

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Oran's Higher Teachers College
AMMOUR Ahmed



المدرسة العليا للأساتذة بهران
عمور احمد

قسم العلوم الدقيقة

تخصص أستاذ رياضيات تعليم متوسط و تعليم ثانوي

سنة رابعة رياضيات

دروس مفصلة و تمارين محلولة السداسي الثاني مقياس المعادلات التفاضلية

من إعداد الأستاذ :

• الدكتور مجاهدي براهيم

أستاذ محاضر صنف "أ"

السنة الجامعية : 2026 / 2025

﴿ شـكـر و تـقـدير ﴾

﴿ مـنـه و عـنـه ﴾

الحمد لله على إحسانه و الشكر له على توفيقه و إمتنانه و نشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له تعظيماً لشأنه و نشهد أن سيدنا و نبينا محمدا عبده و رسوله الداعي إلى رضوانه، صلى الله عليه و على آله و أصحابه و أتباعه و سلم. بعد شكر الله سبحانه و تعالى على توفيقه لنا لإتمام هذه الطبوعة.

وبقلوب ممتنة و عرفان بالجميل، نتقدم بخالص الشكر و التقدير لكل من ساهم في إنجاح هذه المطبوعة كما نخص بالشكر الجزيل إلى السادة الأساتذة على قبولهم الدعوة و على وقتهم و جهدهم في مراجعة و تقييم هذه المطبوعة التي نأمل أن تكون عوناً لطلابنا الأعزاء يجدون فيها ضالتهم في فهم و مراجعة مقياس المعادلات التفاضلية.

وآخر دعوانا أن الحمد لله ربّ العالمين اللهم انفعنا بما علمتنا و انفع بنا فالحمد لله على حسن التمام و الختام .

الفهرس

مقدمة

1

3

الفصل الأول: حل معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية بطريقة السلاسل:

4

6

7

9

9

13

15

18

20

25

27

28

34

34

34

38

45

46

1.1 النقط العادية و الشاذة:

2.1 سلسلة القوى

1.2.1 حلول سلسلة قوى حول نقطة عادية

3.1 معادلة فروبنوس:

1.3.1 تعريف:

2.3.1 الحالة الاولى: الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد كسري

3.3.1 الحالة الثانية: الجذران متساويان

4.3.1 الحالة الثالثة: الفرق بين جذري المعادلة الدليلية عدد صحيح موجب

5.3.1 حل المعادلة التفاضلية في سلسلة القوى في حالة x كبير جدا:

4.1 معادلة لجندر ودوالها الخاصة

1.4.1 دوال لجندر من النوع الاول و الثاني

2.4.1 تطبيق خطوات حل معادلة لجندر

5.1 معادلة بسل ودوالها الخاصة:

1.5.1 تعريف معادلة بسل

2.5.1 تطبيق طريقة فروبنوس على معادلة بسل

3.5.1 دوال بسل من النوع الاول و الثاني

6.1 تمارين

7.1 حل التمارين

الفصل الثاني: المعادلات التفاضلية الجزئية

1.2 مفاهيم عامة حول المعادلات التفاضلية الجزئية:

1.1.2 تعاريف:

2.1.2 تكوين المعادلات التفاضلية الجزئية:

3.1.2 الشروط الحدية والابتدائية:

2.2 تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية:

1.2.2 الرتبة

2.2.2 عدد المتغيرات المستقلة

3.2.2 خطية المعادلة

4.2.2 تجانس المعادلة

62

62	5.2.2 طبيعة المعاملات
63	6.2.2 الأنماط الثلاثة الأساسية للمعادلات الخطية
65	3.2 نظرية الوجود والحدانية:
65	1.3.2 نظرية لاكس--ميلغرام :
67	4.2 الطرق التحليلية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية
67	1.4.2 طريقة فصل المتغيرات
69	2.4.2 : تحويل فوري Transform Fouri
72	3.4.2 تحويل لابلاس Transform Laplace
77	5.2 الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية
77	1.5.2 طريقة المميزات
79	2.5.2 طرق الفروق المنتهية المعممة
80	3.5.2 طريقة الفروق المحدودة
84	الفصل الثالث: نظام معادلات تفاضلي
85	1.3 مفاهيم عامة حول الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابتة:
86	2.3 أسية مصفوفة:
86	1.2.3 خصائص أسية مصفوفة:
87	2.2.3 حساب أسية مصفوفة:
99	3.3 حل جملة معادلات تفاضلية خطية:
101	4.3 الأنظمة الخطية التفاضلية المتجانسة:
103	1.4.3 في حالة مصفوفة قطرية أو عديمة الثمر أو معا:
104	2.4.3 في حالة مصفوفة مشابهة لمصفوفة قطرية:
105	3.4.3 في حالة مصفوفة غير مشابهة لمصفوفة قطرية:
107	4.4.3 القيم الذاتية أعداد المركبة:
109	5.4.3 حل أنظمة معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية
114	5.3 الأنظمة الخطية غير المتجانسة
119	6.3 طرق أخرى لحل نظام معادلات التفاضلية
119	1.6.3 تحويل لابلاس
122	7.3 تمارين
123	8.3 حل التمارين
132	قائمة المراجع

مقدمة

تُعدّ المعادلات التفاضلية من أبرز الأدوات الرياضية التي أسهمت في تطوير العديد من العلوم الحديثة، إذ تُستعمل في صياغة النماذج الرياضية للظواهر الفيزيائية والهندسية والطبيعية. وتمثل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية أحد أهم الأصناف التي تحظى باهتمام واسع، لما تتميز به من خصائص تحليلية غنية وظهور متكرر في مسائل واقعية مثل انتشار الحرارة، انتشار الموجات، الاهتزازات، والمسائل ذات التناظر الخاص سواء كان أسطوانياً أو كروياً.

وانطلاقاً من أهمية هذا النوع من المعادلات، تطرقنا في الفصل الأول من هذه المطبوعة إلى دراسة الحلول التحليلية لها من خلال التركيز على ثلاث نماذج أساسية تمثل حجر الزاوية في التحليل الرياضي الحديث، وهي: طريقة فروبنوس التي تُمكن من إيجاد حلول على شكل سلاسل قوى حول النقاط الشاذة المنتظمة، ومعادلة بسل التي تظهر بشكل طبيعي في المسائل ذات التناظر الأسطواني، ومعادلة لجندر التي ترتبط ارتباطاً وثيقاً بالأنظمة ذات التناظر الكروي والتوافقيات الكروية. وتبرز أهمية هذه النماذج في كونها تؤدي إلى ظهور دوال خاصة لها دور مركزي في الحلول الرياضية والفيزيائية.

وقد حرصنا في هذا العمل على تقديم عرض منظم يجمع بين الجانب النظري والدقة التحليلية، مع توضيح المفاهيم الأساسية التي يعتمد عليها بناء الحلول، وتقديم أمثلة تطبيقية تساعد على فهم كيفية استعمال هذه الطرق في حل مشكلات واقعية. كما تمت مراعاة التدرج في عرض الأفكار بهدف تسهيل الفهم وتمكين القارئ من متابعة التسلسل المنطقي للدراسة.

أما في الفصل الثاني فركزنا على نوع آخر من المعادلات التفاضلية ألا وهي المعادلات التفاضلية الجزئية. حيث تُعدّ المعادلات التفاضلية الجزئية من أهم فروع الرياضيات التطبيقية، إذ تمثل أداة أساسية لنمذجة العديد من الظواهر الطبيعية والفيزيائية والهندسية. فهي تسمح بوصف التغيرات التي تعتمد على أكثر من متغير مستقل، مثل الزمن والمكان، مما يجعلها وسيلة فعالة لفهم وتحليل سلوك الأنظمة الديناميكية المعقدة.

وقد نشأت دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية من الحاجة إلى تفسير مجموعة واسعة من الظواهر الفيزيائية، مثل انتقال الحرارة في الأجسام الصلبة، وانتشار الموجات الصوتية والضوئية، وحركة الموائع. ومع تطور

العلوم والتكنولوجيا، توسعت مجالات تطبيق هذه المعادلات لتشمل العديد من الميادين الحديثة مثل معالجة الصور، والذكاء الاصطناعي، والنمذجة الرياضية للظواهر الطبيعية المختلفة. ولقد ركزنا على المفاهيم الأساسية المتعلقة بالمعادلات التفاضلية الجزئية وبعض التعاريف والنتائج النظرية، كما قمنا بتزويد القارئ بأهم الطرق لحل المعادلات التفاضلية الجزئية كتحويل فوري تحويل لابلاس وغيرها من الطرق بحيث نسعى في سبيل حلها إلى تحويلها من فضاء معقد إلى فضاء أبسط

كما تطرقنا في الفصل الأخير إلى دراسة شاملة على نظام معادلات تفاضلية. حيث عندما نتحدث عن "نظام المعادلات التفاضلية"، فإننا نشير إلى مجموعة من المعادلات التفاضلية التي تحتوي على عدة دوال غير معروفة ومشتقاتها. يمكن أن تكون هذه المعادلات خطية أو غير خطية، ويمكن أن تحتوي على متغيرات مستقلة واحدة أو أكثر. نظام المعادلات التفاضلية ليس مجرد مفهوم رياضي معقد، بل هو أداة حيوية لفهم العالم من حولنا. فهو يوفر إطاراً رياضياً لوصف وتحليل الأنظمة الديناميكية التي تتغير بمرور الوقت أو المكان. من خلال حل هذه المعادلات، يمكن للباحثين والمهندسين التنبؤ بسلوك الأنظمة المعقدة وتحسين تصميمها وأدائها.

الفصل الأول

حل معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية بطريقة السلسلة:

تمهيد

بعد أن تطرقنا في الجزء الأول إلى الحل الحقيقي للمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية سنرى في فصلنا هذا الحل التقريبي وذلك باستعمال سلاسل القوى و طرائق فربونيوس و بيسل و لجندر و نتعرف على كل طريقة و خواصها.

1.1 النقط العادية و الشاذة:

لتكن المعادلة:

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \quad (1.1)$$

حيث أن كل من $P_0(x)$ ، $P_1(x)$ ، $P_2(x)$ دوال تحليلية في x ، أي يمكن التعبير عن كل منها بسلسلة قوى في x .

تعريف 1.1.1:

تسمى $x = a$ نقطة عادية (Ordinary point) إذا كان

$$P_0(a) \neq 0$$

تعريف 2.1.1:

تسمى $x = a$ نقطة شاذة أو منفردة (Singular point) إذا كان

$$P_0(a) = 0$$

تعريف 3.1.1:

تسمى $x = a$ نقطة شاذة منتظمة (Regular Singular Point) إذا كانت $x = a$ نقطة شاذة وكانت النهايتين:

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a) \frac{P_1(x)}{P_0(x)} \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^2 \frac{P_2(x)}{P_0(x)}$$

موجودتين ومنتهيتين.

مثال 1.1.1

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:

$$x(x-2)^2(x+3)y'' + x^2y' - (x^3 + 2x - 1)y = 0 \quad (2.1)$$

لدينا:

$$P_0(x) = x(x-2)^2(x+3), \quad P_1(x) = x^2, \quad P_2(x) = -(x^3 + 2x - 1).$$

إذا النقط التي تحقق $P_0(x) = 0$ هي:

$$x = 0, x = 2, x = -3.$$

وهي النقط الشاذة
حيث:

(i) عند $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_1(x)}{P_0(x)} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x-2)^2(x+3)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_2(x)}{P_0(x)} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(x^3 + 2x - 1)}{(x-2)^2(x+3)} = 0$$

إذن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

(ii) عند $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{P_1(x)}{P_0(x)} (x-2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)(x+3)} = \infty$$

إذن $x = 2$ نقطة شاذة غير منتظمة.

(iii) عند $x = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{P_1(x)}{P_0(x)} (x+3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2}{x(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{-3}{25}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{P_2(x)}{P_0(x)} (x+3)^2 = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-(x^3 + 2x - 1)(x+3)}{x(x-2)^2} = 0$$

إذن $x = -3$ نقطة شاذة منتظمة.

2.1 سلسلة القوى

تعريف 1.2.1: تعطى سلسلة قوى حول $x = a$ بالصيغة التالية :

$$f(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - a)^n$$

أما إذا كانت السلسلة حول $x = 0$ فإن:

$$f(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n$$

حيث $C_1, C_2, C_3, \dots$ ثوابت تعرف بمعاملات السلسلة

بعض خصائص الخلاقة التجميعية :

نستعرض بعض الخصائص للسلاسل المنتهية وغير المنتهية: حيث Q هو كثير الحدود.

①

$$\sum_{n=p}^k Q(n) = Q(p) + Q(p+1) + Q(p+2) + \dots + Q(k).$$

حيث k, p أعداد صحيحة.

②

$$\sum_{n=p}^{\infty} Q(n)a_nx^{n+p} = \sum_{n=2p}^{\infty} Q(n-p)a_{n-p}x^n.$$

③ إذا كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n,$$

فإن

$$a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

وبالتالي إذا كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)x^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

فإن

$$a_n - b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.2.1 حلول سلسلة قوى حول نقطة عادية

سندرس حل المعادلة التفاضلية:

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \quad (3.1)$$

على صورة سلسلة قوى في حالة ما إذا كانت النقطة $x = a$ نقطة عادية للمعادلة (3.1) أي تحقق الشرط:

$$P_0(a) \neq 0$$

وذلك من خلال النظرية التالية :

نظرية 2.1.1

إذا كانت $x = a$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (4.1)$$

حيث :

$$Q(x) = \frac{P_2(x)}{P_0(x)} \quad P(x) = \frac{P_1(x)}{P_0(x)}$$

فإن الحل العام للمعادلة (4.1) هو :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - a)^n = A_0 y_1 + A_1 y_2$$

حيث A_0, A_1 ثابتان إختاريان و y_1, y_2 مستقلان خطيا.

مثال 1.2.1

حل المعادلة التفاضلية التالية في صورة سلسلة القوى حول $x = 0$:

$$(2 + x^2)y'' + xy' - y = 0 \quad (5.1)$$

لدينا:

$$P_0(x) = 2 + x^2 \Rightarrow P_0(0) = 2 \neq 0$$

إذن $x = 0$ نقطة عادية.

نفترض أن الحل على الصورة:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

إذن:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1) x^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة (5.1) نحصل على:

$$(2+x^2) \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

أي:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2C_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

نقوم بتوحيد الأسس:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2C_{n+2}(n+2)(n+1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n n(n-1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

نجمع الحدود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+2)(n+1)C_{n+2} + n(n-1)C_n + nC_n - C_n] x^n = 0$$

نبسط:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+2)(n+1)C_{n+2} + (n^2-1)C_n] x^n = 0$$

إذن العلاقة التكرارية:

$$2(n+2)(n+1)C_{n+2} + (n^2-1)C_n = 0$$

ومنها:

$$C_{n+2} = -\frac{n^2-1}{2(n+2)(n+1)} C_n$$

نحسب بعض الحدود:

$$C_2 = \frac{1}{4} C_0, \quad C_3 = 0$$

$$C_4 = -\frac{1}{32} C_0, \quad C_6 = \frac{1}{128} C_0$$

إذن الحل:

$$y = C_0 \left(1 + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{32} x^4 + \frac{1}{128} x^6 + \dots \right) + C_1 x$$

ومنه الحل العام للمعادلة (5.1) :

$$y = A \left(1 + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{32} x^4 + \frac{1}{128} x^6 + \dots \right) + Bx$$

3.1 معادلة فروبنْيوس:

1.3.1 تعريف:

لقد سبق وتطرقنا لحل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية في صورة سلسلة القوى في حالة إذا كانت $x = a$ نقطة عادية في الفصل الأول.

تعريف 1.3.1:

طريقة فروبنْيوس تدرس في حالة ما إذا كانت $x = a$ نقطة شاذة منتظمة. وفي هذه الحالة نفترض أن الحل على الصورة:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^{n+r}$$

أما إذا كانت $x = 0$ نقطة الشاذة المنتظمة، فإن:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

حيث r عدد حقيقي.

حساب المعاملات يكون عن طريق تعويض السلسلة و مشتقاتها y, y', y'' في المعادلة التفاضلية.

ملاحظة:

إن لم نذكر النقطة فإننا نعتبر $x = 0$.

المعادلة الدليلية

تعريف 2.3.1:

هي معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) تظهر عند استخدام طريقة فروبنوس لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية في جوار نقطة شاذة منتظمة. إذا كانت المعادلة التفاضلية:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (6.1)$$

وكانت $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة، فإن المعادلة الدليلية تأخذ الشكل العام التالي:

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0 \quad (7.1)$$

حيث أن:

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xP(x) \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2Q(x)$$

وسوف نوضح طريقة الحل بالمثال التالي:

مثال 1.3.1

إيجاد حل المعادلة التفاضلية:

$$3xy'' + (x+1)y' + \frac{1}{2}y = 0 \quad (8.1)$$

في صورة سلسلة قوى x .
نقسم المعادلة (8.1) على $3x$:

$$y'' + \frac{x+1}{3x}y' + \frac{1}{6x}y = 0, \quad x \neq 0$$

نلاحظ أن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة. بالفعل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)x}{3x} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2})x^2}{3x} = 0$$

بتطبيق طريقة فروبنوس.
نفرض حلاً على الشكل:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}, \quad C_0 \neq 0$$

لنحسب المشتقات:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة (8.1) نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}C_nx^{n+r} = 0$$

أي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(3n+3r-2)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(n+r+\frac{1}{2}\right)x^{n+r} = 0$$

بمساواة معاملات x^{n+r-1} بالصفر نحصل على:

$$C_n(n+r)(3n+3r-2) + C_{n-1}\left(n+r-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (9.1)$$

نضع $n=0$ في المعادلة (9.1) فنحصل على:

$$C_0r(3r-2) + C_{-1}\left(r-\frac{1}{2}\right) = 0$$

حيث أن $C_{-1} = C_{-2} = 0$
إذن:

$$C_0r(3r-2) = 0$$

وباعتبار $C_0 \neq 0$ نحصل على المعادلة:

$$r(3r-2) = 0 \quad (10.1)$$

المعادلة (10.1) تسمى المعادلة الدليلية و منه نجد أن:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{2}{3}$$

ومن المعادلة (9.1) نحصل على العلاقة التكرارية:

$$C_n = -\frac{(n+r+\frac{1}{2})}{(n+r)(3n+3r-2)} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

وسوف نجد قيم C_n المختلفة بدلالة C_0 حيث $C_0 \neq 0$ في حالي جذري المعادلة (10.1)

الحالة الأولى: $r=0$

$$C_n = -\frac{(n+\frac{1}{2})}{n(3n-2)} C_{n-1}$$

لما $n = 1$

$$C_1 = -\frac{\frac{3}{2}}{1(1)} C_0 = -\frac{3}{2} C_0$$

لما $n = 2$

$$C_2 = -\frac{\frac{5}{2}}{2(4)} C_1 = \frac{(-5)(-3)}{2(16)} C_0 = \frac{15}{32} C_0$$

لما $n = 3$

$$C_3 = \frac{-\frac{7}{2}}{3(7)} C_2 = \frac{(-2)(15)}{3(32)} C_0 = -\frac{5}{16} C_0, \dots$$

الحالة الثانية: $r = \frac{2}{3}$

$$C_n = -\frac{(n + \frac{7}{6})}{3n(n + \frac{2}{3})} C_{n-1}$$

لما $n = 1$

$$C_1 = -\frac{1 + \frac{7}{6}}{3(\frac{5}{3})} C_0 = -\frac{13}{30} C_0$$

لما $n = 2$

$$C_2 = -\frac{\frac{19}{6}}{6(\frac{8}{3})} C_1 = \frac{-19}{96} C_1 = \frac{(-19)(-13)}{(30)(96)} C_0 = \frac{247}{2880} C_0$$

لما $n = 3$

$$C_3 = -\frac{\frac{25}{6}}{9(\frac{11}{3})} C_2 = \frac{-25}{198} C_2 = \frac{(-25)(247)}{(198)(2880)} C_0 = -\frac{1235}{114048} C_0, \dots$$

وعليه:

$$y = A_1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+0} + A_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\frac{2}{3}}$$

أي:

$$y = A_1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n + A_2 x^{\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

وبفرض $C_0 = 1$ فإن الحل العام للمعادلة (8.1) هو:

$$y = A_1 \left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{32}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots \right) + A_2 \left(1 - \frac{13}{30}x + \frac{247}{2880}x^2 - \frac{1235}{114048}x^3 + \dots \right) x^{\frac{2}{3}}$$

ملاحظة :

من خلال المثال السابق نلاحظ أنّ جذري المعادلة الدليلية هما

$$r = 0 \quad \text{و} \quad r = \frac{1}{2}.$$

وعليه فإن الجذرين مختلفان، كما أنّ الفرق بينهما عدد كسري.

