi(x)$$

Energie de la particule

- C'est l'équation de Schrödinger Indépendante du Temps (E.S.I.T), qui s'écrit aussi comme :

$$H \Phi(x) = E \Phi(x) \quad \text{dite équation aux valeurs propres}$$

- Où E est la valeur propre ou énergie propre de H .
- $\Phi(x)$ est la fonction propre ou état propre de H .

- Alors que, le terme dont la dépendance en t s'écrit;

$$i\hbar \frac{df(t)}{dt} = E dt$$

- C'est une équation différentielle au 1^{er} ordre qui admet comme solution,

$$f(t) = N e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

N : une constante d'intégration

- ➔ • La fonction d'onde stationnaire s'exprime comme,

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = N \Phi(\mathbf{x}) \cdot e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

- *La densité de probabilité de présence est:*

$$|\Psi(x, t)|^2 = |\Phi(x)|^2$$

- *elle est donc indépendante du temps*

- $\Phi(\mathbf{x})$ qui est une solution de l'E.S.I.T décrit bien l'état stationnaire de la particule.

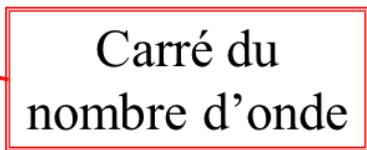
II - Cas d'un Potentiel Constant

- On va étudier des cas particuliers d'un potentiel constant $V(x)=V=Cte$. L'E.S.I.T. s'écrit comme,

$$\Phi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \Phi(x) = 0$$

- C'est une équation différentielle au 2^{ème} ordre à coefficients constants dont la résolution mathématique est connue suivant le signe de $(E-V)$
- Mais, il ne faut choisir que les solutions physiques compatibles avec le problème étudié.

- **Cas où $E > V \rightarrow (E - V) = E_C > 0$ ($\exists \rightarrow$ M.C)**

 $\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) = \frac{2m}{\hbar^2} E_c = \frac{P^2}{\hbar^2} = k^2$ 

- L'E.S.I.T s'écrit: $\Phi''(x) + k^2 \Phi(x) = 0$
- Cette équation admet deux **solutions complexes** linéairement indépendantes: e^{ikx} et e^{-ikx}
- La solution générale: $\Phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$
A et B : constantes d'intégration à déterminer.

N.B.: La forme de solution est la même pour une P.L. ($V=0$). La seule différence est: $E = E_C = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

- **Cas où $E = V \rightarrow E_C = 0 \rightarrow P = 0$**
- \rightarrow La particule est au repos
- \rightarrow Aucune onde de matière ne lui est associée
- \rightarrow la fonction d'onde est nulle dans ce cas.
- En effet, dans ce cas l'E.S.I.T s'écrit :

$\Phi''(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \Phi'(x) = cte = 0$

 $\Phi(x) = cte = 0$

- Cas où $E < V \Rightarrow \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) = \frac{2m}{\hbar^2} E_c = -q^2 < 0$
- $E_c = \frac{1}{2} m v^2 < 0 \Rightarrow v \in i\mathbb{R}$ (pas d'analogie en M.C)
- L'E.S.I.T s'écrit :

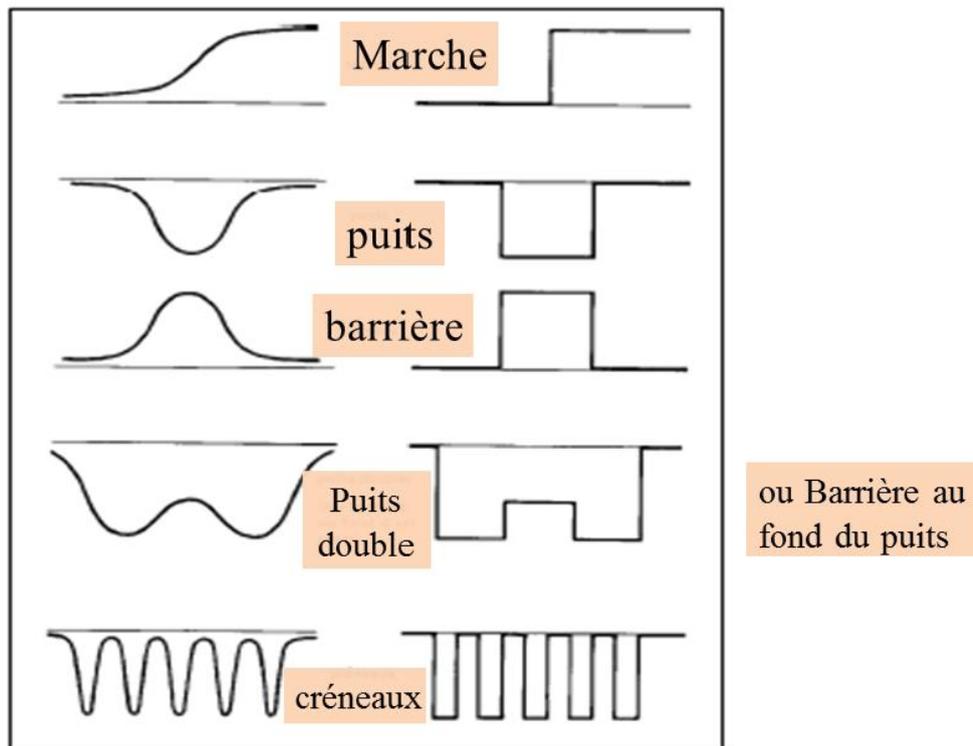
Ce n'est pas un nombre d'onde

$$\Phi''(x) - q^2 \Phi(x) = 0$$

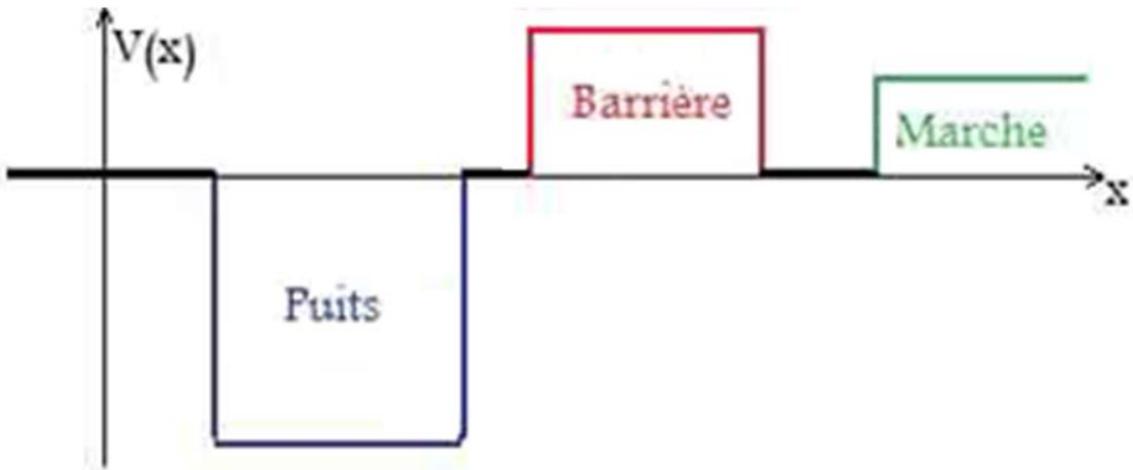
- Elle admet deux **solutions réelles** linéairement indépendantes : e^{qx} et e^{-qx}
- dont il faut **étudier la convergence**.
- La solution générale est: $\Phi(x) = A e^{qx} + B e^{-qx}$
A et B : Constantes d'intégration.

III - Exemples de Potentiels

Constants

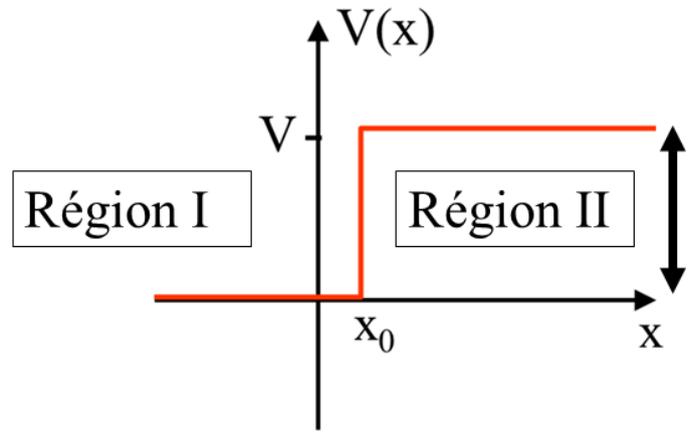


Potentiels typiques et leurs modèles en "paliers"



- Schéma présentant des allures simples de trois cas de potentiels constants

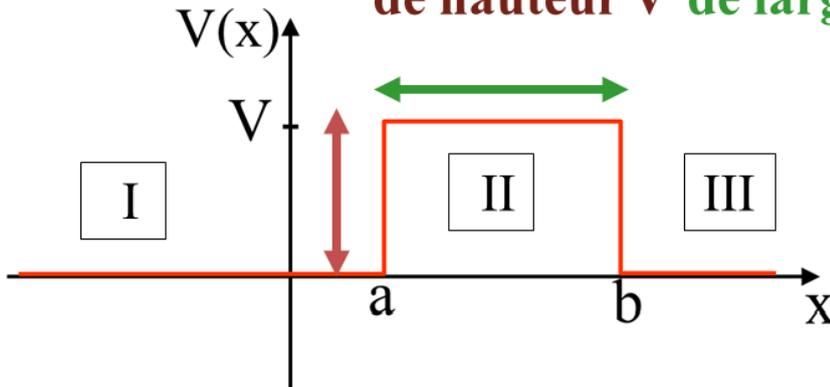
Marche de potentiel (de hauteur V)



