République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE D'ORAN AMMOUR AHMED

Algèbre linéaire

COURS DESTINÉ AUX ÉTUDIANTS
DEUXIÈME ANNÉE SP ÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES.
L2,PEM,PES

Par :

DR : DERKAOUI RAFIK
DÉPARTEMENT DES SCIENCES EXACTES

E.N.S.O.A.A 2022-2023

Avant-propos

Ce polycopié a été destiné aux étudiants inscrit en deuxième année spécialité Mathématiques à l'école normale supérieure.

Le contenu de ce polycopié, correspond au programme officiel de la matière Algèbre linéaire enseigné en deuxième année spécialité Mathématiques.

Le polycopié contient cinque chapitres :

- Espace vectoriel
- Application linéaire
- Matrices
- Système linéaire de n équations à n inconnues
- Les formes quadratiques.

Dr :DERKAOUI Rafik

Table des matières

1 | Les espaces vectoriels

Dans tous les chapitres, $\mathbb{K}$ représente un corps commutatif.

1.1 Les espaces vectoriels

Définition 1.1.1. *Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}-$espace vectoriel est un ensemble non vide E, dont les éléments sont appelés "vecteurs" muni de deux lois*
Une loi de composition interne

$$\begin{aligned} "+": \quad & E \times E \to E, \\ & (x, y) \mapsto x + y. \end{aligned}$$

appelée "addition" ou "somme vectorielle" .
Une loi de composition externe à gauche

$$\begin{aligned} "\cdot": \quad & \mathbb{K} \times E \to E, \\ & (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

appelée multiplication par un scalaire. Et vérifient les axiomes suivants :

1. ***La commutativité de l'addition***

$$\forall x, y \in E : x + y = y + x.$$

2. ***L'associativité***

$$\forall x, y, z \in E : (x + y) + z = x + (y + z).$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x.$$

3. ***L'éxistense de l'élement neutre pour l'addition***

$$\exists 0_E \in E, \forall x \in E : x + 0_E = x.$$

4. ***L'éxistence d'inverse additif***

$$\forall x \in E, \exists y \in E : x + y = 0_E \text{ avec } y \text{ est noté } (-x).$$

5. ***La normalisation*** $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$, $\forall x \in E$, *avec* $1_{\mathbb{K}}$*est l'élément neutre pour* $\mathbb{K}$.

6. ***La distributivité***

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$$

$$\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot .$$

Exemple 1.1.1. *Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$, un élément $X \in E$ est donc un couple (a, b) avec a et b sont des éléments de $\mathbb{R}$, i.e : $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : \ a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}\}$.*
Définition de la loi interne : *Soit (a, b), $(a', b') \in \mathbb{R}^2$, alors*

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

Définition de la loi externe : *si λ est un réel et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors*

$$\lambda \cdot (a, b) = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b).$$

Proposition 1.1.1. *Considerons un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$, on a*

1. $\forall x \in E, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : (\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x.$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in E : \alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y.$
3. $\forall x \in E : 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E.$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \cdot 0_E = 0_E.$
5. $\forall x \in E : (-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = (-x) = -x.$

Démonstration.

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \alpha \cdot x &= (\alpha - \beta + \beta) \cdot x = ((\alpha - \beta) + \beta) \cdot x \\ &= (\alpha - \beta) \cdot x + \beta \cdot x \end{aligned}$$

donc

$$(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x.$$

2. On a

$$\begin{aligned} \alpha \cdot x &= \alpha \cdot (x - y + y) \\ &= \alpha \cdot ((x - y) + y) \\ &= \alpha \cdot (x - y) + \alpha \cdot y. \end{aligned}$$

donc

$$\alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y.$$

3)Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$0_{\mathbb{K}} \cdot x = (\alpha - \alpha) \cdot x \Rightarrow 0_{\mathbb{K}} \cdot x = \alpha \cdot x - \alpha \cdot x,$$

donc

$$0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E.$$

4) On a
$$\forall x \in E : \alpha \cdot 0_E = \alpha \cdot (x - x) \Rightarrow \alpha \cdot 0_E = \alpha \cdot x - \alpha \cdot x,$$
donc
$$\alpha \cdot 0_E = 0_E.$$

5)On a $(1_{\mathbb{K}} - 1_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_E$. Par conséquence
$$1_{\mathbb{K}} \cdot x + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_E,$$
donc
$$x + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_E,$$
alors
$$(-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = -x.$$

□

Remarque. *Si $\alpha \cdot x = 0_E$ alors $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$, avec $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.*

1.2 Les sous-espaces vectoriels

Définition 1.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, une partie F de E est un sous-espace vectoriel si et seulement si*

1. $0_E \in F$,
2. $x + y \in F$, *pour tout* $x, y \in F$,
3. $\lambda \cdot x \in F$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et tout* $x \in F$.

Remarque. 1) *Les deux dernières propriétés* (2) *et* (3) *peuvent être combinées en une seule affirmation :*
$$\forall x, y \in F, \forall\ \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \in F.$$

2) *L'espace vectoriel E contient automatiquement les deux sous-espaces vectoriels, l'ensemble $\{0_E\}$ formé du seul vecteur nul, et l'ensemble tout entier E lui-même.*

Exemple 1.2.1. *L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En Effet,*

(i) $(0, 0) \in F$.

(ii) *Soit $x = (a, b)$ et $y = (a', b') \in F$ alors $a + b = 0$ et $a' + b' = 0$, donc $x + y \in F$.*

(ii) *Soit $x = (a, b) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $a + b = 0$, donc $\lambda a + \lambda b = 0$ d'où $\lambda x \in F$.*

Exemple 1.2.2. *L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$*
$$\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f \text{ est une fonction continue sur } \mathbb{R}\},$$
est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f \text{ est une fonction}\}$. En Effet,

(i) La fonction nulle est continue.

(ii) La somme de deux fonctions continues est une fonction continue.

(iii) Une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ multiple à une fonction continue est une fonction continue.

Intersection

Proposition 1.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Soit $x, y \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,alors $x + y \in F$ et $x + y \in G$, car ils sont des sous-espaces vectoriels de E qui contient x et y, de même λx est dans $F \cap G$, par suite

$$x + y \in F \cap G \text{ et } \lambda x \in F \cap G,$$

d'autre part $0_E \in F \cap G$. □

Remarque. *Soient $\{F_i\}_{i \in I}$ des sous-espaces vectoriels de E alors $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Exemple 1.2.3. *Soient $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. On remarque $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel. En effet, $(1, 0) \in F \subset F \cup G$ et $(0, 1) \in G \subset F \cup G$, donc $(1, 0) \in F \cup G$ et $(0, 1) \in F \cup G$, mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F \cup G$.*

Remarque. *Un runion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel.*

Proposition 1.2.2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors*

$$(F \subset G \text{ ou } G \subset F) \Rightarrow (F \cup G \text{ un sous-espace vectoriel}).$$

Proposition 1.2.3. *Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E, on a les propriétés suivantes*

1. $a + F = \{a + t : t \in F\} = F \Leftrightarrow \forall a \in E : a \in F$,
2. $a + F = b + F \Leftrightarrow \forall a, b \in E : a - b \in F$.

Démonstration.

1. On a $a + F = F$, et on veut montre que $a \in F$. Puisque

$$a + F = F,$$

grace à la définiton est produite

$$\forall t \in F : a + t \in F,$$

car $a + t \in a + F \subset F$, donc

$$a + t - t \in F,$$

F est un sous-espace vectoriel. Et inversement

$$a \in F \Rightarrow \forall t \in F : a + t \in F.$$

donc F est un sous-espace vectoriel.

2. Soit $a, b \in E$, montre que
$$a + F = b + F \Leftrightarrow a - b \in F,$$
on a
$$a + F = b + F \Leftrightarrow a - b + F = F,$$
Comme E est un espace vectoriel, alors $a - b \in E$, donc $a - b \in F$.

□

1.2.1 La somme et la somme directe

La somme des deux sous-espaces vecteriels

Définition 1.2.2. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E, l'ensemble de tout les éléments où est un élément de E est appelé* ***somme des sous-espaces vectoriels*** *et cette somme est notée*
$$F + G = \{z \in E : \exists x \in F \text{ et } \exists y \in G : z = x + y\}.$$

Proposition 1.2.4. *La somme des deux sous-espaces vectoriels F et G est un sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$.*

Démonstration.
On montre que $F + G$ est un sous-espace vectoriel,

(*i*) Puisque $0_E \in F$ et $0_E \in G$, alors $0_E \in F + G$.

(*ii*) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u, v \in F + G$, alors il existe $x_1, x_2 \in F$ et $y_1, y_2 \in G$, tels que
$$u = x_1 + y_1 \qquad \text{et} \qquad y = x_2 + y_2,$$
donc
$$\begin{aligned}\lambda u + v &= \lambda(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \lambda x_1 + \lambda y_1 + x_2 + y_2 \\ &= (\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2).\end{aligned}$$
Puisque F, G sont des sous-espaces vectoriels, alors $\lambda x_1 + x_2 \in F$, $\lambda y_1 + y_2 \in G$, donc $\lambda u + v \in F + G$.