بصفة عامة، توجد ثلاث حالات لجذري المعادلة الدليلية، وهي:

1. الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد كسري.

2. الجذران متساويان.

3. الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح.

2.3.1 الحالة الأولى: الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد كسري

الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد كسري
سبق وقمنا بدراسة الحالة الأولى في المثال السابق، نكتفي بعرض مثال آخر.

مثال 2.3.1

إيجاد حل المعادلة التفاضلية:

$$5x(2-x)y'' + (2-x)y' + y = 0 \quad (11.1)$$

في صورة سلسلة قوة x

نرى ان $x = 0$ نقطة شاذة و بما أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)x}{5x(2-x)} = \frac{1}{5}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{5x(2-x)} = 0$$

فإن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة

بتطبيق طريقة فروبنيوس نفرض ان الحل على الصورة:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}, \quad C_0 \neq 0$$

لنحسب المشتقات:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة (11.1) نحصل على:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} 10C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 5C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n(n+r)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

بمساواة معاملات x^{n+r-1} بالصفر:

$$10C_n(n+r)(n+r-1) - 5C_{n-1}(n+r-1)(n+r-2) + 2C_n(n+r) - C_{n-1}(n+r-1) + C_{n-1} = 0$$

$$C_n(n+r)(10n+10r-8) - C_{n-1}((n+r-1)(5n+5r-9)-1) = 0$$

$$C_n(n+r)(10n+10r-8) - C_{n-1}(5(n+r)^2 - 14(n+r) + 8) = 0$$

$$C_n(n+r)(10n+10r-8) - C_{n-1}((n+r)(5n+5r-14) + 8) = 0 \quad (12.1)$$

نضع $n=0$ في المعادلة (12.1) فنحصل على:

$$C_0 r(10r-8) - C_{-1} r((5r-14) + 8) = 0$$

حيث $C_0 = 0$ و C_{-1} اختيارية
فإن:

$$C_0 r(10r-8) = 0$$

ومنه المعادلة الدليلية هي :

$$r(10r-8) = 0$$

إذن الجذور هي

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{4}{5}$$

من المعادلة (12.1)

نحصل على :

$$C_n = \frac{((n+r)(5n+5r-14) + 8)}{(n+r)(10n+10r-8)} C_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (13.1)$$

بتعويض الجذرين r_1, r_2 في المعادلة (13.1) لما $r=0$

$$C_n = \frac{(n(5n-14) + 8)}{n(10n-8)} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$C_n = \left(\frac{(5n-14)}{(10n-8)} + \frac{8}{n(10n-8)} \right) C_{n-1},$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}C_0, C_2 = 0, C_3 = 0, \dots$$

إذن

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$y_1 = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$r = \frac{4}{5} \text{ لما}$$

$$C_n = \left(\frac{(5n+4-14)}{(10n)} + \frac{8}{(n+\frac{4}{5})(10n)} \right) C_{n-1},$$

$$C_n = \left(\frac{(n-2)}{(2n)} + \frac{8}{(n+\frac{4}{5})(10n)} \right) C_{n-1},$$

$$C_1 = -\frac{1}{18}C_0, C_2 = \frac{1}{7}C_1 = -\frac{1}{126}C_0, C_3 = \frac{9}{38}C_2 = -\frac{9}{4788}C_0, \dots$$

إذن

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\frac{4}{5}}$$

$$y_2 = \left(1 - \frac{1}{18}x - \frac{1}{126}x^2 - \frac{9}{4788}x^3\right) x^{\frac{4}{5}}$$

ومنه الحل العام للمعادلة (11.1) يكون على الصورة :

$$y = A \left(1 - \frac{1}{2}x\right) + B \left(1 - \frac{1}{18}x - \frac{1}{126}x^2 - \frac{9}{4788}x^3 - \dots\right) x^{\frac{4}{5}}$$

حيث A, B ثابتان اختياريان.

3.3.1 الحالة الثانية: الجذران متساويان

في هذه الحالة نجد أن

$$r = r_1 = r_2$$

وبذلك نحصل على حل واحد فقط:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^{n+r}$$

لكن للحصول على الحل الثاني المستقل خطياً، نفترض:

$$y = f(x, r)$$

وقد ثبت أن الحل الثاني يكون على الصورة:

$$y_2(x) = \left. \frac{\partial y(x, r)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \left. \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^{n+r} \right|_{r=r_1}$$

$$\Rightarrow y_2(x) = y_1(x) \ln(x-a) + \sum_{n=0}^{\infty} C'_n (x-a)^{n+r_1}$$

ويكون الحل العام:

$$y = Ay_1 + By_2$$

حيث A, B ثابتان اختياريان.

مثال 3.3.1

إيجاد حل المعادلة التفاضلية:

$$xy'' + y' + y = 0 \quad (14.1)$$

في صورة سلسلة قوى في x .

نرى أن $x = 0$ نقطة شاذة، وعلى ذلك فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

إذن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفترض أن الحل على الصورة:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (14.1) نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

بمساواة معامل x^{n+r-1} بالصفر (لأصغر أس):

$$C_n (n+r)(n+r-1) + C_n (n+r) + C_{n-1} = 0$$

$$C_n ((n+r)(n+r)) = -C_{n-1}$$

$$C_n(n+r)^2 = -C_{n-1} \quad (15.1)$$

بوضع $n = 0$:

$$C_0 r^2 = -C_{-1}$$

حيث $C_{-1} = 0$ و C_0 اختيارية
فإن: $r^2 = 0$
وبالتالي

$$r^2 = 0 \Rightarrow r = 0$$

أي أن جذري المعادلة الدليلية متساويان.
ومن (15.1) نحصل على العلاقة التكرارية:

$$C_n = -\frac{1}{(n+r)^2} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

وبذلك يمكن إيجاد قيم $C_1, C_2, C_3, \dots$ بدلالة r .

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{(1+r)^2} C_0 \\ C_2 &= -\frac{1}{(2+r)^2} C_1 = \frac{1}{((1+r)(2+r))^2} C_0 \\ C_3 &= -\frac{1}{(3+r)^2} C_2 = -\frac{1}{((1+r)(2+r)(3+r))^2} C_0 \\ &\vdots \\ C_n &= \frac{(-1)^n}{(n+r)^2} C_{n-1} = \frac{(-1)^n}{((1+r)(2+r)(3+r) \dots (n+r))^2} C_0 \end{aligned}$$

و بإفتراض $C_0 = 1$
يكون الحل الأول كما يلي :

$$y_1(x, r) = x^r + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^{n+r} \quad x > 0$$

حيث:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(-1)^n}{((1+r)(2+r)(3+r) \dots (n+r))^2}, \quad n \geq 1 \\ {}_1(x, r) &= x^r \left[1 - \frac{1}{(1+r)^2} x + \frac{1}{((1+r)(2+r))^2} x^2 - \frac{1}{((1+r)(2+r)(3+r))^2} x^3 + \dots \right] y \\ {}_1(x, 0) &= \left[1 - x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{36} x^3 + \dots \right] y \end{aligned}$$

كما أن:

$$\left. \frac{\partial y(x, r)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = x^{r_1} \ln(x) \left[1 + \frac{1}{(1+r_1)^2} x + \frac{1}{((1+r_1)(2+r_1))^2} x^2 + \frac{1}{((1+r_1)(2+r_1)(3+r_1))^2} x^3 + \dots \right] +$$

$$2x^r \left[\frac{1}{(1+r)^3} x - \left[\frac{1}{(1+r)^2(2+r)^3} + \frac{1}{(1+r)^3(2+r)^2} \right] x^2 - \left[\frac{1}{(1+r)^2(2+r)^2(3+r)^3} + \frac{1}{(1+r)^2(2+r)^3(3+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3(2+r)^2(3+r)^2} \right] x^3 \dots \right]$$

$$y_2(x, 0) = \frac{\partial y(x, r)}{\partial r} \Big|_{r=0} = \ln(x) \left[1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \dots \right] + \left[2x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{108}x^3 + \dots \right]$$

ويكون الحل العام للمعادلة (14.1) هو :

$$y = A \left[1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \dots \right] + B \left[\ln(x) \left[1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \dots \right] + \left[2x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{108}x^3 + \dots \right] \right]$$

حيث A, B ثابتان اختياريان.

4.3.1 الحالة الثالثة: الفرق بين جذري المعادلة الدليلية عدد صحيح موجب

في هذه الحالة يكون جذرا المعادلة الدليلية r_1, r_2 حيث $r_2 > r_1$ فإن $r_2 - r_1$ عدداً صحيحاً موجباً. في هذه الحالة يعطي r_2 (أكبر الجذرين) حلاً، وليكن y_2 ، في حين يعطي الجذر r_1 حلاً وقد لا يعطي. في حالة إذا وجد الحل y_1 من r_1 فإن الحل العام يكون:

$$y = Ay_1 + By_2$$

حيث A, B ثابتان اختياريان. بينما في حالة أن r_1 لا يعطي حلاً فإننا نضع

$$C_0 = b_0(r - r_1)$$

في الحل الناتج، وليكن الحل بعد التعويض على الصورة $\bar{y}$ ، فإن الحل العام يكون:

$$y = A\bar{y} \Big|_{r=r_1} + B \frac{\partial \bar{y}}{\partial r} \Big|_{r=r_1}$$

مثال 4.3.1

إيجاد حل المعادلة التفاضلية:

$$xy'' - 2y' + xy = 0 \quad (16.1)$$

في صورة سلسلة قوى x . حيث أن $x = 0$ نقطة شاذة فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x} = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0$$

إذن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفترض الحل على الصورة:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

إذا

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}$$

و

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (16.1) نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n (n+r) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0$$

بمساواة معامل x^{n+r-1} بالصفر نحصل على:

$$C_n (n+r)(n+r-3) + C_{n-2} = 0$$

بوضع $n=0$ تصبح :

$$C_0 r(r-3) + C_{-2} = 0$$

وحيث أن $C_0 \neq 0$ و $C_{-2} = 0$ نحصل على المعادلة الدليلية:

$$r(r-3) = 0$$

أي:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 3$$

نلاحظ أن:

$$r_2 - r_1 = 3$$

وهو عدد صحيح موجب.
وتكون العلاقة التكرارية:

$$C_n = -\frac{1}{(n+r)(n+r-3)} C_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (17.1)$$

بوضع $n=1$ نجد من المعادلة (17.1) أن :

$$C_1 = 0$$

وبالتالي فإن جميع المعاملات الفردية تساوي صفراً.

$$C_2 = -\frac{1}{(r-1)(r+2)}C_0$$

$$C_4 = \frac{(-1)^2}{(r-1)(r+1)(r+2)(r+4)}C_0$$

$$C_6 = \frac{(-1)^3}{(r-1)(r+1)(r+3)(r+2)(r+4)(r+6)}C_0 \vdots$$

نفرض أن $C_0 = 1$ نحصل على

$$y(x, r) = x^r \left[1 - \frac{1}{(r-1)(r+2)}x^2 + \frac{(-1)^2}{(r-1)(r+1)(r+2)(r+4)}x^4 + \frac{(-1)^3}{(r-1)(r+1)(r+3)(r+2)(r+4)(r+6)}x^6 + \dots \right]$$

حيث أن جميع المعاملات معرفة عند $r = 0$ فإن :

$$y_1 = y(x, 3) = x^3 \left[1 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{280}x^4 - \frac{1}{15120}x^6 + \dots \right]$$

ويكون الحل الثاني هو :

$$y_2 = y(x, 0) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{144}x^6 + \dots$$

ومنه الحل العام (16.1) هو

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$y = A \left[x^3 \left(1 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{280}x^4 - \frac{1}{15120}x^6 + \dots \right) \right] + B \left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{144}x^6 + \dots \right]$$

حيث A, B ثابتان اختياريان.

5.3.1 حل المعادلة التفاضلية في سلسلة القوى في حالة x كبير جدا :

نفترض أن المعادلة المعطاة هي

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (18.1)$$

ولنفرض أننا نريد إيجاد حل للمعادلة (18.1) للمتغير x حول المالا نهاية (∞) ، ولهذا الغرض فإننا نستبدل المتغير x بالمتغير w بالتحويل التالي

$$x = \frac{1}{w} \quad \text{أي} \quad w = \frac{1}{x} \quad (19.1)$$

وهذا التحويل يحول قيم x الكبيرة إلى قيم w الصغيرة، وباستخدام (19.1) فإننا نكتب المعادلة (18.1) ونحصل على المعادلة الناتجة حول $w = 0$ أي

$$\frac{d^2y}{dw^2} + P_1(w)\frac{dy}{dw} + Q_1(w)y = 0 \quad (20.1)$$

وعلى ذلك يقال إن المعادلة (18.1) لها نقطة شاذة منتظمة عند $x = \infty$ إذا كانت للمعادلة المحولة (20.1) نقطة شاذة منتظمة عند $w = 0$.

مثال 5.3.1

حل المعادلة التفاضلية التالية من أجل قيم x الكبيرة جداً:

$$2x^3 y'' + x^2 y' + y = 0 \quad (21.1)$$

لإيجاد الحلول بدلالة قيم x كبيرة جداً، نضع:

$$w = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{w}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dw} = -w^2 \frac{dy}{dw}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dw} \left(-w^2 \frac{dy}{dw} \right) \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{x^2} \left(-w^2 \frac{d^2 y}{dw^2} - 2w \frac{dy}{dw} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = w^4 \frac{d^2 y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw}$$

بالتعويض في (21.1) :

$$\frac{2}{w^3} \left[w^4 \frac{d^2 y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw} \right] + \left(\frac{1}{w^2} \right) \left(-w^2 \frac{dy}{dw} \right) + y = 0$$

وعليه:

$$2w \frac{d^2 y}{dw^2} + 3 \frac{dy}{dw} + y = 0 \quad (22.1)$$

وعلى ذلك فإن $w = 0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (22.1) بالفعل:

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{3w}{2w} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{w^2}{2w} = 0$$

وبالتالي فإن النقطة x عند اللانهاية تكون نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (21.1) نفرض أن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+r}$$

أي :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)w^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)w^{n+r-2}$$

و بالتعويض في (22.1) نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n(n+r)(n+r-1)w^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n(n+r)w^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+r} = 0$$

بتوحيد القوى نحصل على :

$$C_n(n+r)(2n+2r+1) + C_{n-1} = 0 \quad 2C_n(n+r)(n+r-1) + 3C_n(n+r) + C_{n-1} = 0$$

في حالة $n=0$:

$$C_0 r(2r+1) + C_{-1} = 0$$

حيث $C_{-1} = 0$ و C_0 اختيارية
فإن :

$$r(2r+1) = 0 \Rightarrow r = 0; r = -\frac{1}{2}$$

و بالتالي :

$$C_n(n+r)2(n+r)(n+r-1) + 4C_n = C_{n-1}(n+r-2)$$

نحصل على :

$$C_n(n+r)(2n+2r+1) = -C_{n-1}$$

$$C_n = \frac{-1}{(n+r)(2n+2r+1)}, C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

لما $r=0$

تصبح :

$$C_n = \frac{-1}{(n)(2n+1)}, C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

وعليه :

$$C_1 = \frac{-1}{(1)(3)} C_0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{3} C_0$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{-1}{10} C_1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{30} C_0 \\ C_3 &= \frac{-1}{21} C_2 \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{630} C_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

إذن

$$y_1(w) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^n$$

وبالتالي:

$$y_1 = 1 - \frac{1}{3} w + \frac{1}{30} w^2 - \frac{1}{630} w^3 + \dots$$

لما $r = -\frac{1}{2}$
تصبح:

$$C_n = \frac{-1}{(n-\frac{1}{2})(2n)}, C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

وعليه:

$$C_1 = \frac{-1}{(\frac{1}{2})(2)} C_0 \Rightarrow C_1 = -C_0$$

$$C_2 = \frac{-1}{6} C_1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{6} C_0$$

$$C_3 = \frac{-1}{15} C_2 \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{90} C_0 \vdots$$

إذن:

$$y_2(w) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n-\frac{1}{2}} y_2 = w^{-\frac{1}{2}} [1 - w + \frac{1}{6} w^2 - \frac{1}{90} w^3 + \dots]$$

ومنه الحل العام هو $y = Ay_1 + By_2$

أي حل المعادلة (22.1) هو:

$$y(w) = A \left[1 - \frac{1}{3}w + \frac{1}{30}w^2 - \frac{1}{630}w^3 \dots \right] + B w^{-\frac{1}{2}} \left[1 - w + \frac{1}{6}w^2 - \frac{1}{90}w^3 \dots \right]$$

ومنه الحل للمعادلة (21.1) هو:

$$y(x) = A \left[1 - \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{30}x^{-2} - \frac{1}{630}x^{-3} \dots \right] + B x^{\frac{1}{2}} \left[1 - x^{-1} + \frac{1}{6}x^{-2} - \frac{1}{90}x^{-3} \dots \right]$$

حيث A, B ثابتان إختاريان.

4.1 معادلة لجندر ودوالها الخاصة

تعريف 1.4.1:

تُعرف معادلة لجندر من الرتبة n بالصيغة:

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0, \quad (23.1)$$

حيث n عادةً عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$.

ملاحظة: بقسمة المعادلة (23.1) على $1-x^2$ (حيث $x \neq \pm 1$) نحصل على الصيغة القياسية:

$$y''(x) - \frac{2x}{1-x^2}y'(x) + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y(x) = 0.$$

ومنه:

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{n(n+1)}{1-x^2}.$$

نلاحظ أن $p(x)$ و $q(x)$ غير معرفتين عند $x = \pm 1$. نحدد طبيعة هاتين النقطتين باستعمال النهايات. عند $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)p(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{1+x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^2 q(x) = 0.$$

وعند $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)p(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x}{1-x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 q(x) = 0.$$

بما أن هذه النهايات منتهية، فإن النقطتين

$$x = \pm 1$$

هما نقطتان شاذتان منتظمتان.

نظرية 4.1.1

لمعادلة لجندر من الرتبة n :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad x \in]-1, 1[$$

يوجد حلان مستقلان خطياً يُشكّلان أساس فضاء الحلول. الحلان يُسميان عادةً $P_n(x)$ و $Q_n(x)$ ، حيث P_n دالة لجندر من النوع الأول و Q_n من النوع الثاني. وبذلك يُكتب الحل العام:

$$y(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

قضية 4.1.1

الحلان $P_n(x)$ و $Q_n(x)$ مستقلان خطياً على المجال $]-1, 1[$ ومحدد ورونسكي لهما يحقق:

$$W(P_n, Q_n)(x) = \frac{1}{1-x^2} \neq 0.$$

برهان.
نعتبر معادلة لجندر في صيغتها القياسية:

$$y''(x) - \frac{2x}{1-x^2} y'(x) + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y(x) = 0,$$

حيث:

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad x \in]-1, 1[$$

من نظرية المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية، نعلم أن محدد ورونسكي

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2, \quad x \in]-1, 1[$$

يحقق المعادلة التفاضلية:

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0.$$

بتعويض قيمة $p(x)$ نحصل على:

$$W'(x) - \frac{2x}{1-x^2} W(x) = 0.$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى قابلة للفصل، فنكتب:

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = \frac{2x}{1-x^2}.$$

بالتكامل:

$$\ln |W(x)| = -\ln(1-x^2) + C.$$

ومنه:

$$W(x) = \frac{C}{1-x^2}, \quad x \in]-1, 1[$$

حيث C ثابت حقيقي غير منعدم.

وباختيار الحلين القياسيين $P_n(x)$ و $Q_n(x)$ ، نأخذ عادةً $C = 1$ ، فنحصل على:

$$W(P_n, Q_n)(x) = \frac{1}{1-x^2} \neq 0, \quad x \in]-1, 1[.$$

إذن الدالتين $P_n(x)$ و $Q_n(x)$ مستقلتان خطياً على المجال $]-1, 1[$.