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < x_0 & \text{Région I} \\ V & \text{pour } x > x_0 & \text{Région II} \end{cases}$$

Barrière de potentiel

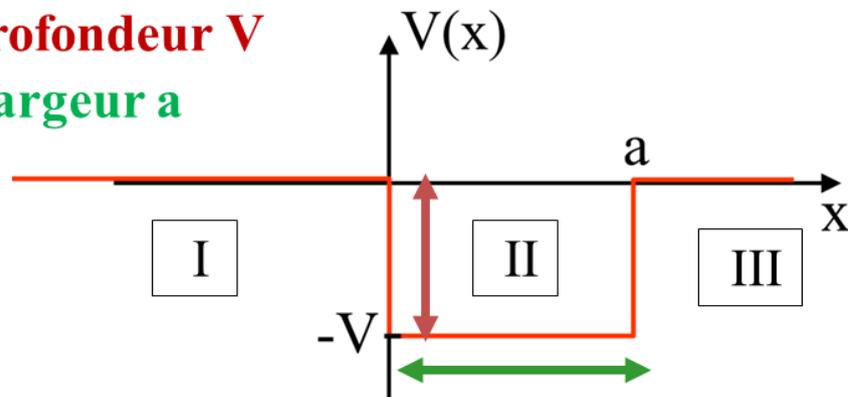
de hauteur V de largeur $(b - a)$



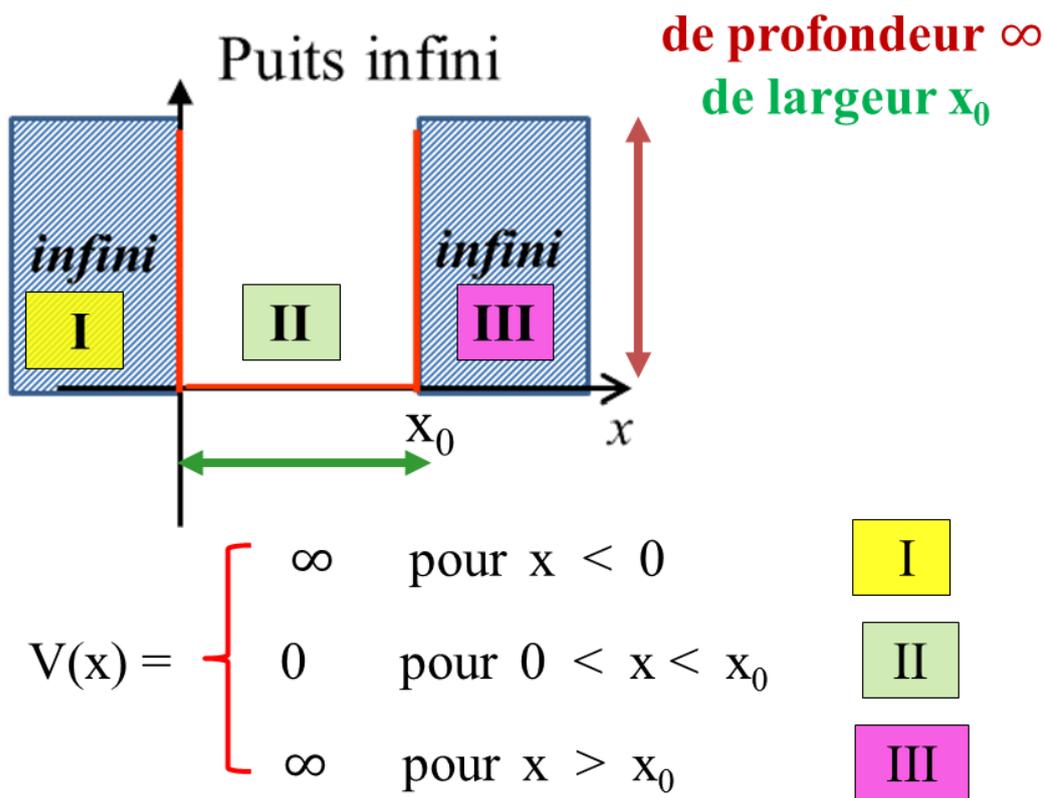
$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a & \text{Région I} \\ V & \text{pour } a < x < b & \text{Région II} \\ 0 & \text{pour } x > b & \text{Région III} \end{cases}$$

- Puits de potentiel

de profondeur V
de largeur a



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 & \text{Région I} \\ -V & \text{pour } 0 < x < a & \text{Région II} \\ 0 & \text{pour } x > a & \text{Région III} \end{cases}$$



IV - Méthode de résolution quantique

- 1- On décompose le domaine de x en sous-domaines (régions) où le potentiel reste constant.
- 2- On écrit l'E.S.I.T. en chacune des régions ainsi que les solutions mathématiques correspondantes

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x), & (1) \\ \Phi_2(x), & (2) \\ \Phi_3(x), & (3) \end{cases}$$

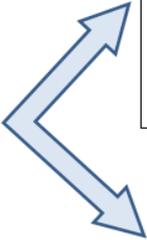
- Pour le puits et la barrière

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x), & (1) \\ \Phi_2(x), & (2) \end{cases}$$

- Pour la marche

3- On identifie les différents termes des solutions dans chacune des régions: les O.P.M et les ondes évanescentes (o.e)

- Ensuite, on élimine les composantes non physiques de la solution;



Par analogie optique (onde incidente, réfléchi, transmise) dans le cas des O.P.M (termes complexes de la solution)

Par les conditions de convergence pour les o.e (termes réels de la solution)

4- Conditions de raccordement:

- La fonction d'onde et sa dérivée doivent être continues aux points de discontinuité du potentiel fini c-à-d aux points de changement de régions.
- Dans le cas du potentiel infini seule la fonction d'onde est continue; sa dérivé n'est pas continue.

5- On détermine les différentes constantes d'intégration (amplitudes) en fonction de l'une parmi ces amplitudes supposée connue (en général, en fonction de l'amplitude de l'onde incidente)

6- Détermination des coefficients de Réflexion **R** et de Transmission **T** :

▪ Une onde plane peut être représentée par un flux de particules et les rapports entre ces flux permet de déterminer **R** et **T**.

▪ En effet, le nombre de particules par unité de temps, qui passe en un point **x**, est donné par le courant de probabilité défini par :

$$J = v_g |\Phi|^2 = \frac{\hbar k}{2m} |\Phi|^2 \quad \text{où } v_g: \text{ vitesse de groupe}$$

- Le courant de probabilité est conservé:

$$v_{gi} |\Phi_i|^2 = v_{gr} |\Phi_r|^2 + v_{gt} |\Phi_t|^2$$

- les coefficients **R** et **T** sont définis par :

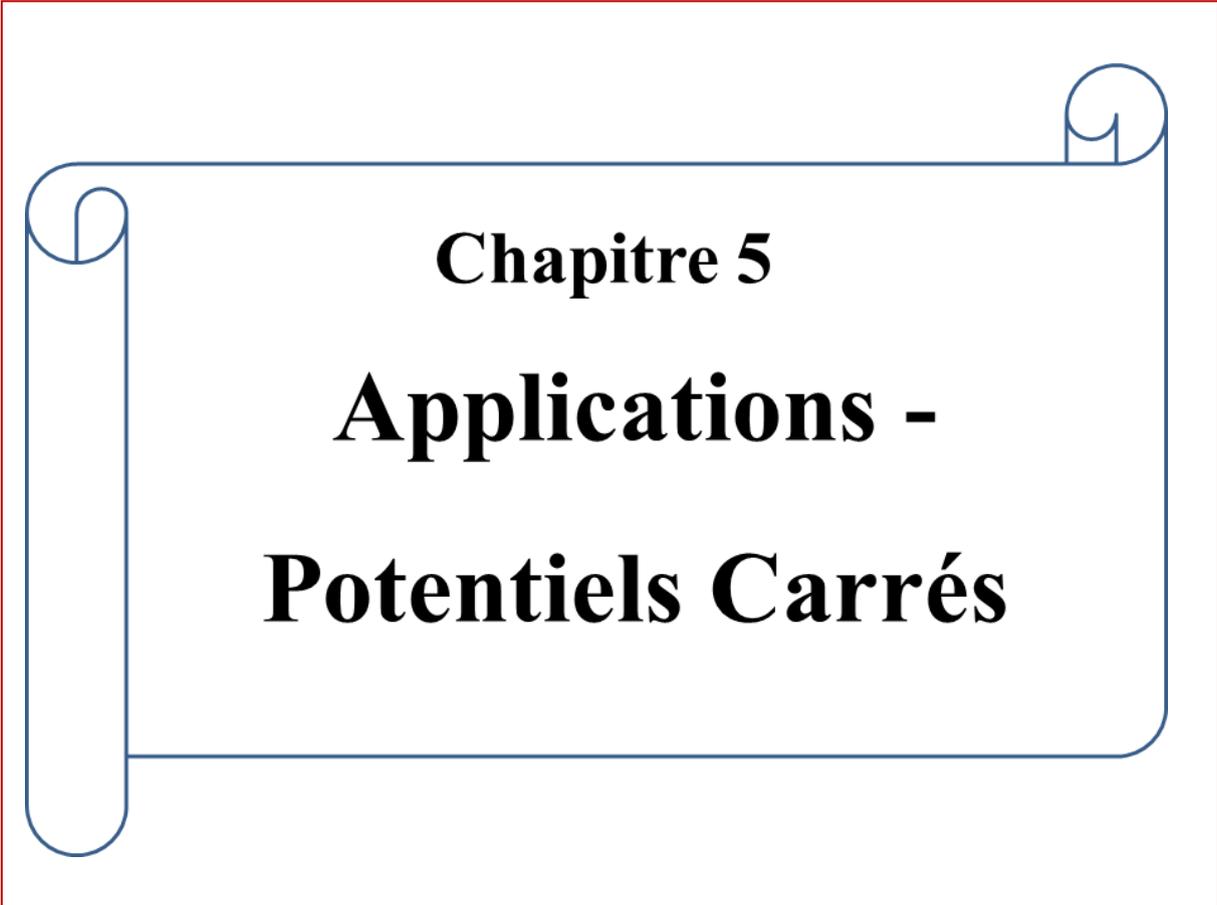
$$R = \frac{|\Phi_r|^2}{|\Phi_i|^2}$$

$$T = \frac{|\Phi_t|^2}{|\Phi_i|^2} \frac{k_t}{k_i}$$



$$R + T = 1$$

- Cette relation exprime aussi la conservation de l'énergie incidente: l'onde incidente ne peut être que réfléchié ou/et transmise.