□

Exemple 1.2.4. *Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est la somme de E_1 et E_2, où E_1 est le sous-espace vectoriel engendré par $e_1 = (1, 0)$ et E_2 le sous-espace vectoriel engendré par $e_2 = (0, 1)$.*

La somme directe des deux sous-espaces vectoriels

Définition 1.2.3. *Soit E un espace vectoriel, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont* ***supplémentaires (la somme directe de*** *F et G) dans E si et seulement si*
$$\begin{cases} E = F + G, \\ F \cap G = \{0_E\}. \end{cases}$$
On note alors
$$F \oplus G = E.$$

Proposition 1.2.5. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si, pour tout $w \in E$ il existe un couple unique de vecteurs $u \in F$ et $v \in G$ tels que $w = u + v$.*

Remarque. *Dire qu'un élément w de E s'écrit d'une manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G signifie que si $w = u+v$ avec $u \in F, v \in G$ et $w = u'+v'$ avec $u' \in F, v' \in G$ alors $u' = u$ et $v = v'$*

$$\forall w \in E,\ \exists!\,(u,v) \in F+G,\ w = u+v.$$

Démonstration.
Supposons $E = F \oplus G$, et montrons que tout élément $w \in E$ se décompose de manière unique. Soient donc

$$w = u+v \qquad \text{et} \qquad w = u'+v'$$

avec $u, u' \in F, v, v' \in G$. On a alors $u+v = u'+v'$, donc $u-u' = v'-v$. Comme F et G sont des **S.e.v**, alors

$$u-u' \in F \qquad \text{et} \qquad v'-v \in G.$$

Conclusion : $u-u' = v'-v \in F\cap G$, mais par définition d'éspaces supplémentaires $F\cap G = \{0_E\}$, donc

$$v'-v = 0_E \qquad \text{et} \qquad u-u' = 0_E\ ,$$

on en déduit

$$u' = u \qquad \text{et} \qquad v = v'.$$

Supposons que tout $w \in E$ se décompose de manière unique et montrons

$$E = F \oplus G.$$

(i) Si $u \in F\cap G$ il peut s'écrire des deux manières suivantes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G

$$u = 0_E + u \qquad \text{et} \qquad u = u + 0_E.$$

Par l'unicité de la décomposition $u = 0_E$, donc

$$F\cap G = \{0_E\}\,.$$

(ii) Montrons $F+G = E$. Il n'y a rien à prouver, car par hypothèse tout élément w se décompose en $w = u+v$, avec $u \in F$ et $v \in G$. □

Exemple 1.2.5. *On considère les sous-espaces vectoriels suivants*

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y-z = 0\right\} \text{ et } B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\right\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.En effet,

(i) *si l'élément $w = (x,y,z)$ appartient à l'intersection de A et de B, alors les coordonnées de w vérifient : $x-y-z = 0$, et $y = z = 0$, donc $w = (0,0,0)$.*

(*ii*) *Soit donc* $w = (x, y, z)$ *un élément quelconque de* $\mathbb{R}^3$*, il faut déterminer des éléments* u *de* A *et* v *de* B *tels que* $w = u + v$*. L'élément* u *doit être de la forme*

$$u = (y_1 + z_1, y_1, z_1)\,,$$

et l'élément v *de la forme*

$$v = (x_2, 0, 0)\,.$$

On a $w = u + v$ *si et seulement si* $y_1 = y$, $z_1 = z$, $x_2 = x - y - z$*. On a donc*

$$(x, y, z) = (y + z, y, z) + (x - y - z, 0, 0)\,,$$

avec $u = (y + z, y, z)$ *dans* A *et* $v = (x - y - z, 0, 0)$ *dans* B*, alors*

$$A \oplus B = \mathbb{R}^3.$$

Exemple 1.2.6. *Soit*

$$H_1 = \{X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}\,,$$

et

$$H_2 = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=0}^{i=n} x_i = 0 \right\},$$

alors $H_1 \oplus H_2 = \mathbb{R}^n$*.*

1.3 L'espace vectoriel $E/\mathcal{R}$

1.3.1 Relation Binaire

Définition 1.3.1. *Une relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur un ensemble* E *est une propriété portant sur les couples d'élément de* E*. On notera* $(a\mathcal{R}b)$ *le fait que la propriété est vraie pour le couple* $(a, b) \in E \times E$*.*

Définition 1.3.2. *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation binaire sur un ensemble* E*, on dit que*

1. $\mathcal{R}$ *est* ***réflexive*** *si pour tout* $x \in E$*, on a*

$$x\mathcal{R}x.$$

2. $\mathcal{R}$ *est* ***symétrique*** *si pour tout* $x, y \in E$*, on a*

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x.$$

3. $\mathcal{R}$ *est* ***transitive*** *si pour tout* $x, y, z \in E$*, on a*

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

4. $\mathcal{R}$ *est* ***autisymétrique*** *si pour tout* $x, y \in E$*, on a*

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y.$$

Relation d'équivalence

Définition 1.3.3. *Une relation binaire est une **relation d'équivalence** si et seulememt si elle est **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.*

Exemple 1.3.1. *La relation d'égalité " = " est une relation d'équivalence. En effet*

(i) $\forall x \in E : x = x$ *donc " = " est réflexive,*

(i) $\forall x, y \in E : x = y$ *implique* $y = x$ *donc " = " est symétrique,*

(iii) $\forall x, y, z \in E : x = y \wedge y = z \Rightarrow x = y = z \Rightarrow x = z$, *donc " = " est transitive.*

Exemple 1.3.2. *Soit la relation* $\mathcal{R}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow ch^2x - sh^2y = 1,$$

alors, $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence, en effet*

(i) $\mathcal{R}$ *est réflexive*

$$ch^2x - sh^2x = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right) = 1 = 1,$$

donc $x\mathcal{R}y$.

(ii) $\mathcal{R}$ *est symétrique, on a* $x\mathcal{R}y$, $x\mathcal{R}x$ *et* $y\mathcal{R}y$, *alors*

$$\begin{cases} \mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2y = 1, \\ \mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1, & \Rightarrow \mathrm{ch}^2y - \mathrm{sh}^2x = 1, \\ \mathrm{ch}^2y - \mathrm{sh}^2y = 1, \end{cases}$$

c'est à dire $y\mathcal{R}x$.

(iii) $\mathcal{R}$ *est transitive, puisque*

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow \mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2y = 1 \text{ et } \mathrm{ch}^2y - \mathrm{sh}^2z = 1,$$

donc

$$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2z = 1$$

implique $x\mathcal{R}z$.

Classe d'équivalence

Définition 1.3.4. *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur* E. *On appelle **classe d'équivalence** d'un élément* x *de* E, *l'ensemble des éléments de* E *en relation avec* x *par* $\mathcal{R}$, *notée*

$$\overline{x} = \{y \in E : y\mathcal{R}x\}.$$

Remarque. *La classe d'équivalence* $\overline{x}$ *est non vide car* $\mathcal{R}$ *est réflexive et contient de ce fait au moins* x.

Ensemble des classe d'équivalence

Définition 1.3.5. *Ensemble des classe d'équivalence nomme* ***ensemble quotient*** *de E par $\mathcal{R}$ et se note $E/\mathcal{R}$ avec*

$$E/\mathcal{R} = \{\overline{x} : x \in E\}.$$

Remarque. *Les classes d'équivalences forment une partition de l'ensemble E.*

$$E = \underset{i\in I}{\cup}\overline{x_i} \quad et \quad \underset{i\in I}{\cap}\overline{x_i} = \phi.$$

Exemple 1.3.3. *Posons la relation d'équivalence définit sur $\mathbb{Z}$ suivante*

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} : n - m = 3k.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$\overline{n} = \{m \in \mathbb{Z} : m = n + 3k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Et l'ensemble des classes d'équivalences est donnée par $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\right\}$, car

$$\begin{aligned}
\overline{0} = \overline{3} = \overline{6} &= \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\},\\
\overline{1} = \overline{4} = \overline{7} &= \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\},\\
\overline{2} = \overline{5} = \overline{8} &= \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Alors on peut exprimer l'ensemble $\mathbb{Z}$ par la forme suivante

$$\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2}.$$

1.3.2 Espace vectoriel quotient $E/\mathcal{R}$

Définition 1.3.6. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, soit F un sous-espace vectoriel de E sur E, on considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E par :*

$$\text{pour tout } x, y \in E :\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in F.$$

Proposition 1.3.1. *On définit sur E/F les deux lois de composition interne"$\overline{+}$"et externe "$\bar{\cdot}$" suivantes*

$$\begin{aligned}
\overline{+} :\ & E/F \times E/F \to E/F,\\
& (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x}\overline{+}\overline{y} = \overline{x + y}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\cdot} :\ & \mathbb{K} \times E/F \to E/F,\\
& (\alpha, \overline{x}) \mapsto \alpha\bar{\cdot}\overline{x} = \overline{\alpha \cdot x}.
\end{aligned}$$

alors $(E/F, \overline{+}, \bar{\cdot})$ est un espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathbb{K}$,

Démonstration. On a

1. $(E/F, \overline{+})$ est un groupe commutatif $\big($d'où l'élément neutre est $\overline{0}_E\big)$.
2. $1_{\mathbb{K}}\bar{\cdot}\overline{x} = \overline{x}$.
3. $\lambda \bar{\cdot} (\overline{x} \overline{+} \overline{y}) = \lambda \bar{\cdot} \overline{x} \overline{+} \lambda \bar{\cdot} \overline{y}$.
4. $(\lambda + \mu) \bar{\cdot} \overline{x} = \lambda \bar{\cdot} \overline{x} \overline{+} \mu \bar{\cdot} \overline{x}$.

5. $\lambda \bar{\cdot} (\mu \bar{\cdot} \overline{x}) = (\lambda \cdot \mu) \bar{\cdot} \overline{x}$.

$\square$

Proposition 1.3.2. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'espace vectoriel E, soit F un sous-espace vectoriel de E. On a les propriétés suivantes*

1. $\forall x \in E : x \in \overline{x}$.
2. $\overline{0}_E = F$.
3. $\forall x, y \in E : \overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.

1.4 Combinaison linéaire

Soit E un espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathbb{K}$.

Définition 1.4.1. *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des vecteurs et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des scalaires, alors la combinaison de ces vecteurs est le vecteur*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n, \qquad \textit{pour tout } x \in E.$$

Remarque. *Soit $(\lambda_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{K}$ et $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}} \in E$. Si $\lambda_i = 0$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ alors*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E.$$

Notation. *On note la combinaison linéaire des éléments de A par $[A]$, avec*

$$[A] = vect(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ : \ x_i \in A \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{K}, \ i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Exemple 1.4.1. *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^3$.*

Considéront le vecteurs (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire de $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ en effet

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= x\,(1,0,0) + y\,(0,1,0) + z\,(0,0,1) \\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.1. *L'espace $[A]$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient A.*

Démonstration.
Montrons que $A \subset [A]$: Soit $I \subset \mathbb{N}$, tel que $\operatorname{Card}(I) < \infty$, $(x_i)_{i\in I} \in A$, alors $x_i = 1_k \cdot x_i \in [A]$, donc $[A]$ est un sous espace vectoriel.

(*i*) $0_E \in [A]$, car $0_E = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, donc $0_E = \sum_{i\in I} 0_{\mathbb{K}}.x_i$, avec $\lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$, pour tout $i \in I$.