□

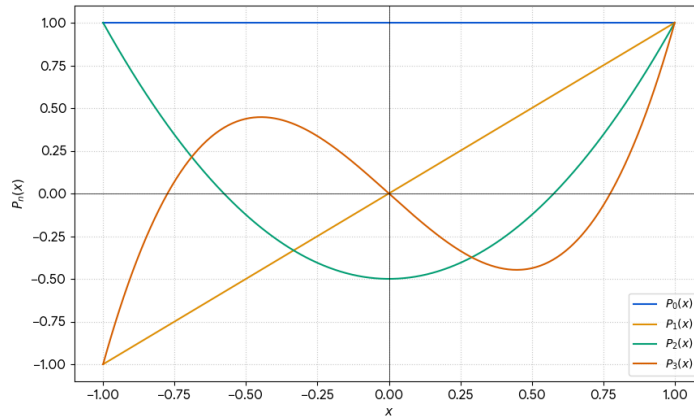
1.4.1 دوال لجندر من النوع الاول والثاني

تعريف 2.4.1:

تُعرف دالة لجندر من النوع الأول $P_n(x)$ بأنها الحل المنتظم لمعادلة لجندر عندما يكون $n \in \mathbb{N}$ ، ويمكن كتابتها على شكل سلسلة منتهية (كثير حدود) تُستخرج من حل فروبنوس، وتُعطى بالصيغة الجبرية:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{2^n} \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

وتُبين هذه الصيغة أن $P_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n .



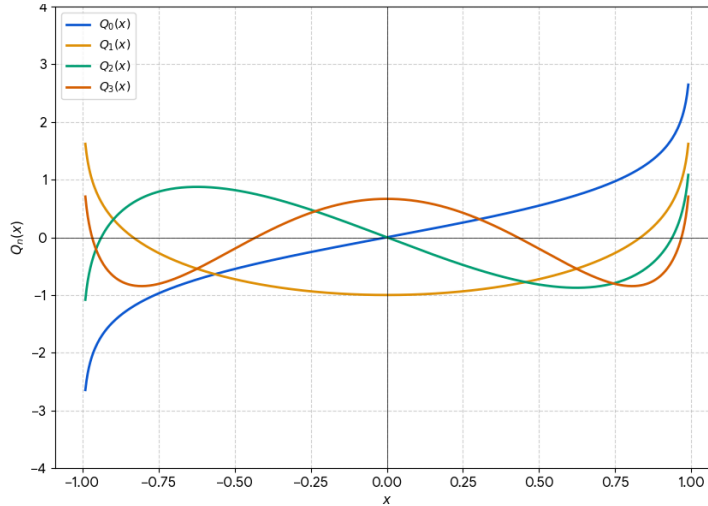
شكل 1.1: تمثيل بياني لدوال لجندر النوع الأول P_n من أجل $n = 0, 1, 2, 3$.

ملاحظة: نلاحظ أن قيمة M تعتمد على العدد n ، حيث:

$$\begin{cases} M = \frac{n}{2}, & n = 2k \\ M = \frac{n+1}{2}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

تعريف 3.4.1:

تُعرف دالة لجندر من النوع الثاني $Q_n(x)$ بأنها الحل الثاني المستقل خطياً عن $P_n(x)$ لمعادلة لجندر. ولا تكون $Q_n(x)$ متعددة حدود، بل تحتوي عادةً على حدود لوغاريتمية، ويمكن الحصول عليها إما باستعمال طريقة تغيير الثابت، أو باعتبار حد خاص لسلاسل فروبنوس عند تكرار جذور معادلة المؤشر.



شكل 1.2: تمثيل بياني لدوال لجندر النوع الثاني Q_n من أجل $n = 0, 1, 2, 3$.

ملاحظة:

- دوال لجندر من النوع الأول $P_n(x)$ منتظمة ومحدودة على المجال $[-1, 1]$ ، ولهذا تُستعمل بكثرة في التطبيقات الفيزيائية ذات الشروط الحدية المنتظمة.
- دوال لجندر من النوع الثاني $Q_n(x)$ تُظهر سلوكاً لوغاريتمياً وتكون غير معرفة عند $x = \pm 1$ ، مما يجعل استعمالها الفيزيائي مقيداً.

2.4.1 تطبيق خطوات حل معادلة لجندر

نعتبر معادلة لجندر من الرتبة n :

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0. \quad (24.1)$$

نلاحظ أن النقطة $x = 0$ نقطة عادية، لذلك يمكن البحث عن حل على شكل سلسلة قوى:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

نحسب المشتقات:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

بالتعويض في المعادلة (18.3) نحصل على:

$$(1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

بعد ترتيب الحدود وتوحيد الأسس، نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k(k(k-1) + 2k - n(n+1))]x^k = 0.$$

وبمساواة معاملات كل قوة من x بالصفري، نستنتج العلاقة التكرارية:

$$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)} a_k, \quad k \geq 0.$$

ملاحظة: هذه العلاقة تبين أن معاملات السلسلة تنقسم إلى سلسلتين مستقلتين: إحداهما تعتمد على a_0 فقط، والأخرى تعتمد على a_1 فقط.

إذا اخترنا $a_0 \neq 0$ و $a_1 = 0$ ، نحصل على سلسلة زوجية:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{n(n+1)}{2!} a_0, \\ a_4 &= \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0, \\ a_6 &= -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} a_0, \dots \end{aligned}$$

أما إذا اخترنا $a_1 \neq 0$ و $a_0 = 0$ ، فنحصل على سلسلة فردية:

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1, \\ a_5 &= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1, \\ a_7 &= -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} a_1, \dots \end{aligned}$$

وعليه يكون الحل العام على الصورة:

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

حيث:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots, \\ y_2(x) &= x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots. \end{aligned}$$

نتيجة

إذا كان n عدداً صحيحاً، فإن إحدى السلسلتين تنتهي وتُعطى كثيرة حدود من الدرجة n ، وهي دالة لجذر من النوع الأول $P_n(x)$ ، بينما السلسلة الأخرى لا تنتهي وتمثل دالة لجذر من النوع الثاني $Q_n(x)$.

مثال 1.4.1

نعتبر معادلة لجذر من الرتبة $n = 0$:

$$(1 - x^2)y''(x) - 2x y'(x) = 0. \quad (25.1)$$

بما أن $x = 0$ نقطة عادية، نبحث عن حل على شكل سلسلة قوى:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

نحسب المشتقات:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

بالتعويض في المعادلة (19.3) نحصل على:

$$(1 - x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = 0.$$

نقوم أولاً بتوزيع $(1 - x^2)$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k = 0.$$

الآن نوحّد القوى لتصبح جميعها من الشكل x^k .
الحد الأول يحتوي x^{k-2} ، لذلك نضع:

$$m = k - 2 \quad \Rightarrow \quad k = m + 2.$$

عندما $k = 2$ فإن $m = 0$.
إذن:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m.$$

نستبدل m بـ k :

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k.$$

الحدان الآخران هما أصلاً بدلالة x^k :

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k.$$

الآن نكتب المعادلة كاملة بدلالة x^k :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k = 0.$$

نجمع الحدين الأخيرين:

$$-k(k-1) - 2k = -k^2 + k - 2k = -k(k+1).$$

إذن تصبح:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)a_k x^k = 0.$$

بمساواة معاملات x^k بالصفر لكل $k \geq 0$ نحصل على:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k+1)a_k = 0.$$

وبتبسيطها:

$$(k+2)a_{k+2} - k a_k = 0.$$

ومنه نحصل على العلاقة التكرارية :

$$a_{k+2} = \frac{k}{k+2} a_k.$$

الحل الأول: دالة لجندّر من النوع الأول
نختار:

$$a_0 \neq 0, \quad a_1 = 0.$$

من العلاقة التكرارية نجد:

$$a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0.$$

إذن الحل يختزل في:

$$y(x) = a_0.$$

وباختيار $a_0 = 1$ نحصل على:

$$P_0(x) = 1.$$

الحل الثاني: دالة لجندر من النوع الثاني
نعود إلى المعادلة:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' = 0.$$

نلاحظ أنها تكتب على شكل مشتقة جداء:

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)y'(x)) = 0.$$

حساب التكامل الأول
بما أن المشتقة تساوي صفراً فإن:

$$(1-x^2)y'(x) = C_1.$$

إذن:

$$y'(x) = \frac{C_1}{1-x^2}.$$

نقوم بتحليل الكسر
نكتب:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}.$$

نستعمل التحليل إلى كسور بسيطة:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}.$$

بحل المعادلة نجد:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

إذن:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right).$$

حساب التكامل الثاني
نكتب:

$$y(x) = C_1 \int \frac{dx}{1-x^2}.$$

وبالتعويض:

$$y(x) = \frac{C_1}{2} \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx.$$

نحسب كل تكامل على حدى:

$$\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln|1-x|,$$

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x|.$$

إذن:

$$y(x) = \frac{C_1}{2} (-\ln|1-x| + \ln|1+x|) + C_2.$$

وباستخدام خواص اللوغاريتم:

$$y(x) = \frac{C_1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C_2.$$

نستبعد الحل الثابت (لأنه يمثل P_0) فنعرّف:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

الحل العام

إذن الحل العام للمعادلة (19.3) هو:

$$y(x) = C_1 P_0(x) + C_2 Q_0(x) = C_1 + C_2 \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

5.1 معادلة بسل ودوالها الخاصة :

1.5.1 تعريف معادلة بسل

تعريف 1.5.1:

تُسمى معادلة بسل من الرتبة n المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية المعرفة على الشكل:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0, \quad (26.1)$$

حيث $n \in \mathbb{Z}$.

ملاحظة:

1. عند كتابة المعادلة (26.1) بالشكل القياسي نجد :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \quad \forall x \neq 0$$

نلاحظ أن الدالتين

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}$$

ليستا منتهيتين عند $x = 0$ ، وبالتالي تكون $x = 0$ نقطة شاذة للمعادلة (26.1).

2. للتحقق مما إذا كانت النقطة $x = 0$ شاذة منتظمة أم شاذة غير منتظمة، نحسب النهايتين:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x P(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 Q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - n^2) = -n^2.$$

بما أن النهايتين منتهيتين فإن $x = 0$ تُعدُّ نقطة شاذة منتظمة، وهذا يسمح بتطبيق طريقة فروبنوس لإيجاد حلول سلسلة حول $x = 0$.

2.5.1 تطبيق طريقة فروبنوس على معادلة بسل

نعتبر معادلة بسل من الرتبة n :

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (27.1)$$

ملاحظة: النقطة $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة، ومن ثم يمكن تطبيق طريقة فروبنوس للبحث عن حلول سلسلة حول هذه النقطة.

فرضية أُلُّلْ بَطْرِبَقَة فَرْوَبْنَبُوس

نبحث عن الحل على الشكل:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}, \quad a_0 \neq 0,$$

حيث r عدد حقيقي يُحدد لاحقاً.
نحسب المشتقات:

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}.$$

بالتعويض في (27.1) نحصل على:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r-1} + (x^2 - n^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0.$$

نُبَسِّطُ كُلَّ حَد:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r} - n^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+2} = 0.$$

نجمع الحدود المتشابهة:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [(k+r)^2 - n^2] x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+2} = 0.$$

مُتَابَعَة أَلْمَصَوِّفِ بِنَفْسِ الْقُوَّة

نعيد فهرسة المجموع الثاني بوضع $k \mapsto k-2$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k ((k+r)^2 - n^2) + a_{k-2}] x^{k+r} = 0.$$

وبما أن هذه المساواة صحيحة لكل x ، فإن معاملات كل قوة من x^{k+r} تنعدم.

أَلْمَعَامِلَاتُ أَلْصَّالِبَةُ

ننظر إلى أصغر أس، الموافق لـ $k=0$ نجد:

$$a_0(r^2 - n^2) = 0.$$

وبما أن $a_0 \neq 0$ ، نحصل على:

المعادلة التفاضلية

$$r^2 - n^2 = 0 \implies r_1 = n, r_2 = -n.$$

العلاقة التكرارية

لكل $k \geq 0$ نحصل على:

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+r+2)^2 - n^2} a_k.$$

ملاحظة: تُبين هذه العلاقة أن معاملات السلسلة تنقسم إلى سلسلتين مستقلتين: إحداهما تعتمد على a_0 ، والأخرى على a_1 ، وهو ما يؤدي إلى حلين مستقلين خطياً.

نتيجة

تطبيق طريقة فروبنوس على معادلة بسل حول النقطة $x = 0$ يعطي حلين مستقلين خطياً، يُعرفان لاحقاً بدوال بسل من النوع الأول والثاني.

مثال 1.5.1

لنجد حلاً لمعادلة بسل من الرتبة $n = 1$ بطريقة فروبنوس
لنعتبر المعادلة:

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - 1)y(x) = 0. \quad (28.1)$$

بما أن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة، نبحث عن حل على شكل سلسلة فروبنوس:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}, \quad a_0 \neq 0.$$

نحسب المشتقات:

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}.$$

بالتعويض في المعادلة (28.1) نحصل على:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r-1} + (x^2 - 1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0.$$

وبالتبسيط:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [(k+r)^2 - 1] x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+2} = 0.$$

نعيد فهرسة المجموع الثاني:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k ((k+r)^2 - 1) + a_{k-2}] x^{k+r} = 0.$$

المعادلة الصالبة

ننظر إلى أصغر قوة لـ x أي عند $k=0$ نجد:

$$a_0(r^2 - 1) = 0.$$

وبما أن $a_0 \neq 0$ ، فإن:

$$r^2 - 1 = 0 \implies r_1 = 1, r_2 = -1.$$

العلاقة المتكررة

لكل $k \geq 0$ نحصل على:

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+r+2)^2 - 1} a_k. \quad (29.1)$$

الحل الأول ($r = 1$)

نعوض $r = 1$ في العلاقة (29.1) فنجد:

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+3)^2 - 1} a_k = -\frac{1}{(k+2)(k+4)} a_k.$$

نختار:

$$a_0 \neq 0, \quad a_1 = 0.$$

نحسب بعض المعاملات:

$$a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4} a_0 = -\frac{1}{8} a_0,$$

$$a_4 = -\frac{1}{4 \cdot 6} a_2 = \frac{1}{192} a_0,$$

$$a_6 = -\frac{1}{6 \cdot 8} a_4 = -\frac{1}{9216} a_0.$$

ومن ثم يكون الحل:

$$y_1(x) = a_0 \left(x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{192} - \frac{x^7}{9216} + \dots \right).$$

$y_1(x)$: هو الحل المنتظم عند $x = 0$ ، ويمثل دالة بسل من النوع الأول، أي الحل المحدود عند الصفر.

الحل الثاني ($r = -1$)

نعرض $r = -1$ في العلاقة (29.1) فنجد:

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+1)^2 - 1} a_k = -\frac{1}{k(k+2)} a_k.$$

نختار:

$$a_0 \neq 0, \quad a_1 = 0.$$

ومن ثم نحصل على حل يبدأ بـ:

$$y_2(x) = \frac{a_0}{x} + \dots$$

$y_2(x)$: هو الحل الثاني غير المنتظم عند $x = 0$ ، ويحتوي على حد من الشكل $\frac{1}{x}$ ، وبالتالي فهو يمثل دالة بسل من النوع الثاني (حل غير محدود عند الصفر).

إذن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ يمثلان حلان للعادلة (28.1) حول النقطة $x = 0$ باستعمال طريقة فروبنوس. ويكتب الحل العام من الشكل:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

لقد أظهرت طريقة فروبنوس أن حلول معادلة بسل حول النقطة الشاذة المنتظمة $x = 0$ تأخذ شكل سلاسل قوى. ويقود هذا التحليل طبيعياً إلى تعريف فئة مهمة من الدوال الخاصة في الرياضيات تُعرف بدوال بسل، والتي تلعب دوراً أساسياً في حل العديد من المسائل الفيزيائية والهندسية.

3.5.1 دوال بسل من النوع الأول والثاني

تعريف 2.5.1:

تسمى الحلول المتحصل عليها باستعمال طريقة فروبنوس لمعادلة بسل

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0$$

بدوال بسل من الرتبة n .

ملاحظة: تظهر دوال بسل بشكل طبيعي عند حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستعمال طريقة فصل المتغيرات، خاصة في المسائل التي تتمتع بتمائل أسطواني مثل معادلة الحرارة ومعادلة الموجة ومعادلة لابلاس.

تعريف 3.5.1:

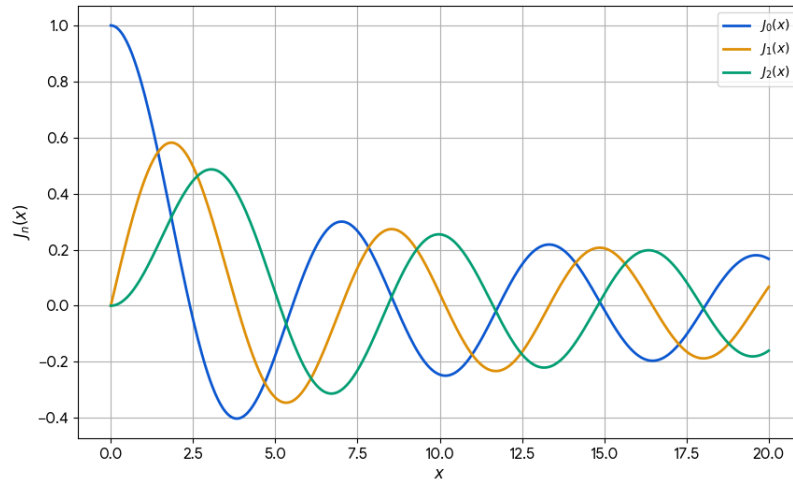
دالة بسل من النوع الأول والرتبة n ، ويرمز لها بـ $J_n(x)$ ، هي الحل المنتظم لمعادلة بسل عند النقطة $x = 0$ ، وتُعطى بالسلسلة:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

حيث تمثل Γ دالة غاما التي تعمم مفهوم المضروب بحيث

$$\Gamma(n+1) = n!$$

عندما يكون n عدداً صحيحاً غير سالب.



نوع 1.png نوع 1.bb

شكل 1.3: التمثيل البياني لدوال بسل من النوع الأول $J_n(x)$ لرتب صحيحة $n = 0, 1, 2$.

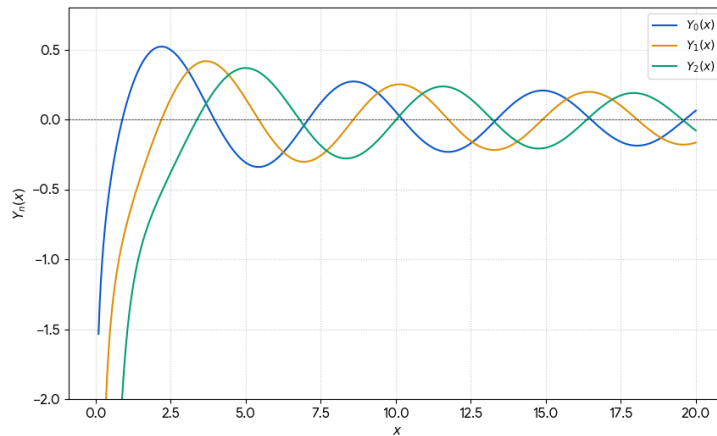
ملاحظة: تتميز الدالة $J_n(x)$ بأنها محدودة عندما $x \rightarrow 0$ ، ولهذا السبب تُستعمل غالباً في النماذج الفيزيائية التي تشترط بقاء الحل منتظماً عند المركز.

تعريف 4.5.1:

دالة بسل من النوع الثاني، ويرمز لها بـ $Y_n(x)$ ، هي الحل الثاني المستقل خطياً لمعادلة بسل، وتُعرف بالعلاقة:

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}.$$

وعندما يكون n عدداً صحيحاً، يتم تعريف هذه الدالة باستعمال النهاية لضمان استقلالها عن $J_n(x)$.



نوع 2. bb. نوع 2. png

شكل 1.4: التمثيل البياني لدوال بسل من النوع الثاني $Y_n(x)$ من أجل $n = 0, 1, 2$.