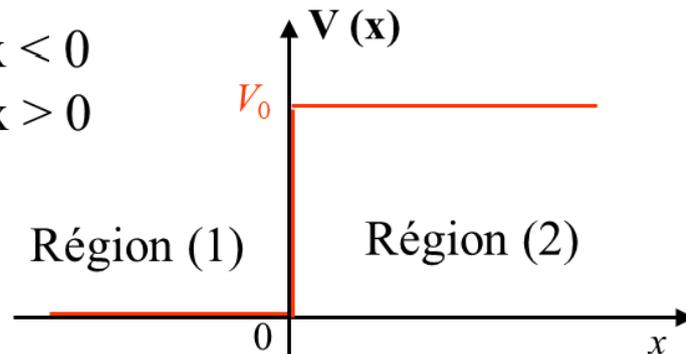
Chapitre 5
Applications -
Potentiels Carrés

A - Marche de potentiel

- Soit une particule “incidente” d’énergie E venant des x négatifs et se dirigeant vers les x positifs.
- Cette particule rencontre en $x = 0$ une marche de potentiel donnée par :

- $V(x) = 0$ pour $x < 0$
- $V(x) = V_0$ pour $x > 0$

On a 2 Régions :



On écrit et on résolve l’E.S.I.T. ➔

➔ **1^{er} cas : $E > V_0$**

- **Région (1) : $V = 0$**
($E = E_C$)

$$\Phi_1'' + k_1^2 \Phi_1 = 0$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{P_1^2}{\hbar^2}$$

k_1 : le nombre d’onde dans la région (1)

- La solution est :

$$\Phi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$

- **Région (2) : $V = V_0$**

$$\Phi_2'' + k_2^2 \Phi_2 = 0$$

$$k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} = \frac{P_2^2}{\hbar^2}$$

k_2 : le nombre d’onde dans la région (2)

- La solution est:

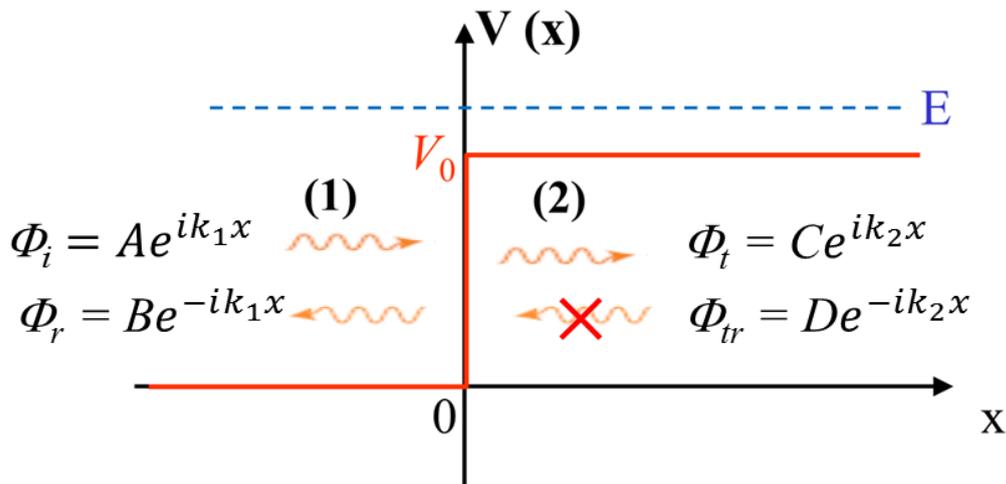
$$\Phi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$$

1- Identification des différents termes de la solution dans les 2 régions :

- Par analogie optique

- Dans la région (1) , on assimile les O.P.M.
 - Ae^{ik_1x} : *onde incidente* (sens des x positifs)
 - Be^{-ik_1x} : *onde réfléchie* (sens des x négatifs)
- Dans la région (2) , on assimile les O.P.M.
 - Ce^{ik_2x} : *onde transmise après la traversé de la marche de potentiel* (sens des x positifs)
 - De^{-ik_2x} : *onde réfléchie après transmission* (sens des x négatifs)

2- Elimination des termes non physiques:



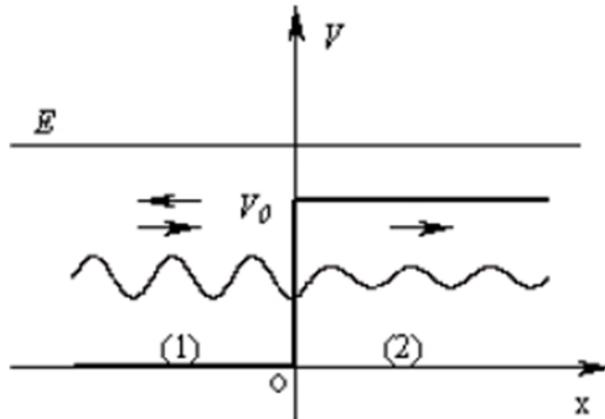
• De^{-ik_2x} : Cette O.P.M n'a pas d'existence physique

• Car il n'y a pas d'obstacle dans la région (2)

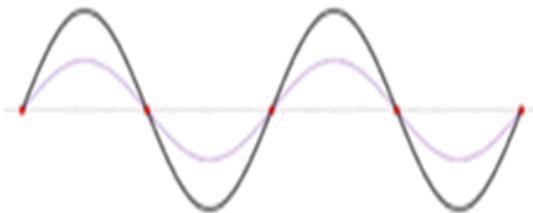
($x > 0$) $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \Phi_{tr} = 0$

- La solution globale s'écrit dans ce cas :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & \text{Région (1)} \\ & \text{Onde stationnaire} \\ \Phi_2(x) = Ce^{ik_2x} & \text{Région (2)} \\ & \text{Onde progressive} \end{cases}$$

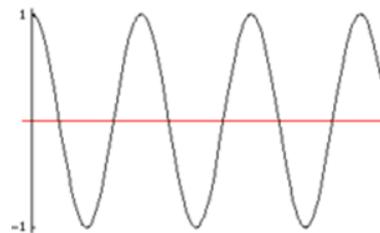


- **Onde Stationnaire (O.S).**



- C'est une onde qui oscille sur place; elle peut être obtenue par superposition d'une onde incidente et une onde réfléchie.

- **Onde Progressive (O.P)**



- C'est une onde qui progresse dans l'espace.

3- Conditions de Raccordement en $x = 0$: (point de discontinuité du potentiel)

➤ Dans ce cas le potentiel est fini

• Au point de passage de la région (1) vers la région (2), la fonction d'onde et sa dérivé sont continues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(0) = \Phi_2(0) \\ \Phi'_1(0) = \Phi'_2(0) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B = C \\ ik_1(A - B) = ik_2 C \end{array} \right.$$

• Après avoir exprimé les constantes d'intégration (ou amplitudes) B et C en fonction de l'une parmi elles (l'amplitude A)

• On obtient :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x) = A \left\{ e^{+ik_1 x} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-ik_1 x} \right\} & \text{Région (1)} \\ \Phi_2(x) = A \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{ik_2 x} & \text{Région (2)} \end{cases}$$

4-Détermination des coefficients de Réflexion R et de Transmission T:

$$R = \frac{|\Phi_r|^2}{|\Phi_i|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad T = \frac{|\Phi_t|^2}{|\Phi_i|^2} \frac{k_2}{k_1} = \frac{|C|^2}{|A|^2} \frac{k_2}{k_1}$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}} \right)^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{4k_1^2}{(k_1 + k_2)^2} \Rightarrow R + T = 1$$

- L'énergie incidente est conservée:
- Elle est partagée en 2 parties: énergie réfléchie et énergie transmise.