(*ii*) Montrons que : pour tout $x, y \in [A]$: $x + y \in [A]$, alors $\exists I, J \subset \mathbb{N}$, $(\lambda_i)_{i\in I}, (\beta_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}$, tel que $\operatorname{Card}(I) < \infty$ et $\operatorname{Card}(J) < \infty$,

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i\in J} \beta_i y_i,$$

donc

$$x + y = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i + \sum_{i\in J} \beta_i x_i = \sum_{i\in \Lambda} \gamma_i z_i,$$

où $\Lambda \subset \mathbb{N}$, $\mathrm{Card}\,(\Lambda) < \infty$ et $(z_i)_{i\in\Lambda} \in A$.

(iii) $\forall x \in [A]\,, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $x = \sum_{i\in I} \beta_i x_i$, donc

$$\lambda x = \lambda \sum_{i\in I} \beta_i x_i = \sum_{i\in I} (\lambda_i \beta_i)\, x_i \in [A]\,,$$

□

Démonstration. Montrons que $[A]$ est le petit sous-espace vectoriel qui contient A.
Supposons qu'il existe B un sous-espace vectoriel pour que $A \subset B$, il faut montrer que $[A] = B$.
On a $B \subset [A]$, et $[A] \subset B$, si $z \in [A]$, alors $\exists I \subset \mathbb{N}, \exists\, (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}$, tel que

$$z = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i,$$

comme $(x_i)_{i\in I} \in A \subset B$, alors $(x_i)_{i\in I} \in B$, donc

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i \in B,$$

alors $z \in B$. □

Proposition 1.4.2. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, soit F un sous-espace vectoriel de E, on a $[F] = F$.*

Démonstration. Il suffit montrer que $[F] \subset F$, soit $x \in \langle F \rangle$, alors

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i, \quad (x_i)_{i\in I} \in F, (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K},$$

et lorsque F est un sous-espace vectoriel donc

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \in F.$$

□

1.5 Famille génératrice

Définition 1.5.1. *Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs de E. La famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est **une famille génératrice** de E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$, c'est -à-dire*

$$\forall v \in E, \exists\, \{\lambda_i\}_{i=\overline{1,p}} \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i v_i.$$

Exemple 1.5.1. *Montrons que les vecteurs* $v_1 = (1,0,0)$*,* $v_2 = (0,1,0)$*,* $v_3 = (0,0,1)$ *constituent un système génératrice de* $\mathbb{R}^3$*.*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3,$$

on a

$$(x,y,z) = \lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,1,0) + \lambda_3 (0,0,1),$$

alors

$$\begin{cases} \lambda_1 = x, \\ \lambda_2 = y, \\ \lambda_3 = z. \end{cases}$$

Donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$*.*

Famille génératrice minimale

Définition 1.5.2. *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel,* F *un sous-espace vectoriel de* E *et* $A = \{x_i\}_{i \in I}$ *des vecteurs de* F*. On dit que* A *est* ***une famille génératrice minimale*** *de* F*, si*

1. *A est une famille génératrice de F.*
2. *Pour tout $i \in I$ la famille $\{x_i\}_{i \in I - i_0}$ n'est pas génératrice de F.*

Exemple 1.5.2. *Soient les vecteurs* $a = (1,1,-1)$*,* $b = (0,1,1)$ *et* $c = (1,0,1)$ *dans* $\mathbb{R}^3$*.*

(i) $\{a,b,c\}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c,$$

alors

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= \lambda_1 (1,1,-1) + \lambda_2 (0,1,1) + \lambda_3 (1,0,1) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} \lambda_3 = x - \lambda_1, \\ \lambda_2 = y - \lambda_1, \\ \lambda_1 = \frac{1}{3}(x+y+z). \end{cases},$$

(ii) $\{a,b,c\}$ *est génératrice minimale :* $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*,* $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \alpha a + \beta b$*, alors*

$$(x,y,z) = (\alpha, \alpha, -\alpha) + (0, \beta, \beta) = (\alpha, \alpha + \beta, -\alpha + b),$$

alors

$$\begin{cases} \alpha = x, \\ \beta = y - x, \\ z = -2x + y, \end{cases}$$

donc $\{a,b\}$ *n'est pas génératrice de* $\mathbb{R}^3$*, ainsi* $\{b,c\}$ *et* $\{a,c\}$*.*

1.6 Famille Libre, Liée

Définition 1.6.1. *Une famille* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *de* E *est* ***une famille libre*** *(ou linéairement indépendante) si toute combinaison linéaire nulle*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E,$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = \lambda_2 =, \cdots, \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

Remarque. *Si la famille* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ *de* E *n'est pas libre, on dit que la famille est liée ou linéairement dépendante. Dans ce cas il existe une combinaison linéaire nulle de* $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *avec au moins un coefficient non nul.*

Exemple 1.6.1. *Dans* $\mathbb{R}^3$*, soit* $\{(1,2,3), (4,5,6), (2,1,0)\}$*, posons*

$$\lambda_1 (1,2,3) + \lambda_2 (4,5,6) + \lambda (2,1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

La famille $\{(1,2,3), (4,5,6), (2,1,0)\}$ *est une famille liée.*

Exemple 1.6.2. *Soit* $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (2,-1,0)$, $v_3 = (2,1,1)$*, si* $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$*, alors*

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \end{cases}$$

donc $\lambda_1 = 0$*,* $\lambda_2 = 0$*,* $\lambda_3 = 0$*. Alors la famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est une famille libre.*

Famille libre maximale

Définition 1.6.2. *Soient* $\{x_i\}_{i \in I}$ *des vecteurs de* E*, on dit que* $\{x_i\}_{i \in I}$ *est* ***la famille libre maximale*** *de* E *si*

1. $\{x_i\}_{i \in I}$ *est une famille libre de* E*.*
2. $\forall x \in E$*,* $\{x_i\}_{i \in I} \cup \{x\}$ *est liée.*

Exemple 1.6.3. *Dans* $\mathbb{R}^3$*, soient* $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-2,1,0)$ *et* $u_3 = (1,0,-1)$*.*

(i) $\{u_1, u_2, u_3\}$ *est libre,sSoit* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$*, si* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$*, alors*

$$\lambda_1 (1,1,1) + \lambda_2 (-2,1,0) + \lambda_3 (1,0,-1) = (0,0,0)$$

on trouve le système suivant

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}.$$

(ii) Si $\{u_1, u_2, u_3, u\}$ *est liée, avec* $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*, alors* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda u = 0_{\mathbb{R}^3}$*, donc*

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda x = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda y = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda z = 0, \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-\lambda x + 2\lambda y + \lambda z}{4},$$

donc $\{u_1, u_2, u_3, u\}$ *est une famille liée, alors* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *est une famille libre maximale.*

1.7 La Base

Définition 1.7.1. *Une famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ des vecteurs de E est* **une base** *de l'espace vectoriel E si $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice.*

Théorème 1.7.1. *Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une base de E. Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Exemple 1.7.1. *Soit $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$, en effet,*

(i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, (x,y) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, *donc*

$$\begin{cases} \lambda_1 = x, \\ \lambda_2 = y, \end{cases}$$

donc la famille $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

(ii) $\forall \lambda_1, \lambda_2, \in \mathbb{R} : \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$, *alors*

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \end{cases}$$

donc la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre.

Exemple 1.7.2. *Soit $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (2,9,0)$, $v_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$.*

(i) $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *une famille génératrice, $\forall v = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, tels que*

$$(a_1, a_2, a_3) = \lambda_1 (1,2,1) + \lambda_2 (2,9,0) + \lambda (3,3,4),$$

on trouve

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = a_1, \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 = a_2, \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 = a_3. \end{cases}$$

(ii) $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, on a le système suivant*

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

d'où $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, et $\lambda_3 = 0$. Alors $\mathcal{B}$ est une base.

Notation. 1) *Les vecteurs $\{e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,0,...,0), \ldots, e_n = (0,0,...,1)\}$,est une base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

2) *La famille $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.*

1.7.1 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 1.7.2. *Un espace vectoriel E dit en* ***dimension finie*** *s'il admet une base finie, il suffit pour cela qu'il admette une famille génératrice finie. On l'appel dimension d'un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et on note $dim_{\mathbb{K}}E$ ou $dimE$.*

Exemple 1.7.3. *L'espace $E = \mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie, car $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$.*

Théorème 1.7.2. *Si un espace vectoriel admet* ***une base composée*** *de n éléments, toute base de cette espace a aussi n éléments.*

Corollaire 1.7.1. *Dans un espace vectoriel de dimension n, on a :*

(*i*) *Toute famille libre a au plus n éléments.*

(*ii*) *Toute famille génératrice a au moins n éléments.*

Remarque. *Si $dimE = n$, pour montrer qu'une famille de n éléments est une base de E, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien génératrice.*

Caractérisation des sous-espaces vectoriels en dimension finie

Proposition 1.7.1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie n, alors*

1. *$dimF \leq n$.*
2. *Si $dimF = n$, alors $F = E$.*

Exemple 1.7.4. *Soit F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, alors $dimF \leq 3$. On a donc les situations suivantes :*

1. *$dimF = 0$ forcément $F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, (réduite par l'originen $0_{\mathbb{R}^3}$).*
2. *$dimF = 1$, donc F est un droite passant par l'origine.*
3. *$dimF = 2$, alors F est un plan passant par l'origine.*
4. *$dimF = 3$ ssi $F = \mathbb{R}^3$ (l'espace entier).*

Remarque. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, on a :*

1. *$F = \{0_E\} \Leftrightarrow dimF = 0$ (tel que 0_E l'élément neutre dans l' espace vectoriel E), c'est-à-dire si $F = \{0_E\}$ alors la base de F est vide.*
2. *Si $dimF = 0$, donc 0_E est le seul générateur possible de F et $F = \{0_E\}$.*

Comme conséquent si $dimF = 1$, alors il existe un élément non nul dans F.