ملاحظة: الدالة $Y_n(x)$ غير منتظمة عند $x = 0$ ، إذ تمتلك تفرداً لوغاريتمياً يجعلها تتجه نحو اللانهاية، ولذلك لا تُستعمل عندما يكون مطلوباً أن يبقى الحل محدوداً عند الأصل.

قضية 5.1.1

الدالتان $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ مستقلتان خطياً، ومحدد ورونسكي لهما يحقق:

$$W(J_n, Y_n)(x) = \frac{2}{\pi x} \neq 0. \quad \forall x \neq 0$$

برهان.

نكتب معادلة بسل على الشكل القياسي:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0,$$

إذن:

$$p(x) = \frac{1}{x}.$$

نعلم أن محدد ورونسكي للحلين يحقق:

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0.$$

إذن:

$$W'(x) + \frac{1}{x}W(x) = 0.$$

بفصل المتغيرات:

$$\frac{W'}{W} = -\frac{1}{x}.$$

بالتكامل نحصل على:

$$\ln |W| = -\ln |x| + C \implies W = \frac{C}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

وباختيار الثابت $C = \frac{2}{\pi}$ وفق النتيجة المعروفة لمحدد ورونسكي لدالتي بسل نجد:

$$W(J_n, Y_n)(x) = \frac{2}{\pi x} \neq 0$$

□

مما يثبت استقلالهما الخطي.

نتيجة

يشكل كل من $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ أساساً لفضاء حلول معادلة بسل، ومن ثم يكتب الحل العام كمايلي:

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

بعض خصائص دوال بسل

① العلاقة التكرارية

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x).$$

② علاقة الاشتقاق

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)).$$

مثال 2.5.1

نعتبر المعادلة:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1)y = 0. \quad (30.1)$$

وهي معادلة بسل من الرتبة $n = 1$.

بما أن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة، نطبق طريقة فروبنيوس ونفترض وجود حل على الشكل:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}, \quad a_0 \neq 0.$$

(1) حساب المشتقات

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}.$$

التعويض في المعادلة (33.3) نحسب كل حد:

$$x^2 y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r},$$

$$x y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r}.$$

$$x^2 y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+2}.$$

إذن تصبح المعادلة (33.3) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [(k+r)(k+r-1) + (k+r) - 1] x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+2} = 0.$$

لنحسب :

$$(k+r)(k+r-1) + (k+r) - 1 = (k+r)^2 - 1.$$

إذن نحصل على:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k ((k+r)^2 - 1) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+2} = 0.$$

بوضع $k \mapsto k-2$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k((k+r)^2 - 1) + a_{k-2}] x^{k+r} = 0.$$

وبما أن السلسلة تنعدم لكل x ، فإن:

$$a_k((k+r)^2 - 1) + a_{k-2} = 0. \quad (31.1)$$

(3) إيجاد المعادلة الدليلية
نأخذ أصغر قوة عند $k=0$:

$$a_0(r^2 - 1) = 0.$$

وبما أن $a_0 \neq 0$:

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -1.$$

(4) الحل الموافق لـ $r = 1$
نعوض $r = 1$ في العلاقة (31.1):

$$a_k((k+1)^2 - 1) + a_{k-2} = 0.$$

نحسب:

$$(k+1)^2 - 1 = k(k+2).$$

إذن:

$$a_k k(k+2) + a_{k-2} = 0.$$

أي:

$$a_k = -\frac{1}{k(k+2)} a_{k-2}, \quad k > 0.$$

نكتبها بشكل أوضح:

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+2)(k+4)} a_k, \quad k \geq 0.$$

فختار:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0$$

(لأن الحل المنتظم يحتوي على قوى فردية فقط).
نحسب المعاملات:

$$a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{8}.$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 6} = \frac{1}{8 \cdot 24} = \frac{1}{192}.$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 8} = -\frac{1}{192 \cdot 48} = -\frac{1}{9216}.$$

إذن:

$$y_1(x) = x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{192} - \frac{x^7}{9216} + \dots$$

(5) مطابقة الحل مع دالة بسل

نعلم أن دالة بسل من النوع الأول والمرتبة 1 معرفة بالسلسلة:

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}.$$

لنحسب الحد الأول لما $k=0$ نجد:

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18432} + \dots$$

نلاحظ أن:

$$2J_1(x) = x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{192} - \frac{x^7}{9216} + \dots$$

وهو بالضبط الحل الذي حصلنا عليه.
إذن:

$$y_1(x) = 2J_1(x).$$

(6) الحل الموافق لـ $r = -1$

عند $r = -1$ نحصل على حل يبدأ بـ:

$$y_2(x) = \frac{1}{x} + \dots$$

وهو حل غير منتظم عند $x = 0$ ، ويمثل دالة بسل من النوع الثاني للمرتبة 1.

الحل العام

$$y(x) = C_1 \left(x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{192} - \frac{x^7}{9216} + \dots \right) + C_2 \left(\frac{1}{x} + \dots \right). \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

6.1 تمارين

التمرين الأول

نعتبر المعادلة التفاضلية الموالية:

$$x^2 y'' - 2x y' + (2 + x^2)y = 0.$$

جد حلاً خاصاً y_0 للمعادلة (1) يقبل نشرًا وفق سلسلة صحيحة، ويحقق:

$$y_0(0) = 0 \quad \text{و} \quad y'_0(0) = 1.$$

التمرين الثاني

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الموالية:

$$(1 + x)y'' + y' = 0.$$

التمرين الثالث

أوجد حل معادلة لجندر من الرتب 1 الموالية:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (32.1)$$

التمرين الرابع

أوجد حلول المعادلة التفاضلية الموالية:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1)y = x^3. \quad (33.1)$$

7.1 حل التمارين

حل التمرين الأول نبث عن حل خاص y_0 للمعادلة:

$$x^2 y'' - 2x y' + (2 + x^2)y = 0$$

نفرض الحل على شكل سلسلة قوى حول 0:

$$y_0 = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

المشتقات:

$$y'_0 = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$$

$$y''_0 = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

بعد التعويض في المعادلة (1):

$$x^2 \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + (2 + x^2) \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0$$

أي:

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^n - 2 \sum_{n \geq 1} n a_n x^n + 2 \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^n = 0$$

بجمع الحدود نحصل على:

$$2a_0 + \sum_{n \geq 2} [(n-1)(n-2)a_n + a_{n-2}] x^n = 0$$

ومن هنا نستنتج:

$$a_0 = 0$$

$$a_2 \in \mathbb{R}$$

$$a_n = -\frac{1}{(n-1)(n-2)} a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3$$

أولاً: إذا اعتبرنا $a_2 = 0$

نستنتج:

$$a_{2n} = 0 \quad \forall n \geq 0$$

ومن جهة أخرى:

$$a_{2n+1} = -\frac{1}{(2n)(2n-1)} a_{2n-1}$$

وبالتكرار نحصل على:

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_1$$

وباستعمال الشرط:

$$y'_0(0) = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

إذن:

$$y_0(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1}$$

أي:

$$y_0(x) = x \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = x \cos x$$

حل التمرين الثاني نفترض حلاً على شكل سلسلة قوى

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

حساب المشتقات

$$y'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

ومنه

$$y' = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$y'' = \sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$xy'' = \sum_{n \geq 1}^{\infty} (n+1)na_{n+1}x^n$$

التعويض في المعادلة

$$\sum_{n \geq 0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n \geq 1}^{\infty} (n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n \geq 0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = 0$$

عند $n = 0$

$$2a_2 + a_1 = 0$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2}$$

عند $n \geq 1$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)^2a_{n+1} = 0$$

بالقسمة على $(n+1)$:

$$(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} = 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{n+1}{n+2}a_{n+1}$$

ومنه

$$y(x) = a_0 + a_1 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

إذن:

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln(1+x)$$

حل التمرين الثالث

لنجد حلاً للمعادلة لجندّر من الرتبة $n = 1$
نعتبر المعادلة:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (34.1)$$

1) نفترض حلاً على شكل سلسلة قوى
بما أن $x = 0$ نقطة عادية، نكتب:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

(2) حساب المشتقات

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

بالتعويض في المعادلة (34.1) فنحصل على:

$$(1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

نوزع $(1-x^2)$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

(3) توحيد القوى

نلاحظ أن الحد الأول يحتوي x^{k-2}

نضع:

$$m = k - 2 \Rightarrow k = m + 2.$$

إذن:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k.$$

الآن تصبح المعادلة (34.1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

نجمع الحدود التي تحتوي a_k :

$$-k(k-1) - 2k + 2 = -k^2 + k - 2k + 2 = -(k^2 + k - 2).$$

لكن:

$$k^2 + k - 2 = (k-1)(k+2).$$

إذن المعادلة (34.1) تصبح:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1) a_{k+2} - (k-1)(k+2) a_k] x^k = 0.$$

(4) العلاقة التكرارية

بمساواة معامل كل x^k بالصفء نحصل على:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - (k-1)(k+2)a_k = 0.$$

نحتزل بـ $(k+2)$:

$$(k+1)a_{k+2} - (k-1)a_k = 0.$$

ومنه:

$$a_{k+2} = \frac{k-1}{k+1}a_k.$$

(5) حساب المعاملات
نبدأ بـ a_0 و a_1 ثابتين حرين.
عند $k=1$:

$$a_3 = \frac{0}{2}a_1 = 0.$$

عند $k=3$:

$$a_5 = 0.$$

إذن جميع الحدود الفردية العليا تنعدم، فتتوقف السلسلة عند:

$$y(x) = a_1x.$$

وباختيار $a_1 = 1$ نحصل على:

$$P_1(x) = x.$$

الحل الثاني

بأخذ $a_0 \neq 0$ نحصل على الحل المستقل الثاني الذي يكتب:

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1.$$

الحل العام

$$y(x) = C_1x + C_2\left(\frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1\right). \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

حل التمرين الرابع نعتبر المعادلة:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1)y = x^3. \quad (35.1)$$

نلاحظ أن الجزء المتجانس منها هو معادلة بسل من الرتبة 1:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1)y = 0. \quad (36.1)$$

إذن نحل المعادلة المتجانسة بطريقة فروبنوس.
نفترض حلا على الشكل :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}, \quad a_0 \neq 0.$$

حساب المشتقات

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r-1}, \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}.$$

بالتعويض في المعادلة (36.1) نجد:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0$$

نجمع الحدود:

$$(k+r)(k+r-1) + (k+r) - 1 = (k+r)^2 - 1.$$

إذن:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k ((k+r)^2 - 1) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+r+2} = 0.$$

و بالتالي تنتج العلاقة :

$$a_k ((k+r)^2 - 1) + a_{k-2} = 0.$$

المعادلة الدليلية

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1.$$

الحل الأول لما $(r = 1)$

$$a_k k(k+2) + a_{k-2} = 0 \Rightarrow a_k = -\frac{1}{k(k+2)} a_{k-2}, \quad k > 0.$$

نختار:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

$$a_2 = -\frac{1}{8}, \quad a_4 = \frac{1}{192}, \quad a_6 = -\frac{1}{9216}.$$

إذن:

$$y_1(x) = x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{192} - \frac{x^7}{9216} + \dots$$

وهو حل منتظم عند $x = 0$.
الحل الثاني لما $(r = -1)$
يعطي حلاً غير منتظم يبدأ بـ:

$$y_2(x) = \frac{1}{x} + \dots$$

لنبحث عن الحل الخاص للمعادلة (35.1)
نضع:

$$y_p(x) = Ax + Bx^3.$$

نحسب:

$$y_p' = A + 3Bx^2, \quad y_p'' = 6Bx.$$

بالتعويض في المعادلة (35.1) نحصل على:

$$x^2(6Bx) + x(A + 3Bx^2) + (x^2 - 1)(Ax + Bx^3) = x^3.$$

وبتبسيط الحدود:

$$(8B + A)x^3 + Bx^5 = x^3.$$

بالمطابقة نجد:

$$B = 0, \quad 8B + A = 1 \Rightarrow A = 1.$$

إذن:

$$y_p(x) = x.$$

الحل العام

$$y(x) = C_1 \left(x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{192} - \frac{x^7}{9216} + \dots \right) + C_2 \left(\frac{1}{x} + \dots \right) + x. \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

الفصل الثاني

المعارف المتنافضة الجزئية

تمهيد

سنتطرق في هذا الفصل إلى مجموعة من التعاريف و المفاهيم حول المعادلات التفاضلية الجزئية سواء كانت متجانسة أو غير متجانسة بمعاملات ثابتة أو غير ثابتة وأهم نظريات الوجود والوحدانية. كما سنتطرق إلى أهم الطرق لحل المعادلات التفاضلية الجزئية مع شرح مفصل للخطوات و التقنيات المستخدمة في كل طريقة.

1.2 مفاهيم عامة حول المعادلات التفاضلية الجزئية:

1.1.2 تعريف:

تعريف 1.1.2:

المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة تتضمن دالة مجهولة لمتغيرات مستقلة متعددة ومشتقاتها الجزئية بالنسبة لتلك المتغيرات. يمكن التعبير عن الشكل العام لمعادلة تفاضلية جزئية من الرتبة k على النحو التالي:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, D^k u\right) = 0.$$

(1.2)

شرح الرموز:

- F : دالة معروفة تربط بين جميع المتغيرات والمشتقات الظاهرة داخلها.
- $x_1, \dots, x_n$: المتغيرات المستقلة، وقد تمثل إحداثيات مكانية مثل x, y, z أو الزمن t .
- u : الدالة المجهولة التي نبحث عنها، وتعتمد على المتغيرات المستقلة:

$$u = u(x_1, \dots, x_n).$$

- $\frac{\partial u}{\partial x_i}$: المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة u .
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية.
- $D^k u$: رمز إختصار لكل المشتقات الجزئية الممكنة للدالة u من الرتبة k وما دونها (أي الرتبة $0, 1, 2, \dots, k$).

أمثلة 1.1.2

1. معادلة تفاضلية ذات المتغير التفاضلي f و المتغيرات المستقلة x, y, z .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial y} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (2.2)$$

2. معادلة تفاضلية ذات المتغير التفاضلي u و المتغيرات المستقلة t, x .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

2.1.2 تكوين المعادلات التفاضلية الجزئية:

المعادلات التفاضلية الجزئية يمكن تكوينها من علاقة عامة تحتوي على المتغيرات المستقلة والدالة المجهولة، بالإضافة إلى ثوابت إختيارية أو دوال إختيارية، عن طريق حذف هذه العناصر بإستخدام الإشتقاق الجزئي.

تعريف 2.1.2:

- حذف الثوابت الاختيارية
إذا كانت لدينا علاقة من الشكل

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, C_1, C_2, \dots, C_m) = 0, \quad (4.2)$$

حيث $C_1, C_2, \dots, C_m$ ثوابت اختيارية، فإن تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية يتم وفق :

1. اشتقاق العلاقة جزئياً بالنسبة لكل متغير مستقل بما يكفي لحصول عدد معادلات مساوي لعدد الثوابت.
2. إعادة التعويض في العلاقة الأصلية واستخلاص صيغة المعادلة التفاضلية بين u ومشتقاته الجزئية.

- حذف الدوال الاختيارية
إذا كانت الحلول العامة تحتوي على دوال اختيارية مثل

$$u = f(x, y) = f_1(g_1(x, y)) + f_2(g_2(x, y)),$$

فإن تكوين المعادلة التفاضلية يتم كما يلي:

1. إجراء اشتقاقات جزئية متعددة للعلاقة بالنسبة للمتغيرات المستقلة لإنشاء أنظمة من المعادلات التي تتضمن مشتقات الدوال الاختيارية.
2. حذف الدوال الأصلية ومشتقاتها للوصول إلى معادلة تربط u ومشتقاته الجزئية فقط.

أمثلة 2.1.2

- 1 حذف الثوابت الاختيارية
الحل العام:

$$u = ax + by, \quad a, b \text{ اختيارية ثوابت}$$

المشتقات الجزئية:

$$u_x = a, \quad u_y = b$$

حذف الثوابت a, b يعطي:

$$u = xu_x + yu_y$$

- 2 حذف الدوال الاختيارية

الحل العام:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

المشتقات الجزئية:

$$u_t = -cf'(x - ct) + cg'(x + ct), \quad u_x = f'(x - ct) + g'(x + ct)$$

المشتقات الجزئية الثانية:

$$u_{tt} = c^2 f''(x - ct) + c^2 g''(x + ct), \quad u_{xx} = f''(x - ct) + g''(x + ct)$$

المعادلة الناتجة بعد حذف الدوال الاختيارية:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

3.1.2 الشروط الحدية والإبتدائية:

تُعد الشروط الإبتدائية والحدية ضرورية في المعادلات التفاضلية الجزئية لضمان وجود حل وحيد ومستقر للمشكلة الفيزيائية أو الهندسية المطروحة. بدون هذه الشروط الإضافية، قد تحتوي المعادلة التفاضلية الجزئية الواحدة على عدد لا نهائي من الحلول الممكنة.

الشروط الإبتدائية

تعريف 3.1.2:

تحدد الشروط الإبتدائية حالة النظام في لحظة زمنية معينة وثابتة (عادةً عند الزمن $t = 0$). تُستخدم هذه الشروط عند التعامل مع المسائل التي تتطور فيها الحالة بمرور الزمن.

أمثلة 3.1.2

المعادلة 1

$$u_t + u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

الشرط الإبتدائي

$$u(x, 0) = f(x)$$

المعادلة 2

$$u_t = u^2, \quad t > 0,$$

الشرط الابتدائي

$$u(x, 0) = g(x)$$

المعادلة 3

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

الشرط الابتدائي

$$u(x, y, 0) = h(x, y)$$

الشروط الحدية

تعريف 4.1.2:

تحدد الشروط الحدية سلوك الدالة (أو مشتقاتها) على حدود النطاق المكاني للمسألة. تُستخدم هذه الشروط في المسائل التي تشمل التغير المكاني أنواع الشروط الحدية الشائعة:

شروط ديركليه : يتم فيها تحديد قيمة الدالة نفسها على الحدود مباشرة.

شروط نيومان : يتم فيها تحديد قيمة المشتقة العمودية (الميل أو التدرج) للدالة على الحدود.

شروط روبن : تجمع بين شروط ديركليه ونيومان .

أمثلة 4.1.2

شروط ديريكليه

نعتبر المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0$$

الشروط الحدية هي:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$

وبما أن قيمة الدالة نفسها محددة على الحدود فإن هذه الشروط تسمى شروط ديركليه.

شروط نيومان

نأخذ المعادلة نفسها:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L$$

وتكون الشروط الحدية:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

في هذه الحالة يتم تحديد مشتقة الدالة بالنسبة للمتغير المكاني على الحدود بدلاً من تحديد قيمة الدالة نفسها. ولذلك تسمى هذه الشروط شروط نيومان.

شروط روبن
نعتبر المعادلة نفسها:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

والشرط الحدي يكون:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \alpha u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0$$

حيث α ثابت موجب.
يحتوي هذا الشرط على كل من الدالة u ومشتقتها $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، لذلك يسمى شرط روبن لأنه يجمع بين شرط ديركلية وشرط نيومان.

2.2 تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية:

تصنّف المعادلات التفاضلية الجزئية وفق عدة معايير رياضية تعتمد على طبيعة المعادلة . ومن أهم هذه المعايير: رتبة المعادلة، خطيتها. ويساعد هذا التصنيف في اختيار الطرائق المناسبة لدراسة وجود الحلول وخواصها وسلوكها الفيزيائي.

1.2.2 الرتبة

تعرف رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية بأنها رتبة أعلى مشتقة جزئية تظهر في المعادلة.

مثال 1.2.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

نلاحظ أن أعلى مشتقة في المعادلة هي من الرتبة الثانية، لذلك فإن رتبة هذه المعادلة هي الرتبة الثانية.

2.2.2 عدد المتغيرات المستقلة

يقصد بها عدد المتغيرات التي تعتمد عليها الدالة المجهولة u .

مثال 2.2.2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

تعتمد الدالة u على المتغيرين x و t ، وبالتالي فإن المعادلة تحتوي على متغيرين مستقلين.

3.2.2 خطية المعادلة

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية خطية إذا ظهر المتغير التابع u وجميع مشتقاته بدرجة أولى فقط. والشكل العام لمعادلة خطية من الرتبة الثانية هو:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x, y) \quad (1)$$

حيث أن A, B, C, D, E, F دوال معلومة تعتمد على المتغيرات المستقلة.