193

2^{ème} cas : $0 < E < V_0 \rightarrow (E - V_0) < 0$

- **Région (1) : $V = 0$**

$$\varphi_1'' + k_1^2 \varphi_1 = 0$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{P_1^2}{\hbar^2}$$

k_1 : le nombre d'onde dans la région (1)

- La solution est :

$$\varphi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$

- **Région (2) : $V = V_0$**

$$\varphi_2'' - q^2 \varphi_2 = 0$$

$$q^2 = \frac{-2m(E - V_0)}{\hbar^2}$$

q : n'est pas un nombre d'onde

- La solution est réelle:

$$\varphi_2(x) = Ce^{qx} + De^{-qx}$$

• **Analogie optique dans la Région (1) :**

$\varphi_i(x) = Ae^{ik_1x}$: onde incidente

$\varphi_r(x) = Be^{-ik_1x}$: onde réfléchie

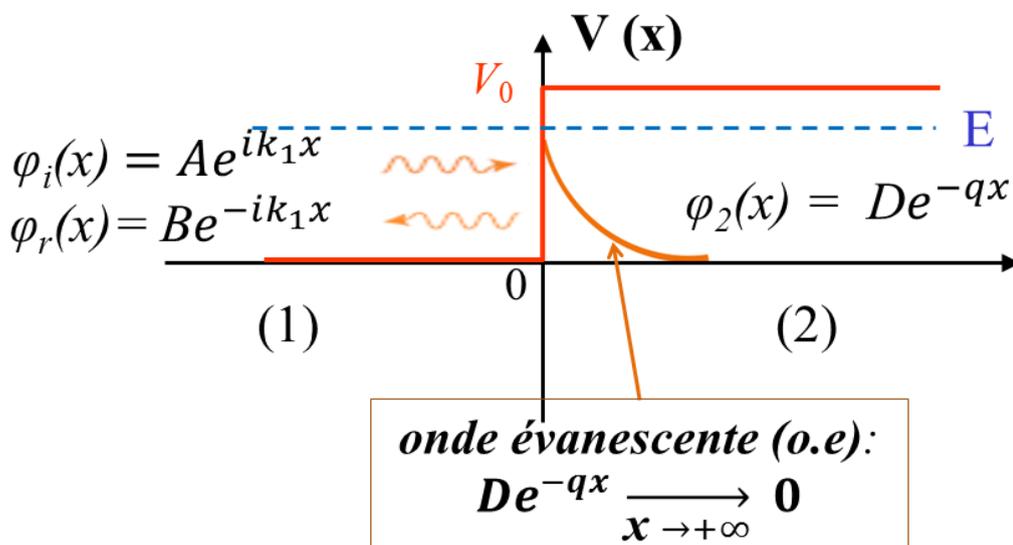
→ $\varphi_1(x) = \varphi_i(x) + \varphi_r(x)$

• **Région (2) : la solution est réelle on étudie la convergence de chaque terme pour $x > 0$;**

➤ **Ce^{qx}** : la particule se dirige vers les x positifs quand $x \rightarrow +\infty$; $e^{qx} \rightarrow +\infty$: **solution non physique** la fonction d'onde doit être bornée → **$C = 0$**

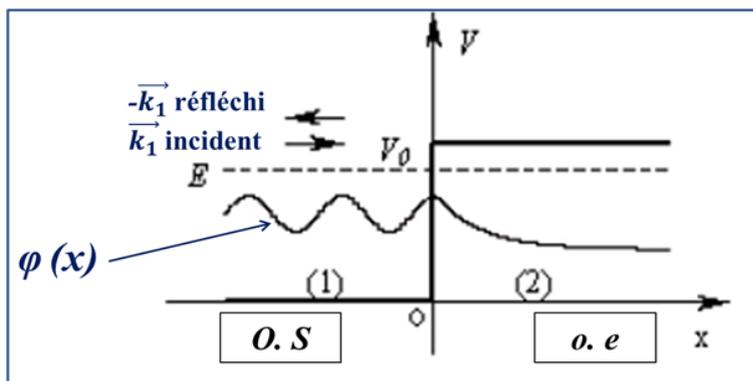
➤ **De^{-qx}** : ce terme **est convergent** quand $x \rightarrow +\infty$ (e^{-qx} diverge qd $x \rightarrow -\infty$; mais $-\infty \notin$ région (2))

- cette **solution est physique** → $\varphi_2(x) = De^{-qx}$

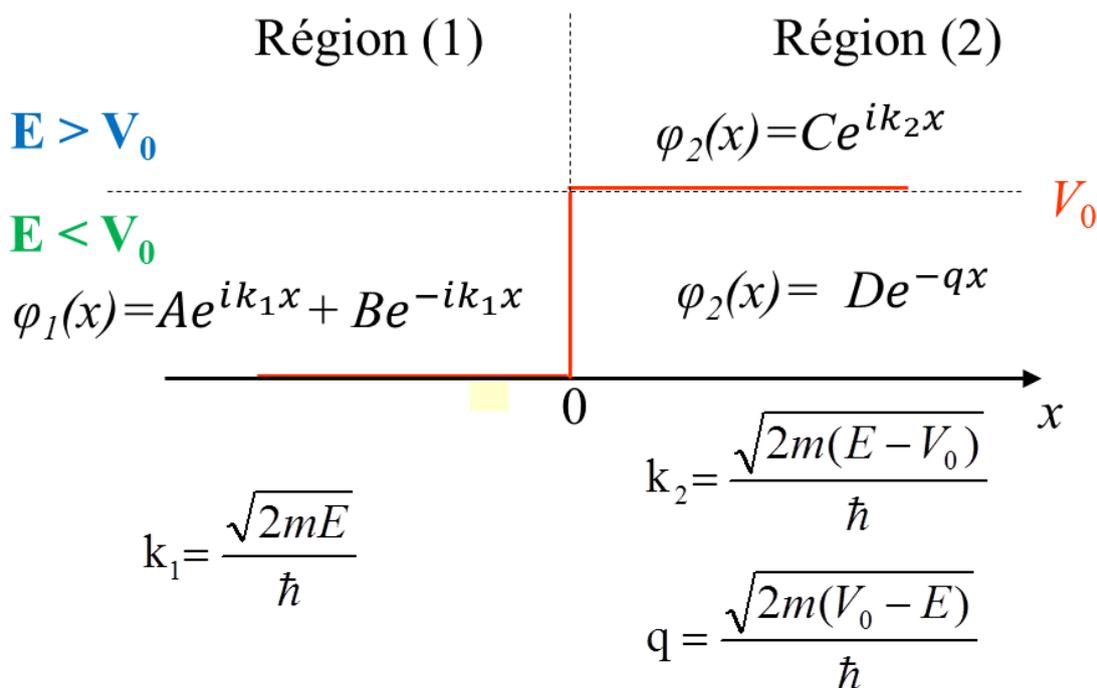


→ $\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & \text{Région (1)} \\ \varphi_2(x) = De^{-qx} & \text{Région (2)} \end{cases}$

- **Rq:** Tous les résultats peuvent être obtenus à partir du cas précédent ($E > V_0$) en faisant le changement $\mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{i}q$
- Dans ce cas on trouve: $R = 1 \rightarrow T = 0$
 \rightarrow Il y'a réflexion totale



Résumé: Particule traversant une marche de potentiel



Conclusion

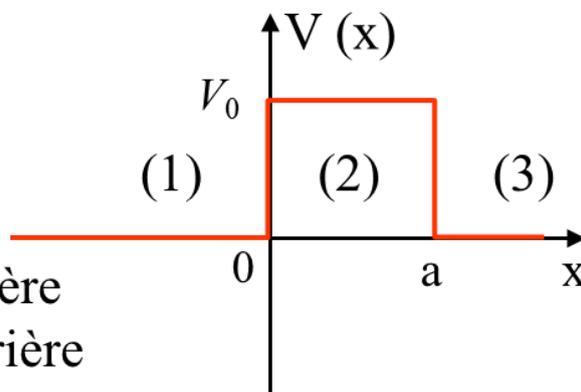
- **D'un point de vue classique**, la particule d'énergie $E < V_0$ (hauteur de la marche) doit rebondir en $x = 0$ et repartir dans le sens contraire avec une vitesse identique; Impossibilité de franchir la marche de potentiel; sa vitesse $v_2 \in i\mathbb{C}$, elle **ne peut pas se trouver dans la région (2)**.
- **D'un point de vue quantique**, la particule est réfléchiée en $x = 0$, mais \exists une onde de type évanescence (De^{-qx}) derrière la marche ($x > 0$);
- La particule peut franchir la marche: **Probabilité non nulle de se trouver dans la région (2)**

B - Barrière de potentiel

- Une particule d'énergie propre E positive se dirigeant vers les x croissants, rencontre en $x = 0$ une barrière de potentiel :

- $V(x) = 0$ pour $x < 0$ et $x > a$
- $V(x) = V_0$ pour $0 < x < a$

- Il y a 3 Régions :



- a : largeur de la barrière
- V_0 : hauteur de la barrière

1^{er} cas : $E > V_0$

- **Régions (1) et (3) : $V = 0$**

→ L'énergie est purement cinétique ($E = E_C$)

La vitesse de la particule est :

$$v_1 = v_3 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

- L'E.S.I.T s'écrit :

- Région (1): $\varphi_1'' + k_1^2 \varphi_1 = 0$

- Région (3): $\varphi_3'' + k_3^2 \varphi_3 = 0$

$$k_1^2 = k_3^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

- k_1 : le nombre d'onde dans la région (1)
- k_3 : le nombre d'onde dans la région (3)

• Région (2) : $V = V_0$

→ la vitesse de la particule est :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(E - V_0)}{m}}$$

- L'E.S.I.T s'écrit ,

$$\varphi_2'' + k_2^2 \varphi_2 = 0$$

$$k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$$

- k_2 : le nombre d'onde dans la région (2)

Les solutions dans les 3 régions sont,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad (x < 0) \quad \text{Région (1)} \\ \varphi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \quad (0 < x < a) \quad \text{Région (2)} \\ \varphi_3(x) = Fe^{ik_3x} + Ge^{-ik_3x} \quad (x > a) \quad \text{Région (3)} \end{array} \right.$$