Proposition 1.7.2. *Soit E un espace vectoriel et A, B et F sous-espaces vectoriels de E, on a les propriétés suivantes*

1. *$A = B \Rightarrow dimA = dimB$.*
2. *$dim(A \times B) = dimA + dimB$.*
3. *$dimE/F = dimE - dimF$.*
4. *$A \subset B \Rightarrow dimA < dimB$.*

1.7.2 Théorème d'existence de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 1.7.3. *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie possède au moins un supplémentaire dans E.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}_F = \{f_1, \cdots, f_p\}$ une base de F, et $\mathcal{B}_E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Alors $\mathcal{B}_F$ est une famille libre, $\mathcal{B}_E$ est une famille génératrice de E. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $C = \{e_{i1}, ..., e_{ik}\} \subset \mathcal{B}_E$ telle que $\mathcal{B}_F \cap C = \mathcal{B}'_E$. Soit une base de E. Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{B}'_E$ est une base de E, donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \in \mathbb{K}$,

$$x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_p f_p + \mu_1 e_{i1} + \cdots + \mu_k e_{ik},$$

avec

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_p f_p \in F = [\mathcal{B}_F] \text{ et } \mu_1 e_{i1} + \cdots + \mu_k e_{ik} \in G = [C]$$

alors $E = F + G$. Soit $y \in F \cap G$, alors

$$y = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_p f_p = \mu_1 e_{i1} + \cdots + \mu_k e_{ik}.$$

On trouve

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_p f_p - \mu_1 e_{i1} - \cdots - \mu_k e_{ik} = 0_E.$$

Puisque car $\mathcal{B}'_E$ est une base de E, alors

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \cdots = \mu_k = 0,$$

□

1.7.3 Théorème de caractérisation des sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 1.7.4. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors*

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\}, \\ \dim F + \dim G = \dim E. \end{cases}$$

Démonstration. Caractérisation de $E = F \oplus G$. On a

$$E = F \oplus G \Rightarrow E = F + G,$$

et

$$F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow B_F \cup B_G,$$

est une base de E, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E, \\ B_F \cup B_G \text{ libre ou génératrice,} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E, \\ F \cap G = \{0_E\}. \end{cases}$$

□

Dimension d'une somme des sous-espaces vectoriels

Proposition 1.7.3. *Soit $\{F_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ une famille des sous-espaces vectoeiels de E. On a alors*

$$\dim(F_1+F_2+\cdots+F_n)\leq \dim F_1+\dim F_2+\cdots+\dim F_n.$$

Cas d'égalité

$$(\dim(F_1+F_2+\cdots+F_n)=\dim F_1+\dim F_2+\cdots+\dim F_n) \Leftrightarrow (F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_n),$$

c'est à dire $F_1, F_2, \cdots, F_n$ est une somme directe

Théorème 1.7.5 (Formule de Grassman)**.** *Soit F et G deux sous-espaces vectoeiels de E de dimension finie. Alors*

1. *$dim(F+G) = dimF + dimG - dim(F\cap G)$,*
2. *$dim(F\oplus G) = dimF + dimG$.*

Démonstration. Soit V un sous espace supplémentaire de $F\cap G$ dans G, c'est-à-dire

$$G=(F\cap G)\oplus V,$$

Montrons que $F+G=F\oplus V$.
(i) Soit $x\in F+G$, alors $x=f+g$, avec $f\in F$ et $g\in G$. Comme

$$G=(F\cap G)\oplus V,$$

on peut décomposer $g=f+v$,avec $f\in F\cap G$ et $v\in V$, d'où

$$x=f+f_1+v=f_2+v,$$

avec $f_2\in F\Rightarrow F+G=F+V$.
(ii) Comme $G=(F\cap G)\oplus V$, comme $V\in G$, alors

$$F\cap G\cap V=F\cap V=\{0\},$$

donc

$$F\cap G\cap V=\{0\} \qquad \text{et} \qquad G\cap V=V,$$

Par suite $F+G=F\oplus V$, implique que

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim V,$$

et on a

$$\dim G=\dim(F\cap G)+\dim V,$$

alors

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

□

1.7.4 Coordonnées d'un vecteur

Théorème 1.7.6. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n, soit $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ une base de E, alors pour tout $x \in E$ il existe n scalaires uniques $\{\lambda_i\}_{i\in\{1,...,n\}}$ tels que*

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i.$$

Définition 1.7.3. *Les scalaires $\{\lambda_i\}_{i\in\{1,...,n\}}$ sont appelés* ***les coordonnées de** x **dans la base** $\mathcal{B}$.*

Le rang d'une famille des vecteurs

Définition 1.7.4. *Le rang d'une famille des vecteurs est le dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille. i.e : si $A = \{v_i\}_{i\in\{1,...,n\}}$, donc rang$(A)$ =dim$[a]$.*

Théorème 1.7.7. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Si $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est une famille d'éléments de E $(p \leq n)$ telle que les x_i s'écrivent $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} e_j$ avec $\alpha_{i,i} \neq 0$ et $\alpha_{j,i} = 0$ pour $j < i$, alors $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est libre.*

2 | Les applications linéaires

Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, on dit que $f : E \to F$ est une application

$$\forall x, y \in E : x = y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

- **Injective** si
$$\forall x, y \in E : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$
- S**urjective** si
$$\forall y \in F : \exists x \in E, y = f(x).$$
- B**ijective** si elle est injective et surjective, c'est-à-dire
$$\forall y \in F : \exists! x \in E, y = f(x).$$

2.1 L'application linéaire

Définition 2.1.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et f une application de E dans F. Dire que f est* ***linéaire*** *signifie que l'assertion suivante est vraie*

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \; f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Notation. *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

Remarque. *Soit f est une application linéaire, alors*

(*i*) $\forall (x, y) \in E^2 : f(x + y) = f(x) + f(y)$,

(*ii*) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Théorème 2.1.1. *$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, il définit par les deux lois suivantes*
Une loi de composotion interne :

$$\begin{aligned} \oplus : \; & \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E, F) \\ & (f, g) \mapsto f \oplus g : E \to F. \end{aligned}$$

tel que

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \qquad \textit{pour tout } x \in E.$$

Une loi de composition externe :

$$\begin{aligned} \odot : \; & \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E, F) \\ & (\lambda, g) \mapsto \lambda \odot g : E \to F. \end{aligned}$$

tel que

$$(\lambda \odot f)(x) = \lambda \cdot f(x), \qquad \textit{pour tout } x \in E.$$

Exemple 2.1.1. *Soit l'application* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par :* $f(x, y, z) = (-2x, y + 3z)$ *alors* f *est une application linéaire, car*
$\forall X, \grave{X} \in \mathbb{R}^3$,$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $X = (x, y, z)$ *et* $\grave{X} = (\grave{x}, \grave{y}, \grave{z})$*, on a*

$$\begin{aligned} f\left(X + \grave{X}\right) &= f(x + \grave{x}, y + \grave{y}, z + \grave{z}) = (-2(x + \grave{x}), (y + \grave{y}) + 3(z + \grave{z})) \\ &= (-2x, y + 3z) + (-2\grave{x}, \grave{y} + 3\grave{z}) = f(X) + f(\grave{X}), \end{aligned}$$

$$f(\lambda \cdot X) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (-2\lambda x, \lambda y + 3\lambda z) = \lambda \cdot f(X).$$

Exemple 2.1.2. *Soit l'application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x) = x^2$ *alors* f *n'est pas une application linéaire, car, pour* $x = 1$ *et* $y = -1$*, on a*

$$f(x + y) \neq f(x) + f(y).$$

Notation. - ***Une endomorphisme*** *d'un espace vectoriel* E *est une application linéaire de* E *dans* E*, on note* $\mathcal{L}(E)$ *l'ensemble des endomorphisme de* E*.*
- ***Une isomorphisme*** *de* E *sur* F *est une application linéaire bijective, on note* $\mathcal{I}so\,(E, F)$ *l'ensemble des isomorphisme de* E *à* F*.*
- ***Un automorphisme*** *est un endomorphisme bijective, on note* $\mathcal{G}L\,(E)$ *l'ensemble des automorphismes de* E*.*
- ***Une forme linéaire*** *sur* E *est une application linéaire de* E *sur* $\mathbb{K}$ *et on note* $E^{\mathbb{K}}$ *ou bien* $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$*.*

Proposition 2.1.1. *Soient* E*,* F *et* G *des* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels, soient* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *deux applications linéaires, on a les propriétés suivantes*

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in E$.
3. *Si* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *sont des vecteurs de* E*, alors*
$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} : f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i).$$
4. $(g \circ f)$ *est une application linéaire de* E *dans* G*.*
5. $(f \oplus g)$ *est une application linéaire de* E *dans* G*.*

Démonstration.

1. On a $f(0_E) = f(0_{\mathbb{K}} \cdot x) = 0_E \cdot f(x)$, puisque f est linéaire, donc $f(0_E) = 0_F$.
2. On a $f(-x) = f(-1_{\mathbb{K}} \cdot x) = -1_{\mathbb{K}} f(x)$puisque f est linéaire, donc $f(-x) = -f(x)$.
3. Puisque f est linéaire, donc
$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) &= f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n), \\ &= \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_n f(e_n), \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i). \end{aligned}$$

4. Montrons que $(g \circ f) \in \mathcal{L}(E,G)$. Lorsque g et f sont des applications linéaire, $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda x + y) &= g\left[f(\lambda x + y)\right] = g\left[f(\lambda x) + f(y)\right] \\ &= g\left[\lambda f(x) + f(y)\right] \\ &= \lambda\,(g \circ f)\,(x) + (g \circ f)\,(y),\end{aligned}$$

5. évident.

□

Théorème 2.1.2. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire bijective, donc l'application $f^{-1} : F \to E$ est aussi linéaire.*

Démonstration. Soient $y_1 \in F$ et $y_2 \in F$, puisque f est bijective, donc il existe $x_1 \in E, x_2 \in E$, tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Lorsque f est linéaire, alors

$$\begin{aligned}f^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) &= f^{-1}(\lambda f(x_1) + \mu f(x_2)), \\ &= f^{-1}(f(\lambda x_1 + \mu x_2)), \\ &= \lambda f^{-1}(y_1) + \mu f^{-1}(y_2).\end{aligned}$$

□

2.1.1 Noyau et image

Définition 2.1.2. *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.*

1) *On appele **noyau** de f et on note $\ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de E dont l'image réciprouqe est le vecteur nul de F, c'est à dire*

$$\ker(f) = \{x \in E : f\,(x) = 0_F\} = f^{-1}\left(\{0_F\}\right).$$

2) *On appele **image** de f et on note $Im(f)$ l'ensemble des vecteurs de F d'au moins un vecteur de E, c'estv à dire*

$$\mathrm{Im}(f) = \{f\,(x) : x \in E\ \} = f\,(E)\,.$$

Exemple 2.1.3. *On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$,*

$$f\,(x,y,z) = (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)\,.$$

On a

$$\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f\,(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$

$$f\,(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y, \\ z = -y, \end{cases}$$

donc

$$\ker(f) = \{(-y, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}\,,$$

alors $u = (-1, 1, -1)$ *est une base de ker*(f).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \left\{ f(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}, \\
&= \left\{ ((x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}, \\
&= \left\{ x(1, 2, 1) + y(2, 1, 2) + z(1, -1, 1) \right\},
\end{aligned}$$

on note $u_1 = (1, 2, 1), v_1 = (2, 1, 2)$ *et* $w_1 = (1, -1, 1)$ *est des vecteurs linéairement dépendante car* $v_1 - u_1 = w_1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \left\{ (xu_1 + yv_1 + z(v_1 - u_1)) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ ((x - z)u_1 + (y + z)v_1) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\},
\end{aligned}$$

alors u_1 *et* v_1 *ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre dans Im*(f), *comme c'est une famille génératrice de Im*(f), *c'est une base de Im*(f).