3.2.2 مثال

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

وهي معادلة خطية.
أما المعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

فهي معادلة غير خطية بسبب وجود الحد $u \frac{\partial u}{\partial x}$.

4.2.2 تجانس المعادلة

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية متجانسة إذا كانت كل حدودها تحوي الدالة و مشتقاتها ، وتسمى غير متجانسة إذا كان يوجد على الأقل حد لا يحوي الدالة و مشتقاتها .

1.2.2 أمثلة

المعادلة 1

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

وهي معادلة متجانسة.
المعادلة 2

$$\nabla^2 u = f(x, y, z)$$

فهي معادلة غير متجانسة.

5.2.2 طبيعة المعاملات

يمكن تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية أيضاً حسب طبيعة معاملاتها.
فإذا كانت معاملات المعادلة ثوابت فإن المعادلة تسمى ذات معاملات ثابتة، أما إذا كانت دوالاً في المتغيرات المستقلة فإن المعادلة تسمى ذات معاملات متغيرة.

أمثلة 2.2.2

المعادلة 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ذات معاملات ثابتة حيث أن α ثابت.
المعادلة 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

فهي معادلة ذات معاملات متغيرة لأن $K(x)$ دالة في المتغير x .

6.2.2 الأنماط الثلاثة الأساسية للمعادلات الخطية

تصنف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية (1) إلى ثلاثة أنواع رئيسية اعتماداً على إشارة المقدار

$$B^2 - 4AC$$

وهي:

• المعادلات المكافئة (Parabolic)

• المعادلات الزائدية (Hyperbolic)

• المعادلات الناقصة (Elliptic)

المعادلات المكافئة (Parabolic)

تتحقق إذا كان

$$B^2 - 4AC = 0$$

الخصائص:

• تصف الظواهر الانتشارية أو التشتتية.

• غالباً يظهر فيها متغير زمني واحد ومشتقة من الرتبة الأولى بالنسبة له، بينما تظهر مشتقات من الرتبة الثانية بالنسبة للمتغير المكاني.

المعادلات الزائدية (Hyperbolic)

تتحقق إذا كان

$$B^2 - 4AC > 0$$

الخصائص:

- تصف إنتشار الأمواج أو الإهتزازات.
- تظهر فيها مشتقات من الرتبة الثانية بالنسبة للزمن والمتغير المكاني.
- المعلومات تنتقل بسرعة محددة على طول خطوط الموجة

المعادلات الناقصة (Elliptic)
تتحقق إذا كان

$$B^2 - 4AC < 0$$

الخصائص:

- تصف الحالات المستقرة، أي التي لا تتغير مع الزمن.
- تُستخدم لوصف توزيع الحقل في حالة توازن مثل الجهد الكهربائي أو درجة الحرارة في حالة استقرار.

أمثلة 3.2.2

1

المعادلات المكافئة (Parabolic)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2

المعادلات الزائدية (Hyperbolic)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3

المعادلات الناقصة (Elliptic)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

3.2 نظرية الوجود والحدانية:

تتعلق نظرية الوجود والحدانية في المعادلات التفاضلية الجزئية بضمان وجود حل فريد لمسألة معينة. يتم ذلك عادة من خلال دراسة شروط محددة على المعادلة.

1.3.2 نظرية لاكس--ميلغرام :

نظرية 3.2.1

لتكن H فضاء هيلبرت حقيقي، وليكن $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ شكلاً ثنائياً يحقق:

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H,$$

حيث $C > 0$ ثابت، كما يحقق شرط الإهليجية:

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H,$$

حيث $\alpha > 0$ ثابت.

ولتكن $L \in H'$ دالة خطية ومستمرة على H . عندئذ يوجد عنصر وحيد $u \in H$ بحيث:

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H.$$

كما يحقق الحل التقدير التالي:

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{H'}.$$

أمثلة 1.3.2

المعادلة 1

ليكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ مجالاً محدوداً. نعتبر:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{في } \Omega, \\ u = 0 & \text{على } \partial\Omega, \end{cases}$$

حيث $f \in L^2(\Omega)$.

نضع $V = H_0^1(\Omega)$ ونعرف:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

نلاحظ أن:

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2},$$

أي أن a مستمر.
ومن متباينة بوانكاري:

$$a(u, u) = \|\nabla u\|^2 \geq C \|u\|_{H^1}^2.$$

كما أن:

$$|L(v)| \leq C \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}.$$

وبالتالي، حسب مبرهنة لاكس--ميلغرام، يوجد حل وحيد $u \in V$.
المعادلة 2 نعتبر:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{في } \Omega, \\ u = 0 & \text{على } \partial\Omega, \end{cases}$$

حيث $f \in L^2(\Omega)$.
نضع $V = H_0^1(\Omega)$ ونعرف:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx.$$

نلاحظ:

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

كما أن:

$$a(u, u) = \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 = \|u\|_{H^1}^2.$$

ومن جهة أخرى:

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

إذن بتطبيق مبرهنة لاكس--ميلغرام، يوجد حل وحيد $u \in V$.

ملاحظة: تنص متباينة بوانكاري على أنه إذا كان Ω مجالا محدودا، فإنه لكل $u \in H_0^1(\Omega)$ يوجد ثابت $C > 0$ يعتمد فقط على Ω بحيث:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

4.2 الطرق التحليلية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

سنركز في هذا الجزء على دراسة الطرق العددية لإيجاد الحلول.

1.4.2 طريقة فصل المتغيرات

تعريف 1.4.2: تعد طريقة فصل المتغيرات إحدى أهم التقنيات التحليلية المستخدمة على نطاق واسع في حل المعادلات التفاضلية، لا سيما المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) الخطية والمتجانسة. تقوم هذه الطريقة على إفتراض أن حل المعادلة التفاضلية متعددة المتغيرات يمكن التعبير عنه على شكل حاصل ضرب دوال أبسط، بحيث تعتمد كل دالة على متغير مستقل واحد فقط، ويكتب هذا الافتراض رياضياتيا بالشكل:

$$u(x, y, t) = X(x) Y(y) T(t).$$

طريقة الحل

يفترض أن الحل $u(x, t)$ يمكن كتابته على الشكل:

$$u(x, t) = X(x) T(t),$$

حيث تمثل الدالة $X(x)$ السلوك المكاني للحل، بينما تمثل $T(t)$ السلوك الزمني. يسمح هذا الافتراض بفصل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلتين تفاضليتين عاديتين بعد التعويض وإعادة ترتيب الحدود.

1.4.2.1 الخطوات الأساسية للطريقة

الخطوات العامة لطريقة فصل المتغيرات:
نعتبر المعادلة من الشكل:

$$u_t = \mathcal{L}u,$$

حيث تمثل $\mathcal{L}$ مؤثرا تفاضليا في المتغير المكاني x .
نفترض:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

بإشتقاق u بالنسبة إلى t نحصل على:

$$u_t = X(x)T'(t).$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$\mathcal{L}u = T(t) \mathcal{L}X(x).$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية:

$$X(x)T'(t) = T(t) \mathcal{L}X(x).$$

وعليه:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\mathcal{L}X(x)}{X(x)}.$$

نظرا إلى أن الطرف الأيسر يعتمد على t فقط والطرف الأيمن يعتمد على x فقط، فإن كليهما يساوي ثابتا نرسم له بـ $-\lambda$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad \frac{\mathcal{L}X(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

وبذلك نحصل على المعادلتين:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

$$\mathcal{L}X(x) + \lambda X(x) = 0.$$

تمثل المعادلة الثانية معادلة القيم الذاتية للمتغير المكاني، ويتم حلها تحت الشروط الحدودية للمسألة وللحصول على القيم الذاتية λ_n والدوال الذاتية $X_n(x)$. بعد إيجاد الدوال الذاتية $X_n(x)$ والمتغيرات الزمنية، يكون الحل العام على شكل سلسلة:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) e^{-\lambda_n t},$$

حيث يتم تحديد المعاملات C_n بإستعمال الشروط الابتدائية.

مثال 1.4.2

نعتبر معادلة الحرارة:

$$u_t = k u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

مع الشروط الحدودية:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

والشرط الابتدائي:

$$u(x, 0) = f(x).$$

نفترض:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

بالتعويض نحصل على:

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t).$$

بفصل المتغيرات:

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

المكون المكاني:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

الحل الذاتي:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

المكون الزمني:

$$T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}.$$

النتيجة النهائية:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

حيث تستخرج المعاملات C_n من:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

2.4.2 : تحويل فوري Transform Fouri

يعد تحويل فورييه من أهم التقنيات التحليلية في دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية. فبدل دراسة الدالة $f(x)$ في الفضاء الحقيقي x ، يمكن تمثيلها بدالة أخرى $F(\xi)$ في فضاء التردد ξ . وبذلك تصبح العديد من المعادلات التفاضلية الجزئية مجرد معادلات جبرية يمكن حلها بسهولة.

تعريف 2.4.2:

يعرف تحويل فورييه للدالة $f(x)$ بالصيغة:

$$\mathcal{F}\{f\} = F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

حيث:

- $F(\xi)$ هو تحويل فورييه للدالة $f(x)$.
- ξ يمثل التردد.
- يساهم الثابت $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ في تحقيق التناظر بين التحويل المباشر وتحويل فوري العكسي.

2.4.2.1 التحويل العكسي

تسترجع الدالة الأصلية $f(x)$ من $F(\xi)$ عبر استعمال الصيغة العكسية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

وبذلك يكون تحويل فورييه قابلا للعكس.

2.4.2.2 شروط وجود تحويل فورييه

يكفي لوجود تحويل فورييه للدالة $f(x)$ تحقق أحد الشروط التالية:

$$1. f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ أي:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

$$2. f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ (حسب مبرهنة بلاشريل).}$$

3. أن تكون $f(x)$ مستمرة ومحدودة وتتناقص عند المالانهاية.

2.4.2.3 خواص تحويل فورييه

يتمتع تحويل فورييه بعدد من الخواص الأساسية التي تجعل منه أداة فعالة في تحليل المعادلات التفاضلية الجزئية، فيما يلي نستعرض أهم الخواص التي يعتمد عليها هذا الفصل.

[?]. خاصية الخطية

خاصية الخطية 0.

يعد تحويل فورييه تحويلًا خطيًا، أي أنه يحافظ على تركيب الدوال بشكل خطي. فإذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتين للتحويل، وكان a و b عددين ثابتين، فإن:

$$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = aF(\xi) + bG(\xi),$$

حيث:

$$F(\xi) = \mathcal{F}\{f\}, \quad G(\xi) = \mathcal{F}\{g\}.$$

وتستعمل هذه الخاصية بكثرة في معالجة المعادلات الخطية، لأنها تسمح بتجزئة الحلول وتركيبها بمرونة.

تحويل المشتقات الجزئية

يمتاز تحويل فورييه بقدرته على تحويل المشتقات إلى معاملات جبرية بسيطة. فإذا كانت $u(x, t)$ دالة في المتغيرين x و t ، فإن تحويل فورييه بالنسبة للمتغير المكاني x فقط يعطي:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = (i\xi) \hat{u}(\xi, t),$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = -(\xi^2) \hat{u}(\xi, t),$$

وبشكل عام:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\} = (i\xi)^n \hat{u}(\xi, t).$$

تستخدم هذه الصيغة في تحويل المشتقات في المعادلات التفاضلية الجزئية إلى حدود جبرية، مما يبسط المعادلة ويحولها إلى معادلة تفاضلية عادية في الزمن t فقط، وهي خطوة أساسية في طريقة تحويل فورييه لحل PDEs.

خاصية الالتفاف

يعرف التفاف الدالتين f و g كما يأتي:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy.$$

ويمتلك الالتفاف علاقة مباشرة مع تحويل فورييه، حيث يعطي التحويل:

$$\mathcal{F}\{f * g\} = F(\xi) G(\xi).$$

كما أن العكس صحيح:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\xi)G(\xi)\} = (f * g)(x).$$

حيث يمكن الالتفاف من كتابة الحل على شكل إلتفاف بين الدالة الابتدائية والدالة الأساسية .

2.4.2.4 تطبيق تحويل فورييه لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

لنفرض أن $u(x, t)$ يحل المعادلة التالية:

$$u_t = k u_{xx}.$$

نأخذ تحويل فورييه في المتغير x :

$$U_t(\xi, t) = -k \xi^2 U(\xi, t).$$

هذا يعطي ODE سهل الحل:

$$U(\xi, t) = U(\xi, 0) e^{-k \xi^2 t}.$$

وباستعمال التحويل العكسي نحصل على:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, 0) e^{-k \xi^2 t} e^{i \xi x} d\xi.$$

مثال 2.4.2

نعتبر معادلة الحرارة على المجال الحقيقي $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

مع الشرط الابتدائي:

$$u(x, 0) = f(x)$$

حيث $a > 0$ حقيقي موجب.
تطبيق تحويل فورييه نعرف تحويل فورييه للدالة $u(x, t)$ بالنسبة للمتغير x :

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx$$

نطبق التحويل على طرفي المعادلة:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \mathcal{F}\left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

باستعمال خصائص تحويل فورييه، نحصل على:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -a\xi^2 \hat{u}$$

المعادلة السابقة هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى، حلها هو:

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-a\xi^2 t}$$

حيث $\hat{f}(\xi)$ هو تحويل فورييه للشرط الابتدائي.
نطبق تحويل فورييه العكسي للحصول على الحل في فضاء x :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{-a\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi$$

ويمكن كتابة الحل على شكل إلتفاف:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}} f(y) dy$$

 ملاحظة:

 يبين هذا المثال أن تحويل فورييه يحول المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية عادية أسهل في الحل، ثم يعاد الانتقال إلى الفضاء الأصلي بواسطة التحويل العكسي للحصول على الحل التحليلي.

3.4.2 تحويل لابلاس Transform Laplace

يعد تحويل لابلاس من أهم الأدوات التحليلية المستعملة في دراسة المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، كما أن تحويل لابلاس ذو فائدة على تحويل فورييه، وذلك لإحتوائه على معامل أسية e^{-pt} الذي يتيح

لنا تحويل صنفًا أوسع من الدوال، ونظرا لأن هذا التحويل يعمل على الدوال المعرفة على المجال الزمني $[0, +\infty)$ ، مما يجعله أداة فعالة لدراسة المعاملات وحل المعادلات التفاضلية الجزئية.. وتمثل الفكرة الأساسية لتحويل لابلاس في نقل الدالة $f(t)$ من فضاء الزمن إلى فضاء جديد يسمى الفضاء المركب s ، مما يحول العمليات التفاضلية إلى عمليات جبرية بسيطة، ويسمح بحل المعادلات التفاضلية بشكل منهجي وسهل.

تعريف 3.4.2:

يعرف تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ بالصورة:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

حيث يمثل $F(p)$ صورة الدالة في فضاء المتغير المركب p ، ويُفترض عادة أن الجزء الحقيقي لـ p موجب لكي يضمن تقارب التكامل.

3.4.2.1 تحويل لابلاس العكسي

تسترجع الدالة الأصلية $f(t)$ من $F(p)$ باستعمال الصيغة العكسية:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) e^{st} ds,$$

3.4.2.2 شروط وجود تحويل لابلاس

يوجد تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ إذا تحققت الشروط الآتية:

1. أن تكون الدالة $f(t)$ معرفة على المجال $[0, \infty)$.
2. أن تكون $f(t)$ ذات نمو أسي محدود، أي يوجد ثابتان $M > 0$ و $a \in \mathbb{R}$ بحيث:
$$|f(t)| \leq Me^{at}.$$

3. أن تكون الدالة مستمرة على أي مجال محدود.

3.4.2.3 خواص تحويل لابلاس

الخطية

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(p) + bG(p).$$

الإزاحة في الزمن

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-ap}F(p).$$

الإلتفاف

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(p)G(p),$$

حيث يعرف الإلتفاف بـ:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

3.4.2.4 نطابق تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية الجزئية

يُستعمل تحويل لابلاس بكثرة لحل المعادلات التفاضلية العادية ذات الشروط الابتدائية. ونتلخص الطريقة في الخطوات الآتية:

1. تطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة.
2. إستعمال خاصية المشتقات لتحويل المشتقات إلى حدود جبرية.
3. حل المعادلة الجبرية الناتجة لإيجاد $F(s)$.
4. تطبيق التحويل العكسي لإسترجاع الدالة $f(t)$.

مثال 3.4.2

نعتبر المعادلة التفاضلية الجزئية المعرفة كما يلي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (5.2)$$

مع الشرط الابتدائي:

$$u(x, 0) = \sin(x) \quad (6.2)$$

حيث تمثل الدالة $u(x, t)$ توزيع درجة الحرارة بدلالة المتغير x والمتغير t .
تطبيق تحويل لابلاس
نطبق تحويل لابلاس بالنسبة للمتغير الزمني t ، ونعرف:

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = U(x, s)$$

وباستخدام خاصية تحويل مشتقة الدالة بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = sU(x, s) - u(x, 0)$$

بالتالي تصبح المعادلة بعد التحويل:

$$sU(x, s) - \sin(x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (7.2)$$

وبإعادة ترتيب الحدود:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - sU = -\sin(x) \quad (8.2)$$

وهكذا تم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية عادية بالنسبة للمتغير x .
حل المعادلة التفاضلية العادية
نبدأ بحل المعادلة المتجانسة المرتبطة:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - sU = 0 \quad (9.2)$$

المعادلة المميزة الموافقة هي:

$$r^2 - s = 0$$

ومنه:

$$r = \pm \sqrt{s} \quad 0$$

إذن الحل العام للمعادلة المتجانسة يكتب على الشكل:

$$U_h(x, s) = Ae^{\sqrt{s}x} + Be^{-\sqrt{s}x}$$

نبحث بعد ذلك عن حل خاص من الشكل:

$$U_p(x, s) = C \sin(x)$$

بالعويض في المعادلة نجد:

$$C(-1 - s) = -1$$

ومنه:

$$C = \frac{1}{1 + s}$$

وعليه فإن الحل العام يكتب كما يلي:

$$U(x, s) = Ae^{\sqrt{s}x} + Be^{-\sqrt{s}x} + \frac{\sin(x)}{1+s}$$

وباعتبار الشروط الفيزيائية المناسبة التي تضمن محدودية الحل، نستنتج أن:

$$A = 0, \quad B = 0$$

إذن:

$$U(x, s) = \frac{\sin(x)}{1+s} \quad (10.2)$$

تطبيق تحويل لابلاس العكسي
نطبق تحويل لابلاس العكسي على طرفي (??) مع استعمال العلاقة المعروفة:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = e^{-t}.$$

فنحصل على الحل النهائي:

$$u(x, t) = \sin(x) e^{-t}. \quad (11.2)$$

على الرغم من أن تحويل لابلاس يستعمل على نطاق واسع في حل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية، إلا أن تطبيقه يتطلب أن تحقق المعادلة شروط تحويل لابلاس بالإضافة إلى الشروط الابتدائية وبتالي لا يمكن حل جميع المعادلات التفاضلية الجزئية بهذا التحويل.

5.2 الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

1.5.2 طريقة المميزات

تعريف 1.5.2: طريقة المميزات هي واحدة من الطرق الأساسية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الفكرة الأساسية من هذه الطريقة هي تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى نظام من المعادلات التفاضلية العادية يمكن حله بسهولة.

1.5.2.1 طريقة أتل

نفترض أن المعادلة التفاضلية الجزئية تعطى بالصيغة:

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u).$$

حيث $u = u(x, y)$ ، والمطلوب هو إيجاد الحل.

نقوم بتحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى نظام من المعادلات التفاضلية العادية (ODEs) من خلال إنشاء نظام المميزات، ويكون على الشكل:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}.$$

حيث تمثل dx, dy, du التغيرات على طول المميزات في المتغيرات x, y, u .

نقوم بحل نظام المميزات باستخدام طرق التكامل أو الطرق العددية المناسبة، مما ينتج دوال تعبر عن x, y, u بدلالة متغير وسيط جديد (مثلاً t).