- A, B, C, D, E, F et G sont des constantes d'intégration à déterminer

• Identification des différents termes de la solution par analogie optique:

• Dans la région (1) ($x < 0$) :

- $\varphi_i(x) = Ae^{ik_1x}$: Onde Incidente
- $\varphi_{1r}(x) = Be^{-ik_1x}$: Onde Réfléchie
(Obstacle en $x = 0$)

 $\varphi_1(x) = \varphi_i(x) + \varphi_{1r}(x)$

• **Région (2) ($0 < x < a$) :**

• $\varphi_{2t}(x) = Ce^{ik_2x}$

Onde Transmise dans la région (2)

• $\varphi_{2r}(x) = De^{-ik_2x}$

Onde Réfléchie après Transmission dans la région (2) (Obstacle en $x = a$)

➔ $\varphi_2(x) = \varphi_{2t}(x) + \varphi_{2r}(x)$

• **Région (3) ($x > a$) :**

• $\varphi_{3t}(x) = Fe^{ik_3x}$ *Onde Transmise dans (3)*

• $\varphi_{3r}(x) = Ge^{-ik_3x}$

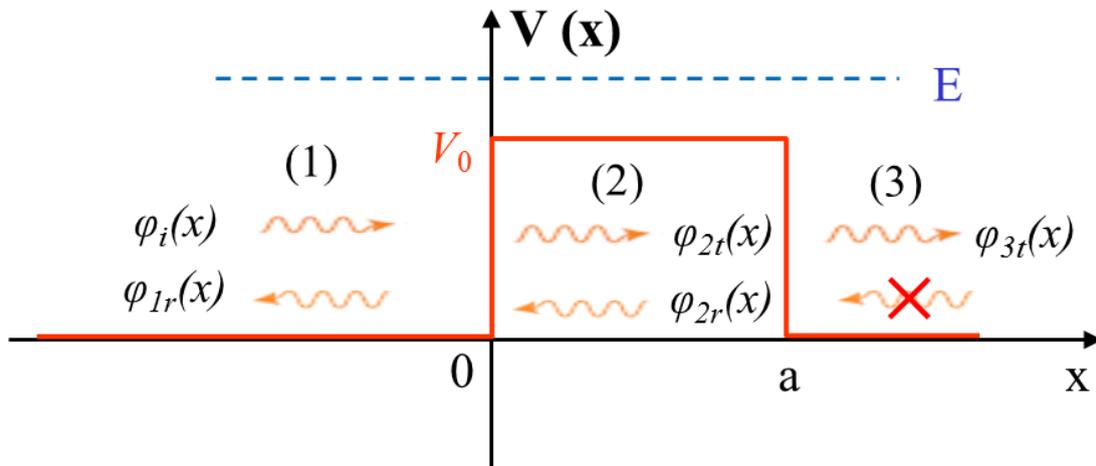
Onde ~~Réfléchie~~ après transmission dans (3)

• Or il n'y a **pas d'obstacle dans la région (3)**

➔ Cette onde n'a **pas d'existence physique**

➔ $G = 0$

➔ $\varphi_3(x) = \varphi_{3t}(x)$



$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & (x < 0) \\ \varphi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} & (0 < x < a) \\ \varphi_3(x) = Fe^{ik_3x} & (x > a) \end{cases}$$

• **Conditions de Raccordement au points de discontinuité du potentiel**

□ *Au point $x = 0$:*

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \\ \varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A + B = C + D \\ ik_1(A - B) = ik_2(C - D) \end{cases}$$

□ *Au point $x = a$:* $\begin{cases} \varphi_2(a) = \varphi_3(a) \\ \varphi'_2(a) = \varphi'_3(a) \end{cases}$

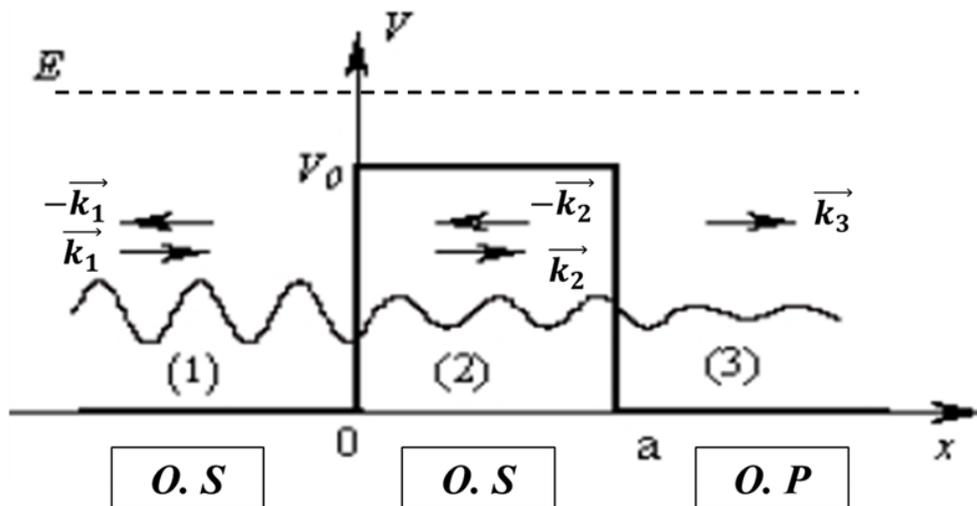
$$\longrightarrow \begin{cases} Ce^{ik_2a} + De^{-ik_2a} = Fe^{ik_3a} \\ ik_2(Ce^{ik_2a} - De^{-ik_2a}) = ik_3Fe^{ik_3a} \end{cases}$$

- Après avoir exprimé B, C, D et F en fonction de l'amplitude incidente A, on détermine les coefficients de Réflexion R et de Transmission T

$$R = \frac{|\varphi_{1r}|^2}{|\varphi_i|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k_2^2 - k_1^2)^2 \sin^2(k_2 a)}{4 k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 a)}$$

$$T = \frac{|\varphi_{3t}|^2}{|\varphi_i|^2} \frac{k_3}{k_1} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{4 (k_1 k_2)^2}{4 k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 a)}$$

➔ **$R + T = 1$**



2^{ème} cas Effet Tunnel : $0 < E < V_0$

- **Régions (1) et (3) : $V = 0 \rightarrow E = E_C$**
(les résultats sont les mêmes que le cas précédent)
- L'E.S.I.T dans les 2 régions :

$$\boxed{\varphi_1'' + k^2 \varphi_1 = 0}$$

$$\boxed{\varphi_3'' + k^2 \varphi_3 = 0}$$

$$\boxed{k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}}$$

k : nombre d'onde dans les régions (1) et (3)

- Les solutions sont complexes : $\varphi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$
 $\varphi_3(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$

- **Région (2) : $V = V_0$**

\rightarrow la vitesse de la particule

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(E - V_0)}{m}}$$

est **imaginaire** ($(E - V_0) < 0$)

\Rightarrow • L'E.S.I.T s'écrit :

$$\boxed{\varphi_2'' - \alpha^2 \varphi_2 = 0}$$

$$\boxed{\alpha^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

α : n'est pas un nombre d'onde

La solution est : $\varphi_2(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$

qui est une solution réelle

• **Analogie optique, Région (1) :**

$$\varphi_i(x) = Ae^{ikx} : \text{onde incidente}$$

$$\varphi_r(x) = Be^{-ikx} : \text{onde réfléchie en } x = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

• **Région (2), Convergence de la solution réelle:**

$\varphi_2(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$ est convergente dans la région (2) : le domaine étant borné ($0 < x < a$)

$$\Rightarrow \varphi_2(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$$

• **Analogie optique, Région (3) ($x > a$) :**

• $\varphi_t(x) = Fe^{ikx} : \text{Onde Transmise dans la région (3)}$

• $\varphi_r(x) = Ge^{-ikx}$

Onde Réfléchie après transmission dans (3)

• Or il n'y a pas d'obstacle dans la région (3)

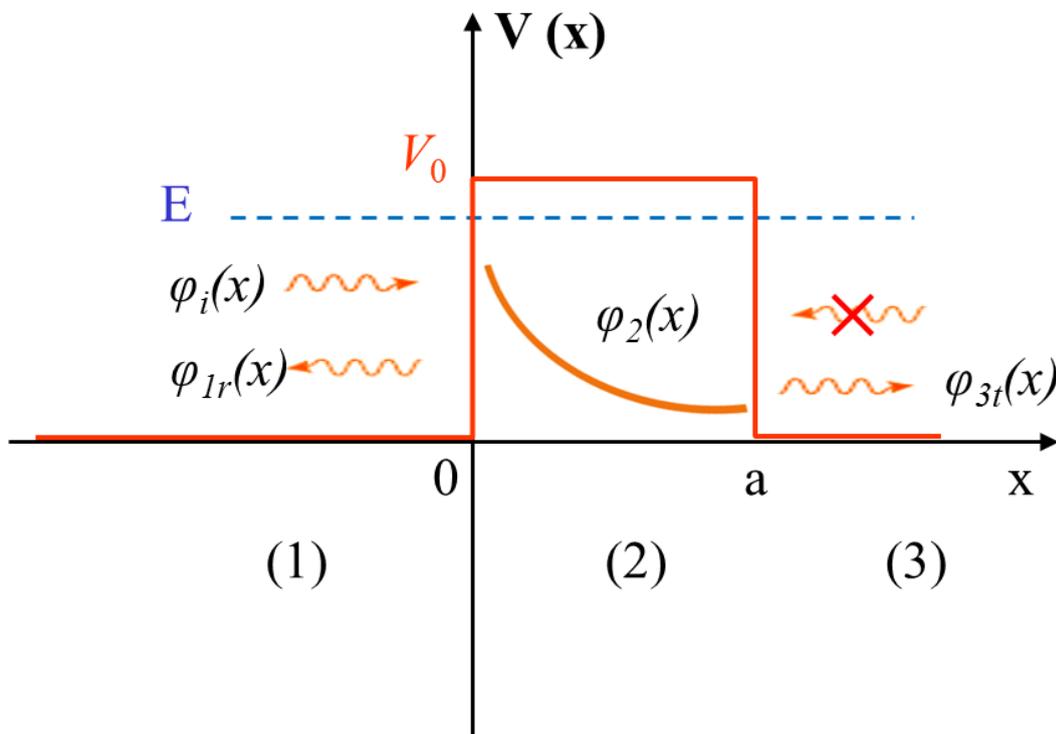
→ Cette onde n'a pas d'existence physique

$$\Rightarrow G = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_3(x) = Fe^{ikx}$$