Exemple 2.1.4. *Soit* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *une application linéaire définit par* $g(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 2z)$, *on note* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *la base cononique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathcal{B}' = \{g_1, g_2\}$ *la base cononique de* $\mathbb{R}^2$.

$$\ker g = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2} \right\}$$

$$g(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = -z, \end{cases}$$

alors

$$\ker g = \{ z(0, -1, 1) : z \in \mathbb{R} \},$$

donc $a = (0, -1, 1)$ *est une base de ker*(g).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(g) &= \left\{ f(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}, \\
&= \left\{ (x + y + z, -x + 2y + 2z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}, \\
&= \{ x(1, -1) + (y + z)(1, 2) + z \} \\
&= [(1, -1), (1, 2)].
\end{aligned}$$

Théorème 2.1.3. *Soit* E, F *deux* $\mathbb{K}-$*espaces vectorels et* $f : E \to F$ *une applications linéaire, on a*

1. *Im*(f) *est un sous-espace vectoriel de* F.
2. *ker*(f) *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration.

1. (i) $0_F \in \mathrm{Im}(f)$, en effet, comme f est une application linéaire, alors $f(0_E) = 0_F \in \mathrm{Im}(f)$.
   (ii) Pour tous $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(f)$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, Il existe $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$, tel que

$$f(x_1) = y_1 \text{et } f(x_2) = y_2$$

Montrons que $\lambda y_1+\mu y_2 \in$Im(f) i.e : $\exists ? z \in E$, tel que $\lambda y_1+\mu y_2 = f(z)$. Puisque f est une application linéaire, alors

$$\lambda y_1+\mu y_2 = \lambda f(x_1)+\mu f(x_2) = f(\lambda x_1+\mu x_2),$$

donc il existe $z=\lambda x_1+\mu x_2 \in E$, alors $\lambda y_1+\mu y_2 \in$Im(f). Alors Im(f) est un sous-espace vectoriel de F.

2. (i) $f(0_E)=0_F$, donc $0_E \in$ker(f).
   (ii)Soient $x_1, x_2 \in$ker(f) et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors

$$f(x_1)=f(x_2)=0_F,$$

donc

$$f(\lambda x_1+\mu x_2) = \lambda f(x_1)+\mu f(x_2) = 0_F.$$

Donc le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.

□

2.1.2 Théorème d'isomorphisme

Théorème 2.1.4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire, alors il existe une seule application linéaire bijective g de $E/ker(f)$ dans $Im(f)$telle que $f = i \circ g \circ \pi$, et on dit que*

$$(E/\mathrm{ker}(f) \simeq \mathrm{Im}\,(f)).$$

$$\begin{aligned} \pi :\ & E \to E/\mathrm{ker}(f) \\ & x \mapsto \pi(x) = \overline{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i :\ & \mathrm{Im} f \to F \\ & y \mapsto i(y) = y. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $g : E/\mathrm{ker}(f) \to$Im$(f)$ une application définit par $g(\overline{x}) = f(x)$, l'application g est bien définie en plus injective, car pour tout $\overline{x}, \overline{y} \in E/\mathrm{ker}(f)$, on a

$$\begin{aligned} \overline{x} = \overline{y} &\Leftrightarrow x - y \in \mathrm{ker}(f), \\ &\Leftrightarrow f(x-y) = 0_F, \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(y), \\ &\Leftrightarrow g(\overline{x}) = g(\overline{y}). \end{aligned}$$

D'autre part, on a pour tout $y \in$Imf, il existe $\overline{x} \in E/\mathrm{ker}(f)$, tel que $g(\overline{x}) = y$, donc g est surjective. Reste à montrer que g linéaire,

$$\begin{aligned} g(\alpha \,\bar{\cdot}\, \overline{x} \,\overline{+}\, \beta \,\bar{\cdot}\, \overline{y}) &= g(\overline{\alpha x} \overline{+} \overline{\beta y}) = g(\overline{\alpha x + \beta y}) \\ &= f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha g(\overline{x}) + \beta g(\overline{y}). \end{aligned}$$

On a $i \circ g \circ \pi : E \to F$, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}(i \circ g \circ \pi)(x) &= (i \circ g)(\pi(x)) \\ &= (i \circ g)(\overline{x}) = i(g(\overline{x})) \\ &= i(f(x)) = f(x).\end{aligned}$$

L'unicité : Supposons qu'il existe g_1 et g_2, tel que $f = i \circ g_1 \circ \pi$ et $f = i \circ g_2 \circ \pi$, alors $i \circ g_1 \circ \pi = i \circ g_2 \circ \pi$, i.e, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}(i \circ g_1 \circ \pi)(x) &= (i \circ g_2 \circ \pi)(x)(i \circ g_1)(\pi(x)) \\ &= (i \circ g_2(\pi(x)) \\ &= i(g_1(\overline{x})) = i(g_2(\overline{x})),\end{aligned}$$

donc

$$\forall \overline{x} \in E/\ker(f) : g_1(\overline{x}) = g_2(\overline{x}),$$

alors $g_1 = g_2$. □

Théorème 2.1.5. *Soit E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectorels et $f : E \to F$ une applications linéaire, on a*

1. *f est **injective** $\Leftrightarrow ker(f) = \{0_E\}$.*
2. *f est **surjective** $\Leftrightarrow Im(f) = F$.*

Démonstration. 1. Supponsons que f est injective.
(i) $0_E \in \ker(f)$, car $\ker(f)$ est sous-espace vectoriel de E donc $\{0_E\} \subset \ker(f)$.
(ii)Soit $x \in \ker(f)$, on a $f(x) = 0_F$. Puisque ff est linéaire et injective, alors

$$f(x) = f(0_E) = 0_F,$$

on deduit $x = 0_E$, donc

$$x \in \{0_E\} \Rightarrow \ker(f) \subset \{0_E\} \Rightarrow \ \ker(f) = \{0_E\}.$$

Supponsons que $\ker(f) = \{0_E\}$, soient $x, y \in E$, tel que $f(x) = f(y)$, alors $f(x) - f(y) = 0_F$, c'ést-à-dire $x - y \in \ker(f) = \{0_E\}$, donc

$$x - y = 0_E \Rightarrow x = y,$$

alors f est injective.

2. Supponsons que f est surjective et montrons que $\mathrm{Im}(f) = F$.
(i) On a $\mathrm{Im}(f) \subset F$.
(ii) Soit $y \in F$, comme f est surjective, alors il existe $x \in E$, tel que $y = f(x)$, donc $y = \mathrm{Im}(f)$, alors $F \subset \mathrm{Im}(f)$.
Supponsons que $\mathrm{Im}(f) = F$, Pour tout $y \in \mathrm{Im}(f) \in F$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc f est surjective.

□

2.1.3 Application linéaire en dimension finie

Théorème 2.1.6. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, on a alors $E \simeq \mathbb{K}^n$.*

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E. Soit $x \in E$, donc il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tel que $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$. Soit f une application définit par

$$\begin{aligned} f: \quad & E \to \mathbb{K}^n \\ & x \mapsto f(x) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \end{aligned}$$

Montrons que f est une application linéaire, soit$x, y \in E$, $\exists\, (\alpha_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}, (\beta_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{K}$, tel que

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \quad \text{et} \quad y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n,$$

donc

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2, ..., \lambda\alpha_n + \mu\beta_n) \\ &= \lambda\,(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + \mu\,(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \\ &= \lambda f\,(x) + \mu f\,(y) \end{aligned}$$

$\mathbb{O}\ltimes$ a f est bijective, car

$$\ker(f) = \{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \ : (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, ..., 0_{\mathbb{K}})\} = \{0_E\},$$

cela montre que f est une application **injective**. De plus, puisque dim$\mathbb{K}^n$ =dim$E$ $= n$, nous concluons que f est **surjective**. □

En plus de la théorème précédente, nous avons les propriétés suivantes

Proposition 2.1.2. *Soient E, F, A et B sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, on a*

1. *$A \simeq B \Leftrightarrow$dim$A$ =dim$B$.*
2. *dim($\mathcal{L}(E, F)$) =dim(E)$\times$dim(F).*
3. *Si $f : E \to F$ une applications linéaire bijective et $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E, donc $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ est une base de F.*

2.1.4 Rang d'une application linéaire

Définition 2.1.3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le rang de f est défini par la dimension de son image*

$$\text{rang}(f) = \text{rang}(f) = \text{dimIm}f.$$

Théorème 2.1.7 (Fondamentale)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors*

$$\text{dim}E = \text{dim}(\ker(f)) + \text{dim}(\text{Im}f),$$

on peut écrire aussi

$$\text{dim}E = \text{dim}(\ker(f)) + rg(f).$$

Proposition 2.1.3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie, et f une application linéaire de E dans F, on a*

1. *f est injective ssi rang(f) =dim$E$.*
2. *f est surjective ssi rang(f) =dim$F$.*
3. *f est bijective ssi rang(f) =dim$E$ =dim$F$.*

Démonstration.

1. Soit f une application linéaire injective, donc $\ker(f) = \{0_E\}$, et d'aprés la théorème précédente on trouve rang(f) =dim$E$.

2. Soit f une application linéaire surjective, alors
$$\mathrm{Im}f = F \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}f) = \dim F \Leftrightarrow rg(f) = \dim F.$$

3. On montre que f est bijective$\Leftrightarrow$rang(f) =dim$E$ =dim$F$, on a
$$\begin{aligned} f \text{ es bijective } &\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est injective} \\ f \text{ est surjective} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{rang}(f) = \dim E \\ \mathrm{rang}(f) = \dim F \end{cases}, \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rang}(f) = \dim E = \dim F. \end{aligned}$$

□

3 | Les Matrices

3.1 Les Matrices

Définition 3.1.1. *Soient n, p deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice à n lignes et p colonnes ou de dimension $n \times p$ (ou matrice de type (n,p)) à coefficients dans $\mathbb{K}$, un tableau de nombres a_{ij} de $\mathbb{K}$ avec i ($i \in \{1,\ldots,n\}$) désignant les lignes, et j ($j \in \{1,\ldots,p\}$) désignant les colonnes. La matrice est notée $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ c'est une application de $\{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}$ dans $\mathbb{K}^{n+p}$, alors*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Les nombres $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ sont appelées coefficients ou termes de la matrice. $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 3.1.1. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

est une matrice de format $(3,2)$, en particulaire :

$$a_{31} = 5, a_{12} = -a_{32} = 4.$$

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}$.