بإعادة صياغة الحل نستعمل الحلول الناتجة من نظام المميزات لإيجاد التعبير العام لـ :

$$u(x, y).$$

مثال 1.5.2

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (12.2)$$

الحل: نعيد كتابة المعادلة بالشكل:

$$1 \frac{\partial u}{\partial x} + 1 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (13.2)$$

حيث:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 0 \quad (14.2)$$

نظام المميزات (Characteristics) يُعطى بـ:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{0} \quad (15.2)$$

من العلاقة:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} \quad (16.2)$$

نحصل على:

$$x - y = C_1 \quad (17.2)$$

حيث C_1 ثابت،
ومن العلاقة:

$$du = 0 \quad (18.2)$$

نستنتج أن:

$$u = C_2 \quad (19.2)$$

حيث C_2 ثابت،
إذن الحل العام هو:

$$u(x, y) = f(x - y) \quad (20.2)$$

2.5.2 طرق الفروق المنتهية المعممة

تعريف 2.5.2:

تكن الفكرة الأساسية لطرق الفروق المنتهية المعممة في تعميم مفهوم الفروق المحدودة، بحيث لا يكون التقريب مقيدا بمسافات ثابتة أو اتجاهات محددة، مما يسمح بتطبيقها على مجالات هندسية معقدة وشبكات غير منتظمة.

2.5.2.1 طريقة النل

حل معادلة تفاضلية جزئية باستخدام طرق الفروق المنتهية المعممة، يتم إتباع الخطوات المنهجية التالية:

1 توزيع النقط في المجال

يتم إختيار مجموعة من النقاط داخل المجال Ω وعلى حدوده $\partial\Omega$ ، دون إشتراط إنتظامها. يتيح هذا التوزيع المرن تمثيل الأشكال الهندسية المعقدة بكفاءة أعلى مقارنة بالشبكات المنتظمة.

2 المشتقات التفاضلية

لنفترض دالة غير معروفة $u(x, y)$. عند نقطة داخلية P ، يتم تقريب قيم الدالة عند النقط المجاورة P_i باستخدام توسع محلي من الشكل:

$$u(P_i) \approx u(P) + \nabla u(P) \cdot (P_i - P).$$

ومن خلال تجميع هذه العلاقات عند عدد كاف من النقاط المجاورة، يتم بناء نظام خطي محلي يستعمل لإستخراج معاملات تقريب المشتقات التفاضلية، غالبا باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

3 إستبدال المعادلة التفاضلية

بعد الحصول على صيغ تقريب المشتقات، يتم تعويضها مباشرة في المعادلة التفاضلية الجزئية، مما يؤدي إلى تحويلها إلى نظام من المعادلات الجبرية المعرفة عند نقاط المجال.

4 تطبيق الشروط الحدية

تفرض الشروط الحدية من نوع ديريكليه أو نيومان عند النقاط الواقعة على حدود المجال، إما بتحديد قيم المتغير مباشرة أو بتقريب المشتقات الحدية باستخدام نفس الإطار العددي المعمم.

5 حل النظام الجبري

يتم تجميع جميع المعادلات المحلية للحصول على نظام جبري عالمي، يحل باستخدام الطرق العددية المباشرة المناسبة.

مثال 2.5.2

نعتبر معادلة تفاضلية جزئية :

$$\nabla^2 u = f(x, y) \Omega, (??)$$

مع شرط حدي من نوع ديريكليه:

$$u = 0$$

المجال وتوزيع النقط

يتم اختيار مجموعة من النقط داخل المجال Ω وعلى حدوده، دون التقيد بشبكة منتظمة. تقريب مؤثر لابلاس عند كل نقطة داخلية P ، يقارب مؤثر لابلاس بإستخدام تركيب خطي لقيم الدالة عند النقط المجاورة:

$$\nabla^2 u(P) \approx \sum_{i=1}^m \alpha_i u(P_i),$$

حيث تحسب المعاملات α_i إعتقادا على توزيع النقط المجاورة وشروط الدقة المحلية. بناء النظام الجبري بالتعويض في المعادلة (??) نحصل على:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u(P_i) = f(P),$$

وتكتب هذه العلاقة عند جميع النقط الداخلية للمجال. تطبيق الشروط الحدية والحل تفرض القيم الحدية $u = 0$ عند النقط الواقعة على حدود المجال، ثم يُحل النظام الجبري الناتج للحصول على الحل التقريبي عند جميع النقط.

3.5.2 طريقة الفروق المحدودة

تعريف 3.5.2:

تُعد طريقة الفروق المحدودة من أهم الطرق العددية المستعملة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية. تعتمد هذه الطريقة على تقسيم المجال الذي نريد حل المعادلة فيه إلى شبكة من النقط. حيث يقسم الزمن إلى خطوات زمنية مقدارها Δt ، كما يقسم المكان إلى خطوات مكانية مقدارها Δx و Δy . وعند كل نقطة من نطق الشبكة يتم حساب قيم تقريبية للدالة إعتقادا على صيغ الفروق المحدودة. وبهذه الطريقة يتم إستبدال المشتقات التفاضلية بتقريبات جبرية، مما يؤدي إلى تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى نظام من المعادلات الجبرية يمكن حله عددياً.

المشتقات التقريبية

المشتقة الأولى

• الفرق الأمامي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

• الفرق الخلفي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

• الفرق المركزي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

المشتقة الثانية

• الفرق المركزي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

3.5.2.1 طريقة ألت

المعادلة: معادلة الحرارة أحادية البعد

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

تحديد الشبكة:

• الزمن: Δt مع النقط $t^0, t^1, \dots, t^n$

• المكان: Δx مع النقط $x^0, x^1, \dots, x^m$

تقريب المشتقات:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

صيغة معادلة الفرق المحدود:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad \lambda = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

القيم الابتدائية والحدودية:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, 10, \quad \Delta x = 0.1$$

$$t^n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \Delta t = 0.01$$

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow \lambda = \frac{0.01 \cdot 0.01}{0.1^2} = 0.01$$

القيم عند الزمن $t = 0$:

$$u(0, 0) = 0, \quad u(0.1, 0) \approx 0.309, \quad u(0.2, 0) \approx 0.588, \dots, u(1, 0) = 0$$

الحساب الزمني الأول $t^1 = 0.01$:

$$u_1^1 = u_1^0 + 0.01(u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0) = 0.309 + 0.01(0.588 - 0.618) \approx 0.306$$

$$u_2^1 = u_2^0 + 0.01(u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0) \approx 0.5822$$

$$u_3^1 = u_3^0 + 0.01(u_4^0 - 2u_3^0 + u_2^0) \approx 0.8011$$

المتابعة: تستمر الحسابات لبقية النقط الزمنية والمكانية بنفس الطريقة، حيث يتم تحديث القيم عند كل خطوة زمنية باستخدام معادلة الفرق المحدود.

مثال 3.5.2

نعتبر معادلة الحرارة أحادية البعد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (21.2)$$

مع الشروط الحدية:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad (22.2)$$

والشرط الابتدائي:

$$u(x, 0) = f(x) = \sin(\pi x). \quad (23.2)$$

تقسيم المجال والشبكة العددية:

نقسم طول القضيب $L = 1$ إلى $N = 5$ أجزاء متساوية:

$$\Delta x = \frac{L}{N} = 0.2,$$

ونقسم الزمن إلى خطوات زمنية مقدارها $\Delta t = 0.01$. نرمز للحل عند النقطة x_i والوقت t^n بـ

$$u_i^n \approx u(x_i, t^n)$$

معامل الاستقرار في طريقة الفروق المحدودة:

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = 0.25.$$

صيغة الفروق المحدودة:
 باستخدام تقريب المشتقة الزمنية والمشتقة المكانية الثانية ، نحصل على الصيغة العددية:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (24.2)$$

الحل الرقمي لثلاث خطوات زمنية:

الشرط الابتدائي:

$$\begin{aligned} u_0^0 &= 0, & u_1^0 &= \sin(\pi \cdot 0.2) \approx 0.5878, \\ u_2^0 &= \sin(\pi \cdot 0.4) \approx 0.9511, & u_3^0 &= \sin(\pi \cdot 0.6) \approx 0.9511, \\ u_4^0 &= \sin(\pi \cdot 0.8) \approx 0.5878, & u_5^0 &= 0. \end{aligned}$$

الحل بعد ثلاث خطوات زمنية:

$$\begin{aligned} u_0^3 &= 0, & u_1^3 &\approx 0.4345, \\ u_2^3 &\approx 0.7036, & u_3^3 &\approx 0.7036, \\ u_4^3 &\approx 0.4345, & u_5^3 &= 0. \end{aligned}$$

الفصل الثالث

نظام معاملات تفاضلي

تمهيد

في هذا الفصل سنتعرف على أسية مصفوفة و كيفية حسابها انطلاقا من أنواع المصفوفات. كما سنعتبر عن كيفية حل الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابتة باستخدام طرق متعددة.

1.3 مفاهيم عامة حول الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابتة:

تعريف 1.1.3:

نسمي نظام تفاضلي خطي متجانس بمعاملات ثابتة كل نظام من الشكل:

$$\begin{cases} \frac{dy_1(x)}{dx} = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \dots + a_{1n}y_n(x) \\ \frac{dy_2(x)}{dx} = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \dots + a_{2n}y_n(x) \\ \vdots \\ \frac{dy_n(x)}{dx} = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \dots + a_{nn}y_n(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

حيث: $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{ij} \in \mathbb{K} = (\mathbb{C} \vee \mathbb{R})$ والذي يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

أي:

$$Y'(x) = A * Y(x) \quad (3.3)$$

حيث:

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$$

و المعادلة الأخيرة عبارة عن معادلة تفاضلية متجانسة يؤول حلها إلى حساب أسية مصفوفة.

2.3 أسية مصفوفة:

تعريف 1.2.3:

لتكن A مصفوفة مربعة $(m * m)$ ، فإن أسية المصفوفة A تعرف باستخدام سلسلة تايلور كالتالي:

$$e^A = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} \quad (4.3)$$

حيث

A : المصفوفة المربعة بعدها $(m * m)$.

I : المصفوفة الحيدانية و تكون من نفس بعد A .

A^k : الأس k للمصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفة k مرة.

1.2.3 خصائص أسية مصفوفة:

① التقارب: لدراسة تقارب السلسلة $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ نأخذ $\| \cdot \|$ أحد النظميات في الفضاء الشعاعي التام $M_n(\mathbb{C})$ أو $M_n(\mathbb{R})$

حيث لدينا:

$$\|A.B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (5.3)$$

ونعلم أن:

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n; \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.3)$$

إذًا:

برهان.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k \right\| &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \|A^k\| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \|A\|^k \end{aligned} \quad (7.3)$$

□

و منه فإن السلسلة التي حدها العام هو $\frac{1}{k!} A^k$ متقاربة ناظيميا و بالتالي نستنتج أنها متقاربة في $M_n(\mathbb{C})$ أو $M_n(\mathbb{R})$.

② غير تبديلية: عموماً، $e^{A+B} \neq e^{B+A}$ إلا إذا كانت المصفوفتان A و B تبادلان (Commutative) $AB=BA$.

حيث:

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} A^k \right) \times \left(\frac{1}{(n-k)!} B^{n-k} \right) \quad (8.3)$$

نعلم أن:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\sum a_n \cdot \sum b_n = \sum c_n$$

حيث:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}$$

أي:

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$$

ومنه:

$$e^{A+B} = e^{B+A} = e^B \cdot e^A$$

③ مقلوب أسية مصفوفة:

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A}$$

$$(e^A)^{-1} = e^{-A} \quad \text{ومنه:}$$

2.2.3 حساب أسية مصفوفة:

2.2.3.1 المصفوفة القطرية:

نعتبر المصفوفة القطرية D المعرفة ب:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

حيث:

$$e^D = \sum_{k=0}^n \frac{D^k}{k!} = I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \frac{D^4}{4!} + \cdots + \frac{D^n}{n!}$$

لدينا:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn}^2 \end{pmatrix}, D^n = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn}^n \end{pmatrix}$$

أي:

$$e^D = \begin{pmatrix} 1 + \lambda_{11} + \frac{\lambda_{11}^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda_{11}^n}{n!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_{22} + \frac{\lambda_{22}^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda_{22}^n}{n!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda_{nn} + \frac{\lambda_{nn}^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda_{nn}^n}{n!} \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

أمثلة 1.2.3

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$e^D = \begin{pmatrix} e^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^1 \end{pmatrix}$$

2.2.3.2 مصفوفة عديمة النمو:

نقول عن مصفوفة N أنها عديمة النمو من الرتبة p إذا وجد $p \in \mathbb{N}^*$ حيث $N^p = 0_{Mn(\mathbb{R})}$ و $N^{p-1} \neq 0$.
عندئذ نجد أسية N هي:

$$e^N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} = I_n + N + \frac{1}{2}N^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1}$$

أمثلة 2.2.3

لتكن المصفوفة N

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن:

$$N^3 = 0_{Mn(\mathbb{R})} \quad (9.3)$$

ومنه يمكن كتابة عبارة أسية مصفوفة على الشكل التالي:

$$e^N = I_3 + N + \frac{1}{2}N^2 \quad (10.3)$$

أي:

$$e^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$e^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.3.3 المصفوفة التي نكتب على شكل مصفوفة قطرية + مصفوفة عديمة النمو:

إذا كانت $A = D + N$ حيث D مصفوفة قطرية

و N عديمة النمو $N^p = 0$ $p \in \mathbb{N}$

حيث $ND = DN$ فإن $e^A = e^{D+N} = e^D e^N$

أمثلة 3.2.3

لتكن المصفوفة A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن:

$$A = N + D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بما أن: $ND = DN$ فإننا نجد:

$$e^A = e^{D+N} = e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & 2e^3 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

2.2.3.4 المصفوفة المشابهة للمصفوفة القطرية:

ليكن A من $M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة مشابهة لمصفوفة قطرية (أو مصفوفة قابلة للتقطير) أي يوجد P (مصفوفة العبر) مصفوفة قابلة للقلب حيث: $A = PDP^{-1}$ مع D مصفوفة قطرية إذن فأسية المصفوفة A تكون من الشكل $e^A = Pe^D P^{-1}$.

برهان.

لتكن $A = PDP^{-1}$ الشكل
لدينا:

$$e^A = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$$

إذا:

$$e^A = \sum_{k=0}^n \frac{(PDP^{-1})^k}{k!}$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$(PDP^{-1})^n = PD \underbrace{P^{-1}P}_I D \underbrace{P^{-1}P}_I DP^{-1} \dots PDP^{-1}$$

أي:

$$(PDP^{-1})^n = PD^n P^{-1}$$

إذا نجد:

$$e^A = \sum_{k=0}^n \frac{(PD^n P^{-1})^k}{k!}$$

$$e^A = P \left(\sum_{k=0}^n \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1}$$

ومنه:

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

□

أمثلة 4.2.3

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

حساب القيم والأشعة الذاتية للمصفوفة A

حساب القيم الذاتية:

لدينا المصفوفة A ونرغب في حساب القيم الذاتية والأشعة الذاتية المرتبطة بها. نبدأ بحساب كثير الحدود المميز للمصفوفة A ، والذي يُعطى بالمحدد التالي:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 0 & 3 \\ 1 & 5 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (-3 - \lambda)(5 - \lambda)(-4 - \lambda)$$

إذا القيم الذاتية هي جذور كثير الحدود المميز حيث:

$$\lambda_1 = -3$$

$$\lambda_2 = -4$$

$$\lambda_3 = 5$$

إيجاد الأشعة الذاتية:

الشعاع الذاتي المرتبط بـ $\lambda_1 = -3$ لحساب الشعاع الذاتي V_1 المرفق بهذه القيمة، نحل المعادلة:

$$(A + 3I)V_1 = 0$$

حيث:

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

وهو ما يعطينا النظام التالي من المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

نجد أن الشعاع الذاتي المرتبط بـ $\lambda_1 = -3$ هو:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

الشعاع الذاتي المرتبط بـ $\lambda_2 = -4$ لحساب الشعاع الذاتي V_2 المرتبط بهذه القيمة، نحل المعادلة:

$$(A + 4I)V_1 = 0$$

وهو ما يعطينا النظام التالي من المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} 3x_3 = 0 \\ x_1 + 9x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

نجد أن الشعاع الذاتي المرتبط بـ $\lambda_2 = -4$ هو:

$$V_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

الشعاع الذاتي المرتبط بـ $\lambda_3 = 5$ لحساب الشعاع الذاتي V_3 المرتبط بهذه القيمة، نحل المعادلة:

$$(A - 5I)V_3 = 0$$

وهو ما يعطينا النظام التالي من المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} -9x_1 + 3x_3 = 0 \\ -8x_3 = 0 \end{cases}$$

نجد أن الشعاع الذاتي المرتبط بـ $\lambda_3 = 5$ هو:

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

أبواب مصفوفة العبور و معكوسيتها:

بما أن V_1, V_2, V_3 أشعة مستقلة خطيا.
فإن مصفوفة العبور هي:

$$P = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث:

$$\det(P) = -36 \text{ و منه } P \text{ قابلة للقلب و عليه:}$$

$$p^{-1} = \frac{1}{\det(P)} (\text{com}(P))^t$$

أي:

$$\text{com}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -36 \\ -9 & -12 & 3 \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(\text{com}(P))^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 4 & 0 & -12 \\ -4 & -36 & 3 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$p^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 4 & 0 & -12 \\ -4 & -36 & 3 \end{pmatrix}$$

أبواب أسية المصفوفة:

بما أن p مصفوفة العبور ل A ، فيمكن كتابة هذه الأخيرة على الشكل التالي:

$$A = PDP^{-1}$$

حيث:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

إذا:

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix}$$

و بالتالي:

$$e^A = Pe^DP^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & 1 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \quad (11,3)$$

إذن:

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{-4} & 0 & 3(e^{-3} - e^{-4}) \\ \frac{-1}{9}(e^{-4} - e^5) & e^5 & \frac{-1}{4}e^{-3} + \frac{1}{3}e^{-4} - \frac{1}{12}e^5 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{pmatrix}$$

2.2.3.5 المصفوفة الغير مشابهة للمصفوفة القطرية:

ليكن A من $M_n(\mathbb{R})$ ، مصفوفة غير مشابهة لمصفوفة قطرية (أي لها قيم ذاتية مضاعفة) حيث:
 $A = PJP^{-1}$ حيث J تسمى الشكل القانوني لـ Jordan للمصفوفة A اذن فأسية المصفوفة تكون من الشكل: $e^A = Pe^JP^{-1}$

تذكير

لإيجاد مصفوفة جوردن نحسب أولاً: $f(v_1) = Av_1, f(v_2) = Av_2, f(v_3) = Av_3$
 ثانياً: نكتب $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ بدلالة v_1, v_2, v_3
 حيث: $f(v_1) = \theta_1 v_1 + \theta_2 v_2 + \theta_3 v_3$
 وأخيراً مصفوفة جوردن تكون على الشكل: $J = (f(v_1), f(v_2), f(v_3))$

برهان.

$$e^A = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$$

حيث:

$$A = PJP^{-1}$$

فإن:

$$e^A = \sum_{k=0}^n \frac{(PJP^{-1})^k}{k!}$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$(PJP^{-1})^n = P \underbrace{JP^{-1}P}_{I} \underbrace{JP^{-1}P}_{I} \dots PJP^{-1}$$

نجد:

$$(PJP^{-1})^n = PJ^n P^{-1}$$

أي:

$$e^A = \sum_{k=0}^n \frac{(PJ^n P^{-1})^k}{k!}$$

$$e^A = P \sum_{k=0}^n \frac{J^k}{k!} P^{-1}$$

ومنه:

$$e^A = Pe^J P^{-1}$$

□

أمثلة 5.2.3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2.3.6 إيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمشغل A :

$$p_A(\lambda) = (3 - \lambda)^3 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 3; AV_1 = \lambda_1 V_1 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 3; AV_2 = V_1 + 3V_2 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 = 1; AV_3 = V_2 + 3V_3 \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

2.2.3.7 إيجاد مصفوفة جوردن:

لدينا:

$$f(V_1) = A.V_1 = 3.V_1 + 0.V_2 + 0.V_3 \quad (13.3)$$

$$f(V_2) = A.V_2 = 1.V_1 + 3.V_2 + 0.V_3 \quad (14.3)$$

$$f(V_3) = A.V_3 = 0.V_1 + 1.V_2 + 3.V_3 \quad (15.3)$$

إذن يمكن كتابة مصفوفة جوردن على الشكل التالي:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

حيث J عبارة عن مجموع مصفوفتين قطرية D و عديمة النمو N و $(ND = DN)$ فإن:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

لنحسب المصفوفة عديمة النمو:

نلاحظ أن المصفوفة عديمة النمو من الرتبة 2 إذن:

$$e^N = I + N + \frac{1}{2!}N^2$$

ومنه:

$$e^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وعليه:

$$e^J = \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & \frac{1}{2}e^3 \\ 0 & e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$e^A = P e^J P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & \frac{1}{2}e^3 \\ 0 & e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^3 & -e^3 & e^3 \\ e^3 & -e^3 & -3e^3 \\ e^3 & e^3 & 3e^3 \end{pmatrix}$$

3.3 حل جملة معادلات تفاضلية خطية:

لتكن جملة المعادلات التفاضلية أي نظام يحتوي على معادلتين أو ثلاث معادلات على الأكثر أي من الشكل العام:

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, y_2) \quad (16.3)$$

$$\frac{dy_1}{dx} = g(x, y_1, y_2) \quad (17.3)$$

فتكون طريقة الحل سهلة تعتمد على التعويض و ذلك باتباع الخطوات الآتية:

- نختار من إحدى المعادلات متغير ثم نكتبه بدلالة البقية.
- نعوضه في المعادلة الأخرى بحيث نحصل على معادلة تفاضلية ذات متغير واحد.
- نحل المعادلة التفاضلية ثم نجد بقية المتغيرات .