La solution globale est:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < 0) \quad (1) \\ \varphi_2(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} & (0 < x < a) \quad (2) \\ \varphi_3(x) = Fe^{ikx} & (x > a) \quad (3) \end{cases}$$



• **Conditions de Raccordement au points de discontinuité du potentiel:**

• **Au point $x = 0$**

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \\ \varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B = C + D \\ ik(A - B) = \alpha(C - D) \end{cases}$$

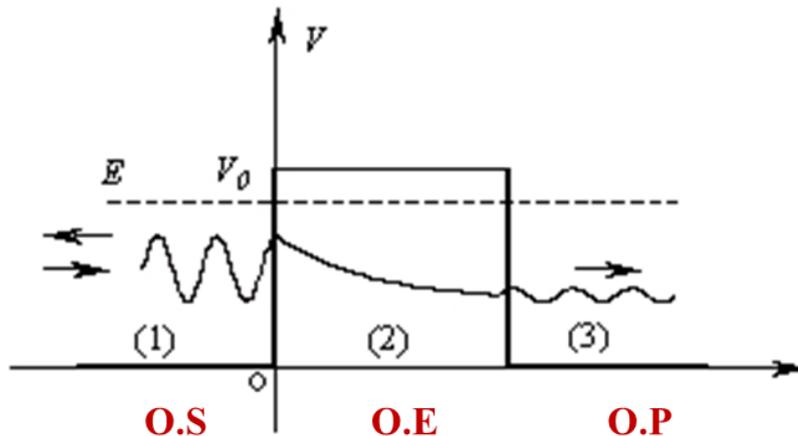
• **Au point $x = a$**

$$\begin{cases} \varphi_2(a) = \varphi_3(a) \\ \varphi'_2(a) = \varphi'_3(a) \end{cases}$$

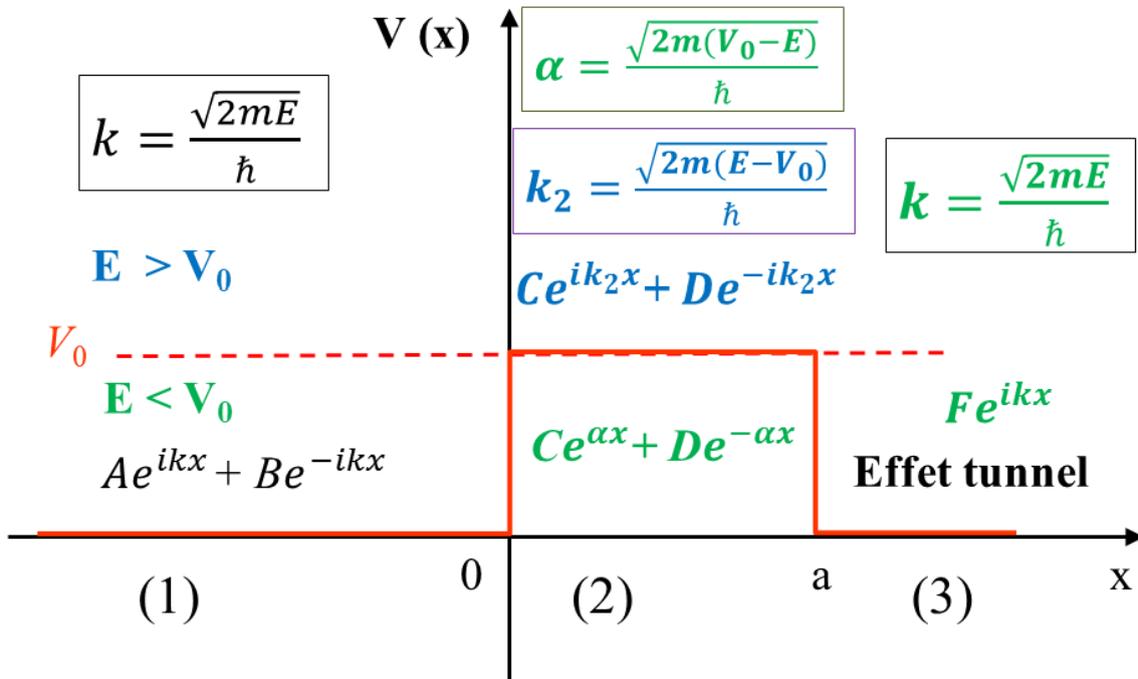
$$\rightarrow \begin{cases} Ce^{\alpha a} + De^{-\alpha a} = Fe^{ika} \\ \alpha(Ce^{\alpha a} - De^{-\alpha a}) = ikFe^{ika} \end{cases}$$

▪ **On obtient le coefficient de Transmission :**

$$\rightarrow T = \frac{1}{1 + \left(\frac{k^2 + \alpha^2}{2\alpha k}\right)^2 sh^2 \alpha a} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} sh^2 \alpha a}$$



Particule franchissant une barrière de potentiel

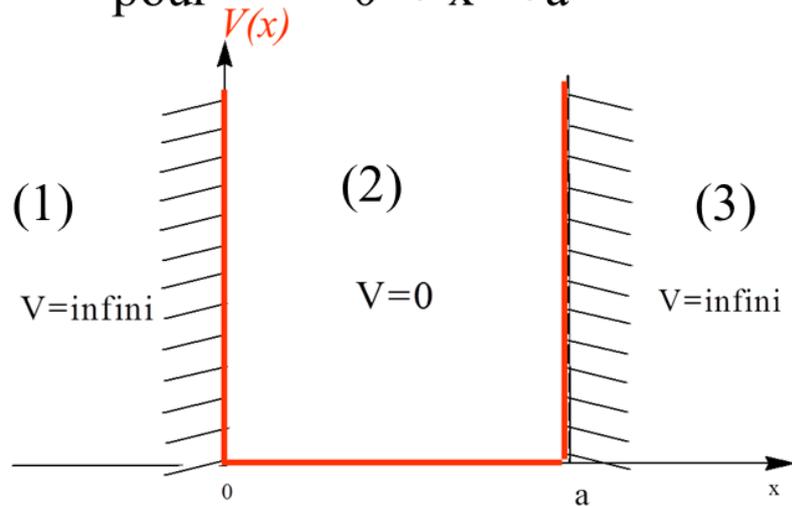


❖ Conclusion

- Contrairement aux prévisions classiques, la particule a une probabilité non nulle de franchir la barrière de potentiel : c'est **l'effet Tunnel**.
- Cette probabilité dépend de l'énergie propre E de la particule et de la taille de la barrière franchie (V_0 et a)
- L'effet tunnel est une réalité physique quantique qui intervient dans l'interprétation de beaucoup de phénomènes; Radioactivité α , passage des électrons d'un atome à un autre, ...

C - Puits de potentiel infini

- Une particule d'énergie E se déplaçant sur (OX) soumise à un puits de potentiel infini de largeur a :
- $V(x) = \infty$ pour $x < 0$ et $x > a$
- $V(x) = 0$ pour $0 < x < a$



• Résolution de l'E.S.I.T :

- **Régions (1) et (3) :** $V = \infty \rightarrow E_c = (E - V) = -\infty$
 $\rightarrow v_1 = v_3 = i\infty$
 \rightarrow Les régions (1) et (3) sont interdites à la particule. En effet,

- **Région (1) :** $\phi_1'' - \alpha^2 \phi_1 = 0$

- **Région (3) :** $\phi_3'' - \alpha^2 \phi_3 = 0$

$$\alpha^2 = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{2m(V - E)}{\hbar^2} = \infty$$

➡ • Les solutions sont réelles:

$$\phi_1(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \quad \text{pour } x < 0 \quad (1)$$

$$\phi_3(x) = Fe^{\alpha x} + Ge^{-\alpha x} \quad \text{pour } x > a \quad (3)$$

• **Etude de la Convergence : (Solutions Physiques)**

• **Région (1) (x < 0) :** $e^{\alpha x} \rightarrow 0$ ➡ $\phi_1(x) = Be^{-\alpha x}$

• Mais $e^{-\alpha x}$ diverge, quand $x \rightarrow -\infty$ ➡ $B = 0$

➡ $\phi_1(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0$

• **Région (3) (x > a) :** $e^{-\alpha x} \rightarrow 0$ ➡ $\phi_3(x) = Fe^{\alpha x}$