Remarque. *Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si elles ont même nombre de lignes, même nombre de colonnes et $a_{ij} = b_{ij}$ pour toutes $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $j \in \{1,\ldots,p\}$.*

Cas particuliers

- Une matrice comportant une seule ligne s'appelle un vecteur-ligne à donc pour dimension $1 \times p$. Dans ce cas $n = 1$ c'est une **matrice ligne**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \end{pmatrix}.$$

- Une matrice comportant une seule colonne s'appelle un vecteur-colonne à donc pour dimension $n \times 1$. Dans ce cas $p = 1$ c'est une **matrice colonne**

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

- La matrice à autant de lignes de colonnes et on dit que c'est **une matrice carrée** d'ordre n, l'orsque $n = p$. L'ensemble de ces noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. i.e si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3.2 Matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et n respectivement, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_p\}$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ une base de F.

Soit f une application linéaire de E dans F. Les vecteurs $\{f(e_1), \dots, f(e_p)\}$ appartiennnent à F, ils s'écrivent donc comme combinaison linéaire des vecteurs de base $\mathcal{B}'$.

On a pour tout $j = \{1, \dots, p\}$,

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \dots + a_{ij}e'_i + \dots + a_{nj}e'_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e'_i.$$

Le tableau de nombre

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \end{array}.$$

est appelé **matrice associée à** f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on note $\mathcal{M}_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Remarque. *La matrice d'une application linéaire dépend des bases choises $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.*

Exemple 3.2.1. *Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par :*

$$g(x, y, z) = (x + y - z, -x + y + z),$$

on associe l'espace $\mathbb{R}^3$ par la base canonique

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\},$$

et l'espace $\mathbb{R}^2$ *par la base canonique*

$$\mathcal{B}' = \{e_1' = (1,0), e_2' = (0,1)\}.$$

On a :

$$g(e_1) = g(1,0,0) = (1,-1) = e_1' - e_2',$$
$$g(e_2) = g(0,1,0) = (1,1) = e_1' + e_2',$$
$$g(e_3) = g((0,0,1)) = (-1,1) = -e_1' + e_2',$$

alors

$$\mathcal{M}_g(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.2.1. *Soient* G *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie (dim*$G = p \geq 1$*) et* $\mathcal{B}_G = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ *une base de* G.
Soient f *une application linéaire de* E *dans* F *et* g *une application linéaire de* F *dans* G. *On note* $A = M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ *et* $B = M_{(\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G)}(g)$. *Alors la matrice de* $g \circ f$ *dans les bases* B_E *et* B_G *est la matrice* BA.

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = B \times A$$

3.3 Application linéaire associée à une matrice

Théorème 3.3.1. *Soient* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension* p *muni d'une base* $B = \{e_1, \ldots, e_p\}$ *et* F *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension* n *muni d'une base* $B' = \{e_1', \ldots, e_n'\}$, *et* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *une matrice.*

On peut associer à A *une application linéaire* $f : E \to F$ *de la façon suivante : les images des vecteurs de base* $\mathcal{B}$ *de* E *sont définies comme les vecteurs de* F *dont les coordonnées dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont les colonnes successives de la matrice, c'est-à-dir*

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i', \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq p.$$

Remarque. *En particulier, on peut définir une application linéaire* $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *dont la matrice par rapport aux base canonique soit* $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.

Exemple 3.3.1. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R}),$$

on associe l'espace $\mathbb{R}^3$ *par la base* $\mathcal{B} = \{e_1(1,-1,1), e_2(1,1,0), e_3(1,0,0)\}$, *et l'espace* $\mathbb{R}^2$ *par la base* $\mathcal{B}' = \{e_1'(1,2), e_2'(0,-1)\}$, *alors se vanter de l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *associée à* A *aux bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$, *donc*

$$f(e_1) = e_1' + 2e_2', \quad f(e_2) = -e_1', \quad f(e_3) = e_1' + e_2'.$$

Ecrivons (x, y, z) comme combinaison linéaire des vecteurs (e_1, e_2, e_3)

$$(x,y,z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta + \gamma, \\ y = -\alpha + \beta, \\ z = \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = x - y - 2z, \\ \beta = y + z, \\ \alpha = z, \end{cases},$$

alors

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3), \\ &= \alpha(e_1' + 2e_2') + \beta(-e_1') + \gamma(e_1' + e_2'), \\ &= (\alpha - \beta + \gamma) e_1' + (2\alpha + \gamma) e_2', \\ &= (\alpha - \beta + \gamma, 2\alpha - 2\beta + 2\gamma) + (0, 2\alpha + \gamma), \\ &= (x - 2y - 2z, x - 3y - 4z). \end{aligned}$$

Opération sur les matrices

Addition matricielle et multiplication scalaire

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ deux matrices.

- **La somme** de A et B désignée par $A + B$, est la matrice obtenue en ajoutant les éléments de même indice :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}.$$

- **La multiplication** d'une matrice A par **un scalaire** k, notée kA s'obtient en multipliant chaque élément par k

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1p} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{np} \end{pmatrix}.$$

Remarque. *On dit que $A + B$ et kA sont encore des matrices $m \times n$. Nous pouvons aussi définir*

$$-A = (-1)A \text{ et } A - B = A + (-B),$$

La matrice $(-A)$ est l'opposée de la matrice A, et $A - B$ la différence des matrices A et B. Bien entendu aucune de ces opérations n'a de sens pour des matrices de dimension différentes.

Exemple 3.3.2. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix},$$

alors

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+6 & 3+8 \\ 0+1 & 4+(-3) & 5+(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3\times 1 & 3\times(-2) & 3\times 3 \\ 3\times 0 & 3\times 4 & 3\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & -18 & -24 \\ -3 & 9 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -22 & -18 \\ -3 & 17 & 31 \end{pmatrix}.$$

La matrice $2A - 3B$ est appelée combinaison linéaire des matrices A et B, de coefficients 2 et 3.

Proposition 3.3.1. *Soient trois matrices quelconques A, B et C de même taille, et deux scalaires arbitraires k et k'alors*

(a) $A + B = B + A$: *qui caractérise la commutativité de l'addition matricielle*

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$: *qui caractérise l'associativité de l'addition matricielle.*

(c) $A + 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} + A = A.$

(d) $A + (-A) = (-A) + A = 0$, *où* $-A = (-a_{ij})$.

(e) $k(A + B) = kA + kB.$

(f) $(k + k')A = kA + k'A.$

(g) $(kk')A = k(k'A)$.

Théorème 3.3.2. *On verra ultérieurement que l'ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ muni des deux opérations précédentes $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +, \times)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.*

Produit de deux matrices

Définition 3.3.1. *Soient $A = (a_{ik})$ et $B = (b_{kj})$ deux matrices telles que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B, autrement dit A est une matrice de dimension $m \times p$ et B est une matrice de dimension $p \times n$.* ***Le produit*** *$AB = C$ de A par B est la matrice de dimension $m \times n$ dont les élément ij est obtenu en multipliant la i-éme ligne de A par la j-éme colonne de B*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj},$$

insistons sur le fait que le produit AB n'est pas défini si A est une matrice de dimension $m \times p$ et B une matrice de dimension $q \times n$, où $p \neq q$.

Exemple 3.3.3. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

puisque A est une matrice 2×2 et B une matrice 2×3, le produit AB est défini et il est une matrice 2×3. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 2+15 & 0-6 & -4+18 \\ 4-5 & 0+2 & -8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 & 14 \\ -1 & 2 & -14 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.3.4. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

alors

$$AB = \begin{pmatrix} 5+0 & 6-4 \\ 15+0 & 18-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 10 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 0-6 & 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ce dernier exemple que le produit matriciel n'est pas commutatif, autrement dit a propriété $AB \neq BA$.

Proposition 3.3.2. *On a*

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{qm}(\mathbb{K})$ *donc*

$$(AB)\,C = A\,(BC) : \textit{associativité du produit de matrices.}$$

(b) $\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{pm}(\mathbb{K}),$

$$A\,(B+C) = AB + AC : \textit{distributivité à gauche du produit par rapport à la somme.}$$

(c) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{pm}(\mathbb{K}),$

$$(B+C)\,A = BA + CA : \textit{distributivité à droite du produit par rapport à la somme.}$$

(d) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{pm}(\mathbb{K}),$

$$k(AB) = (kA)\,B = A\,(kB).$$

Remarque. *Si $AB = AC$ on ne peut pas en déduire que $B = C$.*

Théorème 3.3.3. *Soit $k \geq 0$ est un entier et s $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la puissance k-éme de A de la façon suivante*

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall k \in \mathbb{N} : A^0 = I_n \text{ et } A^{k+1} = A^k A = AA^k.$$

*Si A et B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et $n \geq 0$ un entier alors on peut appliquer les formules du **Binôme** et de **Bernoulli***

$$\forall m \in \mathbb{N} : (A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_k^m A^k B^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} C_k^m B^k A^{m-k},$$

avec $C_k^m = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, où

$$A^m - B^m = (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}.$$

Remarque. 1) *$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n^2.*

2) *Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, si $AB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ n'implique pas que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.*

Exemple 3.3.5. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a $A \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$ et $B \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$ mais $AB = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$.

3.4 Matrices particulières

Matrice identitée (ou matrice unité) : Une matrice carrée dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1, et dont tout les autres sont nuls. Autrement dit A est une matrice identité si

$$a_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

On note I_n **matrice identitée** d'ordre n.