مثال 1.3.3

أوجد حل النظام

$$\frac{dy_1}{dx} = x + y_1 + y_2 \quad (18.3)$$

$$\frac{y_2}{dx} = 2x - 4y_1 - 3y_2 \quad (19.3)$$

مع الشروط الابتدائية $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$ حيث x متغير مستقل.
حل المعادلة التفاضلية يكون: بتفاضل (18.3) بالنسبة الى x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1 \quad (20.3)$$

بتعويض (18.3)، (19.3) في الطرف الأيمن للمعادلة (20.3) نحصل على:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y + z + x - 4y - 3z + 2x + 1$$

أي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1 \quad (21.3)$$

ثم نعوض عن z من (18.3) في (21.3)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2\left(\frac{dy}{dx} - y - x\right) + 3x + 1 \quad (22.3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1 \quad (23.3)$$

$$D = \frac{d}{dx} \text{ نضع:}$$

بالتعويض عن D في المعادلة (23.3):

$$(D^2 + 2D + 1)y = 5x + 1$$

ولحل هذه المعادلة نبحث عن:
أولا:

حل المعادلة المتجانسة $(D^2 + 2D + 1)y = 0$ نفرض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة حيث λ هي جذور المعادلة المساعدة $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ أي أن:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

ومنه:

$$y_H = (c_1 + c_2x)e^{-x}$$

ثانيا: الحل الخاص

$$y_p = \frac{1}{(D+1)^2}(5x+1) = (1-2D+3D^2-\dots)(5x+1) = 5x-9$$

أي أن:

$$y = (c_1 + c_2)e^{-x} + 5x - 9$$

بالتعويض عن y في (18.3) و الحل بالنسبة إلى z

$$z = -(c_1 + c_2x)e^{-x} + c_2e^{-x} + 5 - (c_1 + c_2x)e^{-x} - 5x + 9 - x$$

أي أن:

$$z = (-2c_1 + c_2 - 2c_2x)e^{-x} - 6x + 14$$

و من الشروط الابتدائية $y(0) = 1, z(0) = 0$ نحصل على:

$$c_1 = 10, c_2 = 6$$

أي أن :

$$y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9, z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14$$

تحقق الشروط الابتدائية المعطاة.

4.3 الأنظمة الخطية التفاضلية المتجانسة:

4.3.1 نظرية

لتكن المصفوفة $A : A \in Mn(\mathbb{K})$ حيث: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ لدينا:

$$\frac{d(e^{Ax})}{dx} = e^{Ax} \cdot A = A \cdot e^{Ax}$$

برهان.

$$\begin{aligned}\frac{d(e^{Ax})}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{Ax} \cdot e^{Ah} - e^{Ax}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{Ah} - I_n) \cdot e^{Ax} \\ &= e^{Ax} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (I_n + Ah + \frac{h^2}{2!} A^2 + \dots - I_n) \\ &= e^{Ax} \lim_{h \rightarrow 0} (A + \frac{h}{2} A^2 + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} A^n) \\ &= e^{Ax} A\end{aligned}$$

□

 ملاحظة:

 الدالة ϕ حل للمعادلة التفاضلية وتسمى المصفوفة الأسية حيث:

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R} &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto e^{xA}\end{aligned}$$

 حيث:

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= A\phi(x) \\ \phi(0) &= I_x \quad (\text{المصفوفة المحايدة})\end{aligned}$$

نظرية 4.3.2

حل المعادلة التفاضلية الخطية

$$\begin{cases} y'(x) = Ay(x) \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

من الشكل:

$$y(x) = e^{(x-x_0)A} y_0$$

ملاحظة:

يمكن دوماً أخذ $x_0 = 0$ الشرط الابتدائي عند الصفر 0 لان حل النظام التفاضلي الخطي مع $x \neq 0$ هو نفسه حل النظام التفاضلي الخطي

$$\begin{cases} y'(x) = Ay(x) \\ y(x_0) = e^{-x_0 A} y_0 \end{cases}$$

1.4.3 في حالة مصفوفة قطرية أو عديمة النمو أو معا:

يكون النظام في هذه الحالة أسهل عن الحالتين المتبقيتين للمصفوفة فيكون الحل كالاتي:
 $y(x) = e^{Ax}$

مثال 1.4.3

في حالة مصفوفة قطرية:

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 \\ y'_2 = 3y_2 \\ y'_3 = 3y_3 \end{cases}$$

يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

إذن حل النظام هو: $Y = e^{Ax} \cdot K$
حيث:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, k_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3\}$$

أي:

$$Y = \begin{pmatrix} k_1 e^{3x} & 0 & 0 \\ 0 & k_2 e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & k_3 e^{3x} \end{pmatrix}$$

2.4.3 في حالة مصفوفة مشابهة لمصفوفة قطرية:

إذا كانت المصفوفة A مشابهة للمصفوفة القطرية على $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ و $V_1 \cdots V_n$ أشعة ذاتية مرافقة للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ على الترتيب فإن الحل العام للنظام التفاضلي الخطي $y'(x) = Ay(x)$ هو:

$y(x) = C_1 V_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n V_n e^{\lambda_n x}$ فإذا كان هناك شرط ابتدائي $y(0) = y_0$ فإن الثوابت $C_1, C_2, \dots, C_n$ هي حل للجملة الخطية: $y(0) = C_1 V_1 + \cdots + C_n V_n$

أمثلة 1.4.3

نعتبر جملة المعادلات التفاضلية:

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 3y_3 \\ y_2' = y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y_3' = -3y_3 \end{cases}$$

حيث:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

إذن حل النظام هو: $Y = e^{Ax} \cdot K$ حيث:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, k_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3\}$$

حيث أن المصفوفة A هي مصفوفة مشابهة للمصفوفة القطرية، تم حسابها في الفصل الأول إذا حلها العام:

$$Y = e^{Ax} \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3k_3(e^{-3x} - e^{-4x}) \\ k_1 \frac{-1}{9} e^{5x} & k_2 e^{5x} & -k_3 \frac{1}{4} e^{-3x} + \frac{1}{3} e^{-4x} - \frac{1}{12} e^{5x} \\ 0 & 0 & k_3 e^{-3x} \end{pmatrix}$$

3.4.3 في حالة مصفوفة غير مشابهة لمصفوفة قطرية:

باستعمال طريقة تغيير متغير حيث النظام التالي:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) + 2y_2(x) + y_3(x) \\ y_3'(x) = y_1(x) + y_2(x) - 3y_3(x) \end{cases}$$

لدينا:

$$A = PJP^{-1}$$

حيث:

$$y'(x) = Ay(x)$$

بالتعويض نجد:

$$y'(x) = PJP^{-1}y(x)$$

ومنه:

$$P^{-1}y'(x) = JP^{-1}y(x)$$

إذن:

$$Z'(x) = JZ(x)$$

حيث:

$$Z(x) = P^{-1}y(x) \text{ و } Z(x) = P^{-1}y(x)$$

و حسب ماورد في الفصل الأول، فقد قمنا بحساب مصفوفة جوردن و التي تكتب على الشكل الآتي:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

و

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذاً:

$$Z = e^{Jx} \cdot K = e^{(N+D)x} \cdot K = e^{Nx} \cdot e^{Dx} \cdot K$$

أي:

$$e^{Nx} = I + Nx + \frac{(Nx)^2}{2!}$$

ومنّه:

$$e^{Nx} = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و من جهة أخرى:

$$e^{Dx} = \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix}$$

إذن:

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{3x} & k_2 x e^{3x} & k_3 \frac{x^2}{2} e^{3x} \\ 0 & k_2 e^{3x} & k_3 x e^{3x} \\ 0 & 0 & k_3 e^{3x} \end{pmatrix}$$

نعلم أن: $Y(x) = PZ(x)$
إذن:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} k_1 e^{3x} & k_2 x e^{3x} & k_3 e^{3x} \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) \\ -k_1 e^{3x} & k_2 e^{3x} (1-x) & k_3 e^{3x} \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) \\ k_1 e^{3x} & k_2 x e^{3x} & \frac{k_3}{2} x^2 e^{3x} \end{pmatrix}$$

4.4.3 القيم الذاتية أعداد المركبة:

في الجزء السابق لاحظنا أننا تناولنا فقط الحالات التي تحتوي على قيم ذاتية تمثل أعدادا حقيقية، ولم نتطرق بعد إلى القيم الذاتية المركبة، والآن ننتقل لعرض المثال التالي.

مثال 2.4.3

في هذا المثال، سنقوم بإيجاد الحل العام لنظام تفاضلي خطي يمتلك قيما ذاتية مركبة، وذلك باستخدام الطرق المناسبة للتعامل مع الأعداد المركبة في الحلول العامة.

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

الحل:
المعادلة المميزة هي:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -5 \\ 2 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

ومنه:

$$\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i$$

إيجاد الشعاع الذاتي $V_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ المرافق لـ $\lambda_1 = -1 + i$ بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 3 - i & -5 \\ 2 & -3 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$(3 - i)c_1 = 5c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{3 - i}{5} c_1$$

إذا:

$$V_1 = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix}$$

ومنه الحل الخاص هو:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)x}$$

من أجل $\lambda_2 = -1-i$
بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 3+i & -5 \\ 2 & -3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$(3+i)c_1 = 5c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{3+i}{5}$$

باختيار $c_1 = 5$ فإن $c_2 = 3+i$ ويكون الحل الخاص هو:

$$y_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{-(1+i)x}$$

وبذلك نحصل على الحد العام

$$y = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)x} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{-(1+i)x}$$

لكننا نعلم أن:

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

ومن ذلك فإن:

$$\begin{aligned} y &= c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{-x}(\cos x + i \sin x) + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{-x}(\cos x - i \sin x) \\ &= e^{-x} \left[(c_1 + c_2) \begin{pmatrix} 5 \cos x \\ 3 \cos x + \sin x \end{pmatrix} + i(c_1 - c_2) \begin{pmatrix} 5 \sin x \\ -\cos x + \sin x \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

نضع

$$c_1 + c_2 = b_1$$

$$i(c_1 - c_2) = b_2$$

$$y = e^{-x} \left[b_1 \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos x - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin x \right) + b_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin x \right) \right]$$

ملاحظة: الحل السابق يمثل الحل العام لأن $W \neq 0$ ، بوضع $x = 0$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

ملاحظة:

إذا وجدت قيمة ذاتية عبارة عن عدد مركب فإنه توجد قيمة أخرى هي العدد المرافق
الأشعة الذاتية توجد أيضا على شكل أعداد مركبة و مرافقها.
الشعاع الذاتي الأول:

$$V_1 = \text{Re}V_1 + i\text{Im}V_1$$

الشعاع الذاتي الثاني:

$$V_2 = \text{Re}V_1 - i\text{Im}V_1$$

أي أن الحل العام يكتب من الشكل:

$$y = c_1 V_1 + c_2 V_2$$

5.4.3 حل أنظمة معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية

يهدف هذا الجزء إلى تقديم الأساليب الأساسية لحل هذه الأنظمة، من خلال تحويلها إلى أنظمة من الرتبة الأولى ثم تطبيق طرق تحليل الانظمة الخطية مثل الحل باستخدام المصفوفات. وهذا المثال يوضح ذلك:

أمثلة 2.4.3

ليكن النظام الآتي حيث y_1, y_2, y_3 متغيرات بدلالة x .

$$\begin{cases} D^2y_1 + (D-1)y_2 = 0 \\ (2D-1)y_1 + (D-1)y_3 = 0 \\ (D+3)y_1 + (D-4)y_2 + 3y_3 = 0 \end{cases} \quad (24.3)$$

حيث:

$$D = \frac{d}{dx}$$

الحل:

نلاحظ النظام معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية.

نضع: $Dy_1 = y_4$

أي: $D^2y_1 = Dy_4$

ومنه يمكن كتابة (24.3) على الشكل الآتي:

$$\begin{cases} y'_1 = y_4 \\ y'_2 = -y_4 + 4y_2 - 3y_3 - 3y_1 \\ y'_3 = -2y_4 + y_3 + y_1 \\ y'_4 = y_4 - 3y_2 + 3y_3 + 3y_1 \end{cases} \quad (25.3)$$

وهو من الشكل $y' = Ay$ حيث:

$$y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

لدينا:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 4-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4)(\lambda-1)^2 = 0$$

جذور كثير حدود المميز هي: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$

5.4.3.1 إيجاد الشعلة الصاعدة

من أجل $\lambda_1 = 0$ لدينا:

$$V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

الشعاع المرافق ل $\lambda_1 = 0$

$$AV_1 = \lambda_1 V_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نجد:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 1$$

ويكون الحل الخاص للنظام (25.3) هو: $Y_1 = V_1 e^{\lambda_1 x}$ أي:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

من أجل $\lambda_2 = 4$ لدينا:

$$V_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

الشعاع المرافق ل $\lambda_2 = 4$

$$AV_1 = \lambda_1 V_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نجد أن:

$$x_1 = 12, x_2 = -16, x_3 = -7, x_4 = 3$$

ويكون الحل الخاص ل (25.3) هو:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4x}$$

من أجل $\lambda_2 = 4$ لدينا:

$$V_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

الشعاع المرافق ل $\lambda_2 = 4$

$$AV_2 = \lambda_2 V_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نجد أن:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$$

ويكون الحل الخاص ل (25.3) هو:

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

حيث أن $\lambda_4 = \lambda_3 = 1$ جذر مكرر فإن:

$$Y_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x e^x + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} e^x$$

بالتعويض في النظام (25.3) نجد:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x e^x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x$$

وأخيرا فإن حل النظام (24.3) هو:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t e^x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x \right] + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} 4e^x$$

5.3 الانظمة الخطية غير المتجانسة

لتكن المعادلة التفاضلية غير المتجانسة على الشكل التالي:

$$Y'(x) = AY(x) + B(x)$$

حلها هو:

$$Y(x) = R(x)(C(x) + K)$$

برهان.

$$\text{لدينا: } y' = Ay \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = A \Leftrightarrow y = e^{Ax} C = R(x)C$$

حيث e^{Ax} هي المصفوفة $R(x)$ وتسمى أسية المصفوفة.

إذا كانت A قابلة للتقطير فإنه من أجل $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

مرفقة بالأشعة الذاتية V_1, V_2, V_3 نجد:

$$R(t) = (c_1 e^{\lambda_1 x} V_1 c_2 e^{\lambda_2 x} V_2 c_3 e^{\lambda_3 x} V_3) \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

إيجاد حسب طريقة تغيير الثوابت حل النظام $y' = Ay + B(x)$ لدينا:

$$y = R(x).C(x) \quad (26.3)$$

إذا:

$$y' = R'(x).C(x) + R(x).C'(x) \quad (27.3)$$

و من جهة ثانية:

$$y' = Ay + B(x) \quad (28.3)$$

إذا:

$$Ay + B(x) = R'(x).C(x) + R(x).C'(x) \quad (29.3)$$

وبما أن:

$$R(x) = e^{Ax} \Rightarrow R'(x) = Ae^{Ax} \quad (30.3)$$

بتعويض كل من (26.3) و (30.3) في (29.3) نجد:
 $AR(x).C(x) + B(x) = AR(x).C(x) + R(x).C'(x)$
 إذا:

$$C'(x) = R^{-1}(x).B(x)$$

حيث $R^{-1}(x)$ هي مقلوب $R(x)$
 بالتكامل نجد قيمة $C(x)$ ثم نعوض في العلاقة (26.3)

□

أمثلة 1.5.3

إذا وضعنا:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix}, \quad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}$$

لكل عدد حقيقي x ، يمكن كتابة النظام التفاضلي بالشكل:

$$Y'(x) = AY(x) + B(x)$$

حيث أن المصفوفة A تُعطى بالعلاقة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

و $B(x)$ هو الشعاع:

$$\begin{pmatrix} 4e^{-5x} \\ 2xe^{-5x} \\ 6e^{-5x} \end{pmatrix}$$

كثير الحدود المميزة ل A هو:

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)(5 - \lambda)$$

القيم الذاتية ل A هي:

$$\lambda_3 = 5, \lambda_2 = -1, \lambda_1 = 1$$

المعادلة العامة:

$$Y(x) = R(x) \cdot (C(x) + K)$$

حيث:

$$R(x) = (X_1 e^x, X_2 e^{-x}, X_3 e^{5x})$$

أي X_1, X_2, X_3 تمثل أشعة ذاتية مرفقة على التوالي بالقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
 $C(x) = R^{-1}(x) \cdot B(x)$ شعاع عمودي يحقق العلاقة:
 K شعاع عمودي ثابت من $\mathbb{R}^3$

لنبحث أولاً على X_1, X_2, X_3 ولذلك نضع:

$$X_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

لدينا:

$$(A - \lambda I) \cdot X_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} - x_2^{(1)} - 3x_3^{(1)} = 0 \\ -3x_1^{(1)} + \frac{3}{2}x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

وبالتالي:

$$x_3^{(1)} = -\frac{3}{16}x_2^{(1)}, \quad x_1^{(1)} = \frac{7}{16}x_2^{(1)}$$

نختار:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix}$$

لدينا أيضاً:

$$(A + I) \cdot X_2 = 0$$

أي:

$$\begin{cases} 3x_1^{(2)} - x_2^{(2)} - 3x_3^{(2)} = 0 \\ 2x_2^{(2)} = 0 \\ -3x_1^{(2)} + \frac{3}{2}x_2^{(2)} + 3x_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$x_1^{(2)} = x_3^{(2)} \quad x_2^{(2)} = 0$$

وبالمثل، نحصل على:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وأخيرا لدينا:

$$(A + 5I) \cdot X_3 = 0$$

أي:

$$\begin{cases} -3x_1^{(3)} - x_2^{(3)} - 3x_3^{(3)} = 0 \\ -4x_2^{(3)} \\ -3x_1^{(3)} + \frac{3}{2}x_2^{(3)} - 3x_3^{(3)} = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$x_1^{(3)} = -x_3^{(3)} \quad x_2^{(3)} = 0$$

ونختار:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$R(x) = \begin{pmatrix} 7e^x & e^{-x} & e^{5x} \\ 16e^x & 0 & 0 \\ -3e^x & e^{-x} & -e^{5x} \end{pmatrix}$$

بعد قلب المصفوفة $R(x)$ نجد:

$$R^{-1}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{e^{-x}}{8} & 0 \\ e^x & -\frac{e^x}{4} & e^x \\ e^{-5x} & -\frac{5e^x}{4} & -e^{-5x} \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$C'(x) = R^{-1}(x) \cdot B(x) = \begin{pmatrix} \frac{x e^{-6x}}{8} \\ 5e^{-4x} - \frac{x e^{-4x}}{4} \\ -e^{-10x} - \frac{5}{8} x e^{-10x} \end{pmatrix}$$

بعد المكاملة نحصل على:

$$C(x) = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-6x}}{288} - \frac{x e^{-6x}}{48} \\ -\frac{79}{64} e^{-4x} - \frac{x e^{-4x}}{16} \\ -\frac{17}{160} e^{-10x} + \frac{x e^{-10x}}{16} \end{pmatrix}$$

فإذا وضعنا $K = (k_1, k_2, k_3)$ وإذا عدنا إلى العلاقة

$$Y(x) = R(x) \cdot (C(x) + K)$$

نجد:

$$\begin{cases} y_1(x) = 7k_1 e^x + k_2 e^{-x} + k_3 e^{5x} - \left(\frac{3319}{2880} + \frac{x}{48} \right) e^{-5x} \\ y_2(x) = 16k_1 e^x - \left(\frac{1}{18} + \frac{x}{3} \right) e^{-5x} \\ y_3(x) = -3k_1 e^x + k_2 e^{-x} - k_3 e^{5x} - \left(\frac{3831}{2880} - \frac{x}{16} \right) e^{-5x} \end{cases}$$

6.3 طرق أخرى لحل نظام معادلات التفاضلية

1.6.3 تحويل لابلاس

تعريف 1.6.3:

هو عملية تجرى على الدوال رياضية لتحويلها من مجال إلى آخر، كما يستخدم لحل المعادلات التفاضلية لأنه يحولها إلى معادلات جبرية.