• Mais $e^{\alpha x}$ diverge quand $x \rightarrow +\infty$ ➡ $F = 0$

➡ $\phi_3(x) = 0 \quad \text{pour } x > a$

• **Région (2) : V = 0 ➡ E = E_c**

➡ la vitesse de la particule : $v_2 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

• L'E.S.I.T s'écrit : $\phi_2'' + k^2 \phi_2 = 0$

• k : le nombre d'onde dans la région (2)

• La solution est complexe :

$$\phi_2(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$

• **Analogie Optique :**

$$\phi_2(x) = \phi_i(x) + \phi_r(x)$$

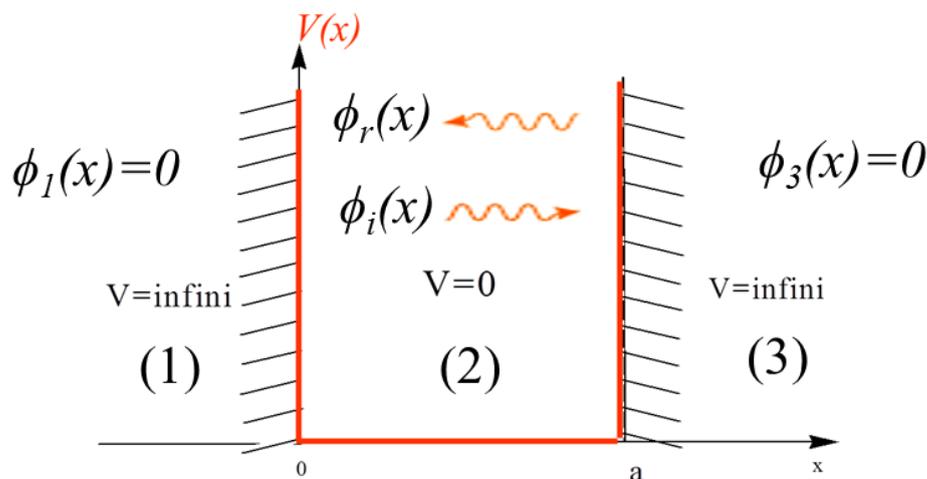
• **La solution globale :**

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x) = 0 & \text{pour } x < 0 \\ \phi_2(x) = C e^{ikx} + D e^{-ikx} & \text{pour } 0 < x < a \\ \phi_3(x) = 0 & \text{pour } x > a \end{cases}$$

- Cela veut dire que les régions (1) et (3) sont interdites à la particule.
- On dit que la particule est confinée ou bien piégée dans le puits (Région (2)) .

• **Résultats expérimentaux :**

- La particule est confinée dans le puits; on dit que son état est lié et donc, son énergie est quantifiée.
- Dans ce cas, l'étude quantique est nécessaire.



• **Conditions de Raccordement** au points de discontinuité du potentiel: (**seul $\phi(x)$ est continue**)

• **Au point $x = 0$:** $\phi_2(0) = \phi_1(0) = 0$

$$\Rightarrow C + D = 0 \quad \Leftrightarrow D = -C$$

$$\Rightarrow \phi_2(x) = C(e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iC\sin(kx)$$

• **Au point $x = a$:** $\phi_2(a) = \phi_3(a) = 0$

$$\Rightarrow C\sin(ka) = 0$$

$$\Rightarrow ka = n\pi \quad \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{a} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

• Cette relation exprime la quantification du nombre d'onde.

→ L'énergie de la particule est aussi quantifiée:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

• La longueur d'onde de l'onde associée à la particule est :

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$$

- ➔ • La fonction d'onde d'une particule confinée dans un puits de potentiel

$$\phi(x) = \phi_2(x) = 2iC \sin(kx)$$

est une fonction d'onde stationnaire exprimant les états quantifiés de cette particule :

$$\phi_n(x) = C_1 \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

- La condition de normalisation exprimant la probabilité de trouver la particule dans le puits est:

$$\int_0^a |\phi_n(x)|^2 dx = 1 \quad \text{➔ permet de déterminer } C_1$$

$$\text{➔ } |C_1| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \quad \text{➔ } C_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} e^{i\theta}$$

- $e^{i\theta}$ est facteur de phase, θ est l'argument de C_1 (Constante de Normalisation)

- Donc, à un facteur de phase près, la fonction d'onde stationnaire normée est donnée par:

$$\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

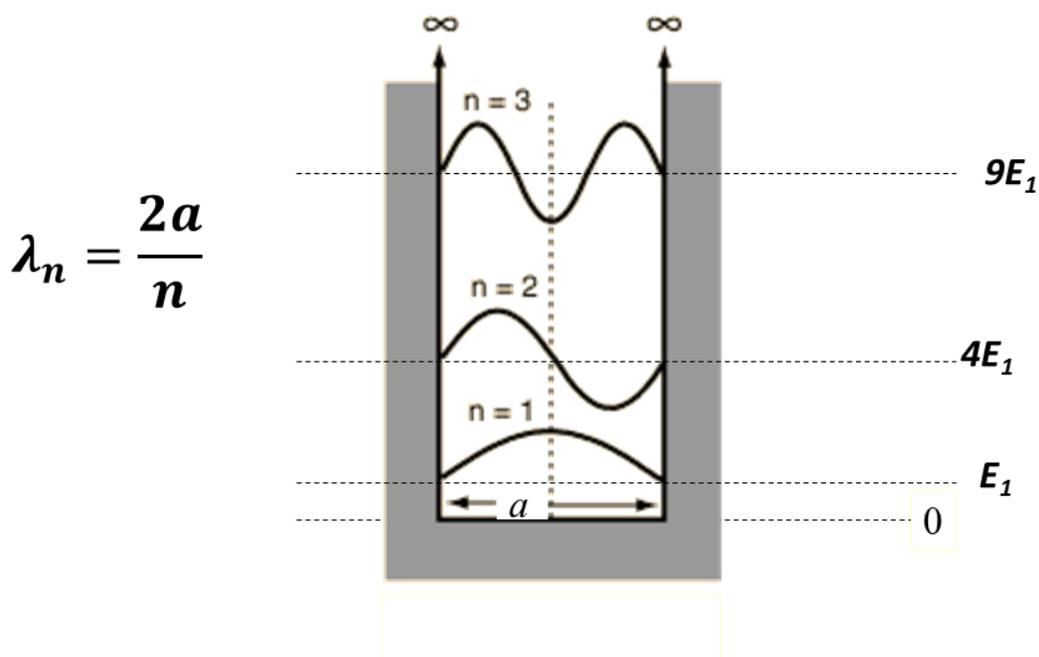
- Les fonctions d'onde totales d'une particule confinée dans un puits de potentiel infini sont donc,

$$\psi_n(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 & (1) \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{\frac{-iEt}{\hbar}} & \text{pour } 0 < x < a & (2) \\ 0 & \text{pour } x > a & (3) \end{cases}$$

➤ qui sont des fonctions (états) propres (à un facteur de phase près) de l'Hamiltonien associées aux énergies (valeurs) propres ;

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}$$

▪ **Fonctions d'onde et niveaux d'énergie d'une particule dans un puits de potentiel infini**



Test de compréhension du cours : le corps noir

Question

1 – En vous situant dans le contexte historique, pourquoi les scientifiques pensaient-ils qu'un corps chauffé émet de la lumière ?

Solution

On savait à l'époque que la matière était constituée d'électrons, particules chargées mobiles (mais la description atomique n'existait pas encore). On savait de plus que ces électrons, s'ils sont freinés, peuvent émettre un rayonnement électromagnétique, en raison des équations de Maxwell.

Question

2 -En quoi la description classique donne des résultats théoriques qui ne décrivent pas l'expérience ?

Solution

L'approche classique prévoit une augmentation continue de la puissance lumineuse émise avec la fréquence. Expérimentalement, c'est le cas à basse fréquence, mais pas à haute fréquence

Question

3 - Pourquoi faut-il que les ondes émises dans la cavité soient des ondes stationnaires ?

Solution

La paroi émet en chaque point des ondes électromagnétiques. Si deux éléments de paroi en vis-à-vis émettent des ondes de même fréquence se déplaçant l'une vers l'autre, une onde résultante n'existera que si elles sont en phase, d'où les modes possibles

Question

4 - Pourquoi faut-il que le corps soit « noir » pour que la loi soit universelle, c'est-à-dire ne dépende pas du matériau de la cavité ?

Solution

Il faut qu'il y ait absorption totale du rayonnement, pour que la loi décrivant l'intensité du rayonnement émis soit universelle. S'il n'y a pas d'absorption totale, une partie du rayonnement est réfléchi, et la loi n'est plus universelle. Néanmoins, dans le cas d'une cavité fermée, les rayons vont être réfléchis plusieurs fois pour finalement être absorbés et on retrouve une loi universelle.

Test de compréhension du cours : l'effet photoélectrique

Question

1- Dans le montage proposé pour l'effet photoélectrique, était-il étonnant d'un point de vue classique de mesurer un courant même si le circuit est ouvert ?

Solution

D'un point de vue classique, non, car on savait que la matière contient des électrons. En fournissant de l'énergie par le rayonnement électromagnétique reçu, il était classiquement concevable que les électrons captent cette énergie pour leur permettre de sortir de la matière dans le vide de l'ampoule, pour aller rejoindre l'électrode collectrice, et ainsi mesurer un courant.

Question

2- En quoi la description classique échoue-t-elle à décrire certains résultats de l'expérience ?