Remarque. -*La matrice identitée joue pour le produit matriciel un rôle similaire au nombre* 1 *pour le produit des nombres réels.*
- En supposant que les dimensions permettent le produit, on a

$$A \times I_n = I_n \times A = A.$$

Matrice diangonale : Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, exceptés ceux de la diagonale. Autrement dit A est **une matrice diagonale** si

$$a_{ij} = 0, \text{ si } i \neq j,$$

on désigne $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n. Si A est une matrice diagonale, on note

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}, ..., a_{nn}).$$

Exemple 3.4.1. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

est une matrice diagonale alors

$$A = \operatorname{diag}(2, 3, -1).$$

Proposition 3.4.1. *On a*

1. *Toute combinaison de matrice diagonale est une matrice diagonale.*
2. $diag(d_1, \ldots, d_n) \times diag(d'_1, ..., d'_n) = diag(d_1 d'_1, ..., d_n d'_n)$.
3. $\forall p \in \mathbb{N} : (diag(d_1, ..., d_n))^p = diag(d_1^p, ..., d_n^p)$.

Matrice nulle : On appelle matrice nulle tout matrice carrée dont les coefficients sont tout nuls. Danc ce cas $a_{ij} = 0, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Matrice triangulaire : Une matrice carrée dont tous les termes au-dessous de la diagonale sont nules est appelée **matrice triangulaire supérieure. C'et à dire** A est une matrice de type, $a_{ij} = 0$, pour $i \in \{j+1, ..., n\}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

De même les **matrice triangulaire inférieure** sont telles que $a_{ij} = 0$, si $i \in \{1, ..., j-1\}$.

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp$\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3.4.2. *On a*

1. *Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp inférieures) est triangulaire supérieure (resp inférieure) .*
2. *Dans les deux cas la diagonale du produit est* $(a_{11}a'_{11}, ..., a_{nn}a'_{nn})$.

Théorème 3.4.1. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ *et* $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *de dimension* $\frac{n(n+1)}{2}$.

3.4.1 Trace d'une matrice

Définition 3.4.1. ***La trace*** *de la matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est définie par la somme de ses éléments diagonaux :*

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Proposition 3.4.3. *Soient* A *et* B *deux matrices carrées d'ordre* n*, et* k *un scalaire :*

(a) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

(b) $tr(kA) = k\,tr(A)$.

(c) $tr(AB) = tr(BA)$.

Exemple 3.4.2. *Soient les deux matrices d'ordre* 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tr}(A) = 1 - 4 + 7 = 4, & \operatorname{tr}(B) = 2 + 3 - 4 = 1, & \operatorname{tr}(A+B) = 5 \\ \operatorname{tr}(2A) = 8 & \operatorname{tr}(AB) = -30 & \operatorname{tr}(BA) = -30. \end{array}$$

3.4.2 Matrice inversible

Définition 3.4.2. *Une matrice* A *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite* ***inversible*** *(ou régulière), s'il existe une matrice* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant* $AB = I_n = BA$*. Cette matrice* B *est alors unique, est appelée l'inverse de* A *et notée* A^{-1}.
L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversibles est noté* $GL_n(\mathbb{K})$.

Remarque. *On a*

1. $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $I_n^{-1} = I_n$.
2. *Si* $A \in GL_n(\mathbb{K})$ *alors* $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $(A^{-1})^{-1} = A$.

Théorème 3.4.2. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels de dimension finie* n*, soient* $\mathcal{B}_E$ *une base de* E *et* $\mathcal{B}_F$ *une base de* F *avec* $A = \mathcal{M}_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$*. Alors*

1. f *est bijective si et seulement si* A *est inversible et* $A^{-1} = (\mathcal{M}_f)^{-1} = \mathcal{M}_{f^{-1}}$.

2. *Si A et B sont des matrices inversibles d'ordre n, alors (AB) est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (la généralisation est stable pour l'inverse d'un produit des pleusieurs matrice inversibles).*
3. $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ *est un groupe appelé groupe linéaire d'ordre n.*
4. *A est inversible si et seulement si les vecteurs colonnes de A forment une famille libre.*
5. *Soit $C \in GL_n(\mathbb{K})$, soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors*

$$AC = BC \Rightarrow A = B.$$

Démonstration.

1. On sait que f est bijective si et seulement si

$$\exists f^{-1} \in \mathcal{L}(E,F), f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_{dE},$$

donc

$$\mathcal{M}_{f \circ f^{-1}} = M_{f^{-1} \circ f} = I_n \Leftrightarrow M_f M_{f^{-1}} = M_{f^{-1}} M_f = I_n,$$

implique

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

2. D'une part on a

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned}(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} \\ &= AA^{-1} = I_n.\end{aligned}$$

donc (AB) est inversible et $(AB)^{-1} = (B^{-1}A^{-1})$.

3. La loi " $\times$ " qui est une loi interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit sur $GL_n(\mathbb{K})$ une loi interne, puisque d'aprés les propriétés d'une matrice carrée on a $\forall A, B, C \in GL_n(\mathbb{K})$, on a

$$AB \in GL_n(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad (AB)C = A(BC)$$

$\exists I_n \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe

$$AI_n = I_nA = A,$$

et ensuite on a l'existence d'inverse par définition. On conclut alors que $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

4. $\forall C \in GL_n(\mathbb{K}), \forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, montrons que, si $AC = BC$, implique $A = B$, on

$$\begin{aligned}AC = BC &\Rightarrow (AC)C^{-1} = (BC)C^{-1} \\ &\Rightarrow A(CC^{-1}) = B(CC^{-1}) \\ &\Rightarrow AI_n = BI_n \\ &\Rightarrow A = B.\end{aligned}$$

□

Calcule de l'inverse d'une matrice

Exemple 3.4.3. *Posons*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

A est inversible c'est-à-dire qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_2 = BA$. Notons cette dernière par

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on a alors

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 2a+3c = 0 \\ 2b+3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3, \\ b = 2, \\ c = 2, \\ d = -1, \end{cases}$$

et on obtient

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant il faut vérifier que $BA = I_2$,

$$BA = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Alors $A^{-1} = B$.

Il y a aussi une autre méthode pour calculer l'inverse d'une matrice en utilisant la résolution du système liniéaire.

Exemple 3.4.4. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ {}_3 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ *de $\mathcal{M}_{13}(\mathbb{K})$. Supposons que A est inversible,*

$$\begin{aligned} AX = Y \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_2, \\ x_2 = y_3. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3, \\ x_2 = y_3, \\ x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1}Y, \end{aligned}$$

donc

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.4.4. *Soit A une matrice carrée d'ordre 2 telle que*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors $ad - bc \neq 0$ ssi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

3.5 Changement de base

3.5.1 Formule matricielle de $Y = AX$

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$, $(a_{ij} \in \mathbb{K})$ une matrice associée à f. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E, pour tout vecteur X de E il existe des scalaires $(x_j)_{j\in\{1,..,n\}} \in \mathbb{K}$ tels que, $X = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$. Soit $\mathcal{B}' = \left\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_p\right\}$ une base de F, pour tout vecteur Y de F il existe des scalaires $(y_i)_{i\in\{1,..,n\}} \in \mathbb{K}$, tels que

$$Y = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i = f(X).$$

Alors, puisque f est linéaire, on a

$$\begin{aligned} f(X) &= f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j e_j), \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} (x_j a_{ij}) e'_i. \end{aligned}$$

donc

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij},$$

on fait correspondre deux vecteurs colonnes X et Y et on obtient la matrice A suivante

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \Rightarrow Y = AX.$$

Matrice de passage

Définition 3.5.1. *La matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les éléments des vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ par rapport à l'ancienne base $\mathcal{B}$ qui est associé à l'application neutre I_{dE}.*
Les égalités $e_i' = \sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij} e_j$ définissent la matrice

$$P = (P_{ij}) = M_{I_{dE}} (\mathcal{B}', \mathcal{B}) .$$

Remarque. *Puisque l'application I_{dE} est bijective donc P est inversible et*

$$P^{-1} = (M_{I_{dE}} (\mathcal{B}', \mathcal{B}))^{-1} = M_{I_{dE}^{-1}} (\mathcal{B}', \mathcal{B}) = M_{I_{dE}} (\mathcal{B}, \mathcal{B}') .$$

C'est-à-dire P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Exemple 3.5.1. *Posons $E = \mathbb{R}^3$, la matrice de passage de la base canonoique $\mathcal{B}$ à la base*

$$B' = \{e_1' = (1,2,3), e_2' = (1,0,2), e_3' = (-1,1,0)\},$$

Puisque

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ e_2' = e_1 + 2e_3 \\ e_3' = -e_1 + e_2 \end{cases},$$

alors

$$P = M_{I_{\mathbb{R}^3}} (\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} .$$

Inversement la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est

$$P^{-1} = M_{I_{\mathbb{R}^3}} (\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array} ,$$

car

$$e_1 = \alpha e_1' + \beta e_2' + \gamma e_3' \Leftrightarrow (1,0,0) = \alpha (1,2,3) + \beta (1,0,2) + \gamma (-1,1,0),$$

et ça nous donne le système suivant

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 1, \\ 2\alpha + \gamma = 0, \\ 3\alpha + 2\beta = 0, \end{cases}$$

qu'il en résulte que

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{3}, \\ \beta = -1, \\ \gamma = -\frac{4}{3}, \end{cases}$$

de même façon on trouve finalement

$$\begin{cases} e_1 = \frac{2}{3} e_1' - e_2' - \frac{4}{3} e_3' \\ e_2 = \frac{2}{3} e_1' - e_2' - \frac{1}{3} e_3' \\ e_3 = -\frac{1}{3} e_1' + e_2' + \frac{2}{3} e_3' \end{cases},$$

Le changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Proposition 3.5.1. *Soit P la matrice de passage de B à B'. Soient X le vecteur colonne des coordonnées de $x \in E$ dans l'ancienne base B et X' le vecteur colonne de $x \in E$ dans la nouvelle base B' on a alors*

$$X = PX' \text{ i.e } X' = P^{-1}X.$$

Le changement de base sur la matrice d'une application

Proposition 3.5.2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels ayant anciennes base respectivement $\mathcal{B}_E$ et B_F, soit $\mathcal{B}_E'$ et $\mathcal{B}_F'$ deux nouvelles bases de E et F, soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}_E'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}_F'$. Pour toute application linéaire de E dans F, soit M sa matrice associée dans les anciennes bases ($\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$). On a la nouvelle matrice N dans les nouvelles bases ($\mathcal{B}_E'$ et $\mathcal{B}_F'$) est donnée par la formule suivante (**formule de changement de base**)*

$$\begin{array}{ccccccc} E & \to & E & \overset{f}{\to} & F & \to & F \\ \mathcal{B}_E' & \overset{P}{\to} & \mathcal{B}_E & \overset{M}{\to} & \mathcal{B}_F & \overset{Q^{-1}}{\to} & \mathcal{B}_F' \end{array}$$

$$N = M_{\left(\mathcal{B}_E',\mathcal{B}_F'\right)}(f) = Q^{-1}M_{(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)}(f)\,P.$$