ترميز

نرمز له بالرمز $\mathcal{L}(f(x))(p)$ أو $F(p)$ ونكتب $\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx$ $\mathcal{L}(f(x))(p)$ كما يوجد تحويل لابلاس فإنه يوجد تحويل لابلاس معاكس، ويرمز له بالرمز: $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$

أمثلة 1.6.3

ليكن نظام المعادلات التفاضلية معرف كالآتي:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) + t \\ y'(t) = x(t) + z(t) + t \\ z'(t) = x(t) + y(t) + t \end{cases}$$

حيث: $x(0) = \frac{3}{4}, y(0) = \frac{1}{2}, z(0) = \frac{1}{2}$ نريد حل هذا النظام باستخدام خطوات تحويل لابلاس.

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x')(p) = \mathcal{L}(y)(p) + \mathcal{L}(z)(p) + \mathcal{L}(t)(p) \\ \mathcal{L}(y')(p) = \mathcal{L}(x)(p) + \mathcal{L}(z)(p) + \mathcal{L}(t)(p) \\ \mathcal{L}(z')(p) = \mathcal{L}(x)(p) + \mathcal{L}(y)(p) + \mathcal{L}(t)(p) \end{cases}$$

نعلم أن:

$$\mathcal{L}(y^n)(p) = p^n \mathcal{L}(y)(p) - p^{n-1} y(x_0) - p^{n-2} y'(x_0) - p^{n-3} y''(x_0) - \dots - y^{(n-1)}(x_0)$$

حيث: $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ تأخذ حسب الشروط الابتدائية.

إذا:

$$\begin{cases} p\mathcal{L}(x)(p) - x(0) = \mathcal{L}(y)(p) + \mathcal{L}(z)(p) + \mathcal{L}(t)(p) \\ p\mathcal{L}(y)(p) - y(0) = \mathcal{L}(x)(p) + \mathcal{L}(z)(p) + \mathcal{L}(t)(p) \\ p\mathcal{L}(z)(p) - z(0) = \mathcal{L}(x)(p) + \mathcal{L}(y)(p) + \mathcal{L}(t)(p) \end{cases}$$

حيث:

$$\begin{pmatrix} p & -1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ -1 & -1 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x)(t) \\ \mathcal{L}(y)(t) \\ \mathcal{L}(z)(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(t)(p) + x(0) \\ \mathcal{L}(t)(p) + y(0) \\ \mathcal{L}(t)(p) + z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\det A = (p+1)(p^2 - p - 2) = (p+1)^2(p-2)$$

بعد الحساب نجد:

$$A^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p-2)} \begin{pmatrix} p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p-1 & 1 \\ 1 & 1 & p-1 \end{pmatrix}$$

و منه:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}(x)(t) \\ \mathcal{L}(y)(t) \\ \mathcal{L}(z)(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+1)(p-2)} \begin{pmatrix} p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p-1 & 1 \\ 1 & 1 & p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

إذا:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \frac{p-1}{(p+1)(p-2)} \left[\frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \right] + \frac{2}{(p+1)(p-2)} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4} \right] \\ \mathcal{L}(y)(p) = \frac{1}{(p+1)(p-2)} \left[\frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \right] + \frac{p-1}{(p+1)(p-2)} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{(p+1)(p-2)} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4} \right] \\ \mathcal{L}(z)(p) = \frac{1}{p^2} \left[\frac{1}{p-2} \right] + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{p+1} \right] + \frac{1}{12} \left[\frac{1}{p-2} \right] \end{cases}$$

من النظام نجد:

$$x(t) = \left(t + \frac{1}{2} \right) e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}$$

$$y(t) = t e^{2t} - \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{12} e^{2t}$$

$$z(t) = \left(t + \frac{1}{12} \right) e^{2t} - \frac{1}{3} e^{-t}$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$
$a, t \geq 0$	$\frac{a}{s}, s > 0$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$at, t \geq 0$	$\frac{a}{s^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{2} t^2 e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$	$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}, s > \omega $
$t e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}, s > \omega $
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a^2} [1 - e^{-at}(1 + at)]$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots$	$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$	$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, s > a$	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}, s > 0$	$f(t - t_1)$	$e^{-st_1} F(s)$
$g(t) \cdot p(t)$	$G(s) \cdot P(s)$	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$

7.3 تمارين

التمرين الأول

أوجد الحل العام للنظام

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 4y_1 - y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 4y_2 \end{cases} \quad (31.3)$$

التمرين الثاني

أوجد الحل العام لجملة المعادلات التفاضلية الموالي في $\mathbb{R}$ ثم في $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) - y_2(t) + 3y_3(t) \\ y_2'(t) = -y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_3'(t) = -y_1(t) - y_2(t) - y_3(t) \end{cases} \quad (32.3)$$

التمرين الثالث

نعتبر نظام المعادلات التفاضلية الموالي:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) + t \\ y'(t) = x(t) + z(t) + t \\ z'(t) = x(t) + y(t) + t \end{cases} \quad (33.3)$$

و تعطى الشروط الابتدائية $x(0) = \frac{3}{4}, y(0) = -\frac{1}{4}, z(0) = -\frac{1}{4}$

1. أوجد حل النظام (33.3) وذلك بكتابه على الشكل:

$$Y' = AY + B(x). \quad (34.3)$$

2. أوجد حل النظام (33.3) باستعمال طريقة تحويل لابلاس.

3. باستعمال طريقة الاشتقاق و التعويض في النظام (33.3) فبين أن إيجاد حله يؤول إلى إيجاد حلول المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\omega'' - \omega' - 2\omega = 1 + t.$$

8.3 حل التمارين

حل التمرين الأول

يمكن وضع النظام (31.3) على الشكل $Y' = AY$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

وتكون المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow 16 - 8\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 6)$$

القيم الذاتية هي: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$

من أجل $\lambda_1 = 2$ لدينا:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2c_1$$

نختار $c_1 = 1$ فيكون $c_2 = 2$
على ذلك فإن:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$\lambda_2 = 6$ نعوض في المعادلة الذاتية نحصل على:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و منه نجد أن:

$$-2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -2c_1$$

نختار $c_1 = 1, c_2 = -2$ فيكون الحل هو:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{6t}$$

حيث أن الرونسكان:

$$w(X_1, X_2) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{6t} \\ 2e^{2t} & 6e^{6t} \end{vmatrix} = -4e^{8t} \neq 0$$

أي أن X_1, X_2 مستقلان خطيا. ويكون الحل العام:

$$X(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{6t}$$

حل التمرين الثاني

لإيجاد حلول الجملة التفاضلية (32.3) يمكن كتابتها على الشكل $Y' = A.Y$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

حساب القيم والأشعة الذاتية للمصفوفة A

القيم الذاتية

لدينا المصفوفة A ونرغب في حساب القيم الذاتية والأشعة الذاتية المرتبطة بها. نبدأ بحساب المحدد المميز للمصفوفة A ، والذي يُعطى كيلي:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

بحساب المحدد، نجد أن جذور المعادلة المميزة هي:

- القيمة الذاتية الحقيقية: $\lambda_1 = 3$.
- القيمتان الذاتيتان المركبتان: $\lambda_2 = -i\sqrt{2}$ و $\lambda_3 = i\sqrt{2}$.

إيجاد الأشعة الذاتية

الشعاع الذاتي المرتبط بـ $\lambda_1 = 3$ لحساب الشعاع الذاتي X_1 المرتبط بهذه القيمة، نحل المعادلة:

$$(A - 3I)X_1 = 0$$

وهو ما يعطينا النظام التالي من المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} -x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 3x_3^{(1)} = 0 \\ -x_1^{(1)} - x_2^{(1)} = 0 \\ -x_1^{(1)} - 4x_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

بحل هذا النظام، نجد أن الشعاع الذاتي المرتبط بـ $\lambda_1 = 3$ هو:

$$X_1 = x_1^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وبالتالي، فضاء الأشعة الذاتية المرتبط بـ $\lambda_1 = 3$ هو الفضاء المولد بالشعاع:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومن هنا نستنتج الحل الخاص الأول للمعادلة التفاضلية:

$$y^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$$

الشعاع الذاتي المرتبط بـ $\lambda_2 = i\sqrt{2}$ نبحث الآن عن الشعاع الذات X_2 المرتبط بالقيمة الذاتية المركبة $\lambda_2 = i\sqrt{2}$ ، وذلك بحل المعادلة:

$$(A - i\sqrt{2}I)X_2 = 0$$

$$\begin{cases} (2 - i\sqrt{2})x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 3x_3^{(2)} = 0 \\ -x_1^{(2)} + (2 - i\sqrt{2})x_2^{(2)} = 0 \\ -x_1^{(2)} - x_2^{(2)} - (1 + i\sqrt{2})x_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

بعد حل هذا النظام، نجد أن الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = i\sqrt{2}$ هو:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{5}{9} + i\frac{7\sqrt{2}}{18} \end{pmatrix}$$

وبالتالي، يكون الفضاء الشعاعي المرفق بالقيمة الذاتية:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{5}{9} + i\frac{7\sqrt{2}}{18} \end{pmatrix}$$

ومن هنا نستنتج الحل الخاص الثاني للمسألة:

$$y^2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{5}{9} + i\frac{7\sqrt{2}}{18} \end{pmatrix} e^{i\sqrt{2}t}$$

وبالمثل، الحل الخاص الثالث المناسب للقيمة الذاتية $\lambda_3 = -i\sqrt{2}$ يكون:

$$y^3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{5}{9} - i\frac{7\sqrt{2}}{18} \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{2}t}$$

إذن، الحل العام للمسألة في $\mathbb{C}$ يكتب على الشكل:

$$Y(t) = (y^1(t), y^2(t), y^3(t)) = c_1 y^1(t) + c_2 y^2(t) + c_3 y^3(t). \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$$

$$y_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{i\sqrt{2}t} + c_3 e^{-i\sqrt{2}t}$$

$$y_2(t) = -c_1 e^{3t} + \left(\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{6}\right) c_2 e^{i\sqrt{2}t} + \left(\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{6}\right) c_3 e^{-i\sqrt{2}t}$$

$$y_3(t) = \left(-\frac{5}{9} + i\frac{7\sqrt{2}}{18}\right) c_2 e^{i\sqrt{2}t} + \left(-\frac{5}{9} + i\frac{7\sqrt{2}}{18}\right) c_3 e^{-i\sqrt{2}t}$$

كما نعلم أن:

$$\frac{y^2 - y^3}{2i} \quad \text{و} \quad \frac{y^2 + y^3}{2}, \quad y^1$$

حلول حقيقية للمعادلة، وهي مستقلة.

فإن الحل العام في $\mathbb{R}$ يكتب على الشكل:

$$y_1(t) = k_1 e^{3t} + k_2 \cos \sqrt{2}t + k_3 \sin \sqrt{2}t$$

$$y_2(t) = -k_1 e^{3t} + \left(\frac{1}{3} \cos \sqrt{2}t - \frac{1}{6} \sin \sqrt{2}t\right) k_2 + \left(\frac{1}{3} \sin \sqrt{2}t + \frac{1}{6} \cos \sqrt{2}t\right) k_3$$

$$y_3(t) = k_2 \left(\frac{5}{9} \cos \sqrt{2}t + \frac{7\sqrt{2}}{18} \sin \sqrt{2}t\right) + k_3 \left(\frac{7\sqrt{2}}{18} \cos \sqrt{2}t - \frac{5}{9} \sin \sqrt{2}t\right)$$

حيث k_1, k_2, k_3 أعداد حقيقية.

حل النمرين الثالث

نلاحظ أنه يمكن كتابة النظام (33.3) على الشكل:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + B(t). \quad (35.3)$$

حيث:

$$B(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

كثير الحدود المميز لـ A هو:

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

تتمتع إذن المصفوفة A بقيمة ذاتية مزدوجة $\lambda_1 = -1$ وأخرى بسيطة $\lambda_2 = 2$.

لنبحث عن أشعة ذاتية مرفقة بالقيم الذاتية $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = 2$.

• يكون الشعاع $X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^t$ شعاعاً ذاتياً مرفقاً بالقيمة الذاتية المزدوجة $\lambda_1 = -1$ إذا كان:

$$(A + I) \cdot X_1 = 0$$

أي:

$$x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 0$$

ومنه:

$$X_1 = (-x_2^{(1)} - x_3^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = x_2^{(1)}(-1, 1, 0) + x_3^{(1)}(-1, 0, 1)$$

فالفضاء الشعاعي الجزئي المرفق بـ λ_1 مولد بالشعاعين المستقلين خطياً:

$$v_1 = (-1, 1, 0) \quad , \quad v_2 = (-1, 0, 1)$$

• يكون الشعاع $X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})^t$ شعاعاً ذاتياً مرفقاً بالقيمة الذاتية λ_2 إذا كان:

$$(A - 2I) \cdot X_2 = 0$$

أي:

$$x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = x_3^{(2)}$$

وعليه فإن الفضاء الشعاعي الجزئي المرفق بـ λ_2 مولد بالشعاع $v_3 = (1, 1, 1)$.
نستنتج إذن أن الحل العام للجملة (33.3) بدون الطرف الثاني $B(t)$ هو:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot C, \quad (36.3)$$

حيث C يمثل شعاعاً عمودياً ثابتاً في $\mathbb{R}^3$.
للحصول على الحل العام للجملة (33.3) مع وجود الطرف الثاني $B(t)$ نستعين بطريقة تغيير الثوابت ونضع:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = R(t) \cdot C(t). \quad (37.3)$$

حيث:

$$R(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \quad (38.3)$$

باشتقاق طرفا العلاقة (37.3) نجد:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = R'(t) \cdot C(t) + R(t) \cdot C'(t) \quad (39.3)$$

إذن بتعويض (39.3) في (38.3) نجد:

$$R'(t) \cdot C(t) + R(t) \cdot C'(t) = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + B(t) \quad (40.3)$$

وبما أن:

$$R(t) = e^A \Rightarrow R'(t) = A \cdot R(t), \quad (41.3)$$

وبتعويض العلاقتين (41.3) و (39.3) في العلاقة (37.3) نجد:

$$R(t) \cdot C'(t) = B(t), \quad (42.3)$$

ومنه:

$$C'(t) = R^{-1}(t) \cdot B(t), \quad (43.3)$$

باستعمال إحدى الطرق المعروفة لقلب المصفوفات نجد:

$$R^{-1}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -e^t & 2e^t & -e^t \\ -e^t & -e^t & 2e^t \\ e^{-2t} & e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

وعليه:

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ te^{-2t} \end{pmatrix}$$

إذن:

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2t+1}{4}e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

وأخيراً فالحل العام للجملية هو:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = R(t) \cdot C(t) = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2)e^{-t} + k_3e^{2t} - \frac{1+2t}{4} \\ k_1e^{-t} + k_3e^{2t} - \frac{1+2t}{4} \\ k_2e^{-t} + k_3e^{2t} - \frac{1+2t}{4} \end{pmatrix}$$

(2) طريقة لابلاس لإيجاد حل النظام
بتطبيق مؤثر لابلاس على النظام (33.3) نجد:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x')(p) = \mathcal{L}(y)(p) + \mathcal{L}(z)(p) + \mathcal{L}(t)(p) \\ \mathcal{L}(y')(p) = \mathcal{L}(x)(p) + \mathcal{L}(z)(p) + \mathcal{L}(t)(p) \\ \mathcal{L}(z')(p) = \mathcal{L}(x)(p) + \mathcal{L}(y)(p) + \mathcal{L}(t)(p) \end{cases}$$

باستعمال لابلاس للمشتقات نجد:

$$\begin{cases} p\mathcal{L}(x)(p) - \mathcal{L}(y)(p) - \mathcal{L}(z)(p) = \mathcal{L}(t)(p) \\ -\mathcal{L}(x)(p) + p\mathcal{L}(y)(p) - \mathcal{L}(z)(p) = \mathcal{L}(t)(p) \\ -\mathcal{L}(x)(p) - \mathcal{L}(y)(p) + p\mathcal{L}(z)(p) = \mathcal{L}(t)(p) \end{cases}$$

يمكن كتابة النظام الأخير على الشكل $A\mathcal{L}(y_i)(p) = K$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} p & -1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ -1 & -1 & p \end{pmatrix} ; \quad \mathcal{L}(y_i)(p) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(y_1)(p) \\ \mathcal{L}(y_2)(p) \\ \mathcal{L}(y_3)(p) \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2} \\ \frac{1}{p^2} \\ \frac{1}{p^2} \end{pmatrix}$$

إذا:

$$A\mathcal{L}(y_i)(p) = K \Leftrightarrow \mathcal{L}(y_i)(p) = A^{-1}K$$

حساب A^{-1} .

(3) طريقة الاشتقاق

لدينا باشتقاق المعادلة الأولى في النظام (33.3) نجد:

$$x''(t) = y'(t) + z'(t) + 1 \quad (44.3)$$

بتعويض معادلتا النظام الثانية و الثالثة في المعادلة (44.3) نجد:

$$x''(t) = 2x(t) + y(t) + z(t) + 2t + 1 \quad (45.3)$$

ولدينا من المعادلة الأولى للنظام نجد:

$$y(t) + z(t) = x'(t) - t \quad (46.3)$$

بتعويض المعادلة (46.3) في (45.3) نجد:

$$x''(t) - x'(t) - 2x(t) = t + 1$$

وهي عبارة عن معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة نبحث عن حلولها كما رأينا في الفصل الأول. نلاحظ أن النظام (33.3) متناظر بالنسبة إلى $x(t), y(t), z(t)$. وعليه لو قمنا بنفس الطريقة على $y(t), z(t)$ نجد نفس النتيجة.

المراجع العلمية

- [1] د . حسن العويضي د . عبد الوهاب عباس رجب د . سناء علي زارع: المعادلات التفاضلية، الجزء الأول، دار الرشد 2005 .
- [2] أ . عبد المعطي البدري : المعادلات التفاضلية العادية و تطبيقاتها، دار الراتب الجامعية، بيروت 1985 .
- [3] أ . محمد حازي : المعادلات التفاضلية العادية من الرتبين الأولى و الثانية تفعيد نظري، ديوان المطبوعات الجامعية، سنة 1434 هـ 2013 م .
- [4] أ . عبد الحفيظ مقران : المعادلات التفاضلية، قسم الرياضيات المدرسة العليا للأساتذة، القبة، سنة 2014 م .
- [5] معن عبد المجيد ابراهيم : مبادئ المعادلات التفاضلية، مؤسسة الوراق للنشر و التوزيع، 2009 م .
- [6] د. فالح بن عمران الدوسري: إلكترونيات و كهرباء (رياضيات تخصصية- 2)، المؤسسة العامة للتعليم الفني و التدريب المهني، المملكة العربية السعودية.

قائمة المراجع باللغة الانجليزية

- [7] RICHARD C.DIPRIMA ZILLIAM E. BOYCE , ELEMENTARY DIFFERENTIAL Equations and boundary value problmes, john wiloysons,2012.
- [8] Steven C. Chapra and Raymond P. Canale, Numerical Methods for Engineers, New York, 2015.
- [9] Yehuda Pinehover and Jacob Rubinstein, An Introduction to Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2005.