Solution

La théorie classique prévoit que dès qu'on apporte de l'énergie, un courant doit être mesuré. En pratique ce n'est pas toujours le cas : il faut que le rayonnement ait une fréquence suffisante pour qu'il y ait un courant. En dessous d'une fréquence seuil, vous avez beau envoyer un rayonnement lumineux, aucun courant n'est détecté, même si vous augmentez la puissance de ce rayonnement.

Question

3- Lorsqu'on se place à une fréquence fixe au dessus de la fréquence seuil, expliquer pourquoi le courant augmente lorsqu'on augmente la puissance du rayonnement incident ?

Solution

Une puissance est une énergie par unité de temps. Plus l'apport d'énergie incidente est grand par unité de temps, plus il y aura d'électrons qui pourront sortir par unité de temps, et plus le courant, qui est un nombre de charge par unité de temps, grandira.

Question

4- On maintient maintenant la puissance fixe, et on augmente la fréquence au dessus de la fréquence seuil. Expliquer pourquoi le courant augmente avec la fréquence.

Solution

la densité de courant j (courant par unité de surface perpendiculaire à la direction du courant) peut s'écrire comme : $j = \rho V$ où ρ est la concentration de charges par unité de volume et V la vitesse des particules. En augmentant la fréquence, on augmente l'énergie captée par un électron dans la matière. Donc l'électron se retrouve dans le vide de l'ampoule avec une énergie cinétique qui grandit avec la fréquence, donc avec une vitesse plus grande, et donc le courant sera plus grand.

Exercices : l'effet photoélectrique

Exercice : expérience de Millikan (1916)

En 1916, Millikan se propose de tester le modèle d'Einstein pour expliquer l'effet photoélectrique, en réalisant l'expérience suivante :

il reprend le montage précédent mais rajoute sur le circuit une source de tension qui polarise l'ampoule photoélectrique.

Question

1- On se place dans le cas où la fréquence est sous la tension seuil. Le fait d'appliquer une tension change-t-elle quelque chose ?

- OUI ?
- NON ?

Solution

Non, pas assez d'énergie lumineuse pour faire sortir les électrons, et la tension appliquée n'y change rien (sauf pour des très grandes tensions, qui permettraient de créer un arc électrique, non réalistes pour cette expérience de laboratoire)

On se place cette fois dans le cas où la fréquence est supérieure à la fréquence seuil.

Question

2- On applique une tension positive, à savoir $V+$ sur le collecteur et $V-$ sur l'émetteur. Observe-t-on un courant ?

- OUI TOUJOURS ?
- NON JAMAIS ?
- CA DEPEND DE LA TENSION ?

Solution

Oui toujours, la tension accélère les électrons entre les électrodes

Question

3- Même question en appliquant une tension négative.

- OUI TOUJOURS ?
- NON JAMAIS ?
- CA DEPEND DE LA TENSION ?

Solution

Eh bien là ca dépend de la tension. En effet, cette fois la tension négative ralentit les électrons qui sortent de l'électrode émettrice avant d'arriver sur

l'électrode collectrice. Si la tension est suffisante pour ralentir jusqu'à une vitesse nulle les électrons avant d'arriver sur l'électrode collectrice, il n'y aura pas de courant.

Question

4- Ecrire la relation entre l'énergie cinétique de l'électron arrivant sur le collecteur, son énergie initiale, et la tension appliquée aux bornes de l'ampoule

Solution

Appelons E_{cin}^{coll} et E_{cin}^{emet} les énergies cinétiques de l'électron sortant de l'émetteur, et arrivant sur le collecteur, et $\Delta V = V_{coll} - V_{emet}$ la différence de potentiel.

L'énergie totale étant la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, la conservation de l'énergie s'écrit ici pour notre électron : $E_{cin}^{emet} - eV_{emet} = E_{cin}^{coll} - eV_{coll}$

On obtient donc l'énergie cinétique finale : $E_{cin}^{coll} = E_{cin}^{emet} + e\Delta V$

On justifie bien les réponses aux questions précédentes : pour une différence de tension positive, on accélère toujours les électrons, et il y aura toujours du courant, alors que pour une tension négative ça dépend.

Question

5- A partir de quelle tension le courant s'annule-t-il ?

Solution

en raison de la question précédente, si $-e\Delta V \geq E_{cin}^{emet}$, les électrons n'ont plus assez d'énergie cinétique pour rejoindre le collecteur, et ils rebroussement chemin vers l'émetteur.

Question

6- On prend maintenant en compte l'hypothèse d'Einstein, à savoir que la lumière est constituée de particules d'énergie $h\nu$ indivisible, qui peuvent être complètement absorbées par les électrons de l'émetteur. En supposant qu'il faut fournir en plus un certain travail dit de sortie pour faire sortir l'électron de la matière, que l'on notera W , donner la relation entre l'énergie de l'électron sortant de l'émetteur, l'énergie lumineuse, et le travail de sortie. Faire un schéma du processus

Solution

$$E_{cin}^{emet} = h\nu - W$$

Question

7- Donner la fréquence seuil à tension nulle pour observer un courant

Solution

L'énergie cinétique doit être positive, donc $v \geq \frac{W}{h} = v_s$

Question

8- Ecrire alors l'énergie cinétique des électrons arrivant sur l'émetteur en fonction de la fréquence et de la tension appliquée

Solution

On a alors $E_{cin}^{coll} = E_{cin}^{emet} + e\Delta V = hv - W + e\Delta V = h(v - v_s) + e\Delta V$

Question

9- A une fréquence fixée au dessus du seuil, donner la valeur de la tension appliquée aux bornes de l'ampoule qui permettra d'annuler le courant.

Solution

Le courant s'annule lorsque l'énergie cinétique des électrons arrivant au collecteur s'annule, soit $-e\Delta V_o = hv - W$

Question

10- En déduire une méthode, proposée par Millikan, pour vérifier la théorie d'Einstein

Solution

Millikan envoie tout d'abord un rayonnement à une certaine fréquence sur l'émetteur, et à tension nulle, pour s'assurer qu'il est au dessus de la fréquence seuil. Ensuite, il applique une tension négative jusqu'à amener ce courant à zéro. Il obtient ainsi un couple de valeurs $(v, -e\Delta V_o)$. Il recommence cette expérience pour une série de fréquence, et il trace $-\Delta V_o$ en fonction de la fréquence. Si la théorie d'Einstein est correcte, Millikan doit observer, en

raison de la question précédente, une droite d'équation $-\Delta V_o = \frac{h}{e}v - \frac{W}{e}$:

Question

11- Millikan utilise comme électrode émettrice plusieurs métaux. Que doit-il observer compte tenu de la question précédente ?

Solution

Il doit observer que la pente de la droite ne doit pas dépendre du type de métal choisi. Par contre le point à l'origine en dépend, et il permet de déterminer le travail de sortie du métal utilisé

Modèle de De Broglie

Question

1- Quelles sont les hypothèses de base de De Broglie pour décrire de façon ondulatoire une particule massique ?

Solution

De Broglie fait deux hypothèses, très simples. La première est d'identifier la vitesse d'une particule avec la vitesse de déplacement d'une onde, à savoir la vitesse de groupe. La seconde consiste à généraliser l'expression de l'énergie faite par Einstein pour les photons à toutes les particules, massiques ou non.

Question

2- Ecrire ces relations et en déduire une équation différentielle entre la pulsation et le vecteur d'onde.

Solution

$$E = mc^2 = \hbar\omega \text{ et } v = v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Et comme , on aboutit ainsi à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2}} = \hbar\omega \quad b$$

Question

3- Résoudre cette équation différentielle mathématiquement (on trouvera la solution à une constante près)

Solution

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2}} = \hbar\omega \Rightarrow \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar\omega}\right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2$$

Soit en posant $X = \frac{\hbar\omega}{m_0 c^2}$, alors $d\omega = \frac{m_0 c^2}{\hbar} dX$ on aboutit à

: $1 - \frac{1}{X^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2 = \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{dX}{dk}\right)^2$ En séparant les variables, on obtient alors :

$$dk = \frac{m_0 c}{\hbar} \left(\frac{XdX}{\sqrt{1 - X^2}}\right)$$

Or vous devez voir que $\frac{XdX}{\sqrt{X^2-1}}$ est la dérivée de la fonction $\sqrt{X^2-1}$, donc l'intégration de l'équation mène à la solution suivante :

$$k - k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar} \left(\sqrt{X^2 - 1} - \sqrt{X_0^2 - 1} \right)$$

Question

4 – Trouver une solution particulière et en déduire la relation entre le vecteur d'onde et la pulsation

Solution

Pour une particule immobile, la vitesse associée de l'onde est nulle, donc $V=0$ et $p=0$. Du point de vue ondulatoire, cela veut dire que l'onde ne se propage pas, donc que le vecteur d'onde caractéristique de la propagation spatial est nul. D'autre part, pour un vecteur d'onde nul, l'énergie totale s'écrit à la fois en fonction de la masse au repos et de la pulsation comme :

$$E(V=0) = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \Big|_{p=0} = m_0 c^2 = \hbar \omega_0$$

$$\text{d'où } X_0 = \frac{\hbar \omega_0}{m_0 c^2} = 1$$

Donc on obtient un couple solution : $(k_0, X_0) = (0, 1)$. L'équation de la question précédente devient finalement :

$$k = \frac{m_0 c}{\hbar} \sqrt{X^2 - 1}$$

soit $(\hbar \omega)^2 = (m_0 c^2)^2 + (\hbar k)^2 c^2$ Si vous identifiez cela à l'expression de l'énergie $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = (\hbar \omega)^2$, vous en déduisez immédiatement la célèbre formule de De Broglie, à savoir :

$$p = \hbar k$$