Corollaire 3.5.1. *Soit f un endomorphisme de E, M sa matrice associée dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ et N sa matrice associée dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, alors*

$$N = P^{-1}MP.$$

Exemple 3.5.2. *Soit B_1, B_2 deux bases sur $\mathbb{R}^3$,*

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,0), (0,-1,0), (3,2,-1)\},$$

et

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,-1,0), (0,1,0), (0,0,-1)\},$$

soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est

$$A = M_{(\mathcal{B}_1)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = P_{(\mathcal{B}_1, B\mathcal{B}_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$ est donné par

$$\begin{aligned} B &= M_{(B_2)}(f) = P^{-1}AP, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.5.2 Rang d'une matrice

Définition 3.5.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle rang de A le rang du système composée par ses vecteurs colonnes.*

Théorème 3.5.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, le rang de A est le rang de toute application linéaire représenté par A, i.e*

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(f) \quad = \operatorname{dimIm}(f)$$

Remarque. *Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors, A est inversible si et seulement si rang$(A) = n$.*

3.5.3 Matrice de transposition

Définition 3.5.3. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{ij})$,* ***la tranposée*** *de A est la matrice de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie par $A^t = (a_{ji})$ (les lignes de A sont les colonnes de A^t et inversement).*

Exemple 3.5.3. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

alors

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.5.3. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, *on a*

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$.
2. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
3. $(A^t)^t = A$.
4. *Si $n = p$, alors $(A \times B)^t = B^t \times A^t$.*
5. *Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.*
6. *rang(A^t) =rang(A).*
7. *tr(A^t) =tr(A) .*

3.6 Déterminants et diagonalisations

3.6.1 Les déterminants

3.6.2 Déterminants d'ordre 2

Définition 3.6.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.On appelle déterminant de A le déterminant des vecteurs lignes (ou colonnes) de A.*

Le déterminanat de la matrice carée d'ordre 2 : $A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est le nombre

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemple 3.6.1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, *alors*

$$\det A = 4 \times 7 - (2 \times -2) = 28 - (-4) = 32.$$

Remarque. *La matrice carée d'ordre* 2 *est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, dans ce cas l'inverse de la matrice carée*

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.6.2. *Soit la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 (\mathbb{R}),$$

on a $\det A = 2 \times 1 - 2 \times 0 = 2$, *alors* A *est inversible et*

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.6.2. *Soit* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *On dit que*

1. *A est symétrique si* $A^t = A$.
2. *A est antisymétrique si* $A^t = -A$.

Notation. *On note* $S_n(\mathbb{K})$ *l'ensembles des matrices symétriques et* $A_n(\mathbb{K})$ *celui des matrices antisymétriques.*

3.6.3 Déterminant d'ordre 3

Définition 3.6.3. *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* 3, *son déterminant est défini comme suite :*

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

Exemple 3.6.3. *Soit la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3 (\mathbb{R}),$$

son déterminant est donné par

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 49.$$

Exemple 3.6.4. *Soit la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

d'aprés le schéma on aura : $\det B = 21$.

3.6.4 Déterminant d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Considérons un élément a_{ij} de A. Si on raye dans A la ligne et la colonne contenant a_{ij}, on obtient une matrice a $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes notée A_{ij}. Son déterminant A_{ij} s'appelle le mineur de a_{ij} dans A.

On appelle cofacteur du terme a_{ij} le produit $(-1)^{i+j} A_{ij}$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

Proposition 3.6.1. *Soient A et B sont deux matrices carées d'ordre n, on a*

1. $\det(A \times B) = \det A \times \det B$.
2. *Si tous les éléments d'une ligne (ou bien d'une colonne) de la matrice carée A sont nuls alors* $\det A = 0$.
3. $\det(kA) = k^n \det A$, $\forall k \in \mathbb{K}$.
4. *Si deux colonnes ou deux lignes de A sont identiques alors* $\det A = 0$.
5. *Si deux colonnes ou deux lignes de A sont proportionnelles, alors* $\det A = 0$.
6. *Si A est une matrice triangulaire supérieure ou inférieure alors le déterminant de A est le produit des éléments de sa diagonale principale*

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}.$$

3.6.5 Comatrice d'une matrice

Définition 3.6.4. *On apelle* ***comatrice*** *(ou matrice adjointe) de A, la matrice carrée d'ordre n notée com(A) ou* $\operatorname{adj}(A)$ *définie par*

$$\operatorname{com}(A) = (\Delta_{ij})_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \ldots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \ldots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \ldots & \Delta_{nn} \end{pmatrix},$$

tels que $(\Delta_{ij}) = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ sont appelés ***les cofacteurs****.*

Exemple 3.6.5. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

on a

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3, \ \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3, ...,$$

donc

$$\operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & -9 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.6.2. *Dans le cas où A est inversible, la comatrice de A est reliée à l'inverse de A par la formule*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t\operatorname{com}(A).$$

4 | Système linéaire de n équations à n inconnues

4.1 Résolution des systèmes d'equations

Définition 4.1.1. *Un système linéaire est un ensemble de n équations linéaires à n inconnues. Il a la forme générale suivante*

$$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

donc on peut écrire le système $AX = B$.

Remarque. *Si* $\det A \neq 0$, A *est inversible et on peut calculer*

$$X = A^{-1}B.$$

Exemple 4.1.1. *Soit le système suivant*

$$(S_1) : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_3 + 4x_4 = -2, \end{cases}$$

la forme matricielle du système S_1 *est*

$$(S_1) : \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4.2 Formules de Cramer dans le cas général

Le déterminant du système S est :

$$\Delta = |a_{ij}|_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

si le déterminant du système S est différent de 0, on dit que S est un **système de Cramer**.

Théorème 4.2.1. *Le système S admet **une solution unique** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si et seulement si c'est un système de Cramer. Dans ce cas, cette solution est donnée par les formules de Cramer*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \ x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

dans ces formules, Δ désigne le déterminant de S, et Δ_i le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la $i^{-éme}$ colonne par la colonne des b_k qui figurent dans le second membre de S.

Exemple 4.2.1. *Résolvons le système suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$.*

$$(S_2) : \begin{cases} tx_1 - 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + tx_2 = 1, \end{cases}$$

Le déterminant associé au système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} t & -2 \\ 3 & t \end{vmatrix} = t^2 + 6 \neq 0,$$

il existe donc une unique solution (x_1, x_2) et elle vérifie

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{t^2+6} = \frac{t+2}{t^2+6} \ \text{et } x_2 = \frac{\begin{vmatrix} t & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{t^2+6} = \frac{t-3}{t^2+6}.$$

Pour chaque t, l'ensemble des solutions est $S = \left\{\left(\frac{t+2}{t^2+6}, \frac{t-3}{t^2+6}\right)\right\}$.

Proposition 4.2.1 (Critères d'existence des solutions). *Soit l'application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases B_p et B_n est A.*
Soit x et b les vecteurs de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ dont les coordonnées dans les bases B_p et B_n sont X et B. Soit le système linéaire S défini par : $AX = B$. Alors S admet au moins une solution ssi l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite

1. *$b \in Im(f)$.*
2. *$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq $B = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i$, avec $C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ la $i^{-ème}$colonne de lamatrice A.*

4.3 Diagonalisation

4.3.1 Diagonalisation d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vecoriel de dimension finie n, f un endomorphisme dans E et λ dans $\mathbb{K}$.

valeurs propres et vecteurs propres

Définition 4.3.1. *S'il existe x un vecteur non nul de E tel que $f(x) = \lambda x$, on dit que*

1. *λ est une valeur propre de f.*
2. *x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.*

Remarque. *L'ensemble des valeurs propres de f (éventuellement vide) est appelé **spectre** de f et est noté : $Sp(f)$.*

Exemple 4.3.1. *Soit l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y) = (x, 2y)$, on a $f(1, 0) = 1(1, 0)$ et $f(0, 1) = 2(0, 1)$. Donc 1 et 2 sont deux valeurs propres de f et $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$) est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 (resp. 2).*

Proposition 4.3.1. *Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des vecteurs propres associes aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ alors la famille $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est libre.*

Démonstration.
On procède par récurrence sur n.
Le résultat est immédiat pour : $n = 1$, puisqu'un vecteur propre est non nul.
Supposons le vrai pour $n \geq 1$, et considérons $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ de f. Soit alors la combinaison linéaire

$$a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1} = 0, \tag{4.1}$$

L'image par f de cette combinaison donne

$$a_1\lambda_1x_1 + \cdots + a_{n+1}\lambda_{n+1}x_{n+1} = 0, \tag{4.2}$$

en calculant $(L_2 - \lambda_{n+1}.L_1)$, on obtient

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})x_1 + \cdots + a_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})x_n = 0,$$

puisque les vecteurs $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de f, tous les coefficients de la dernière combinaison linéaire sont nuls, et les valeurs propres étant distinctes, en déduit que : $\forall 1 \leq i \leq 2$, $a_i = 0$.
Enfin, en reprenant (L_1), puisque x_{n+1} est non nul, on termine avec $a_{n+1} = 0$, et la famille $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est libre. □

Diagonalisation

Définition 4.3.2. *On dit que f est* ***diagonalisable*** *s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice associe $M_{\mathcal{B}}(f)$ dans cette base est diagonale, c'est-à-dire il existe une base $B = \{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ de E formée des valeurs propres de f telle que*

$$f(e_i) = \lambda_i e_i, \forall \lambda_i \in \mathbb{K}, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Corollaire 4.3.1. *Si $dimE = n$ et f possède n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.*

Exemple 4.3.2. *Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y) = (x, 2y)$, on a $x_1 = (1, 0)$ vecteur associé à 1 et $x_2 = (0, 1)$ le vecteur propre associé à 2. Donc la matrice associée à f dans la base $B = \{x_1, x_2\}$ est*

$$f(x_i) = \lambda_i x_i \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) = \lambda_1 x_1 = 1x_1 + 0x_2, \\ f(x_2) = \lambda_2 x_2 = 0x_1 + 2x_2, \end{cases}$$

donc

$$M_f(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

alors f est diagonalisable.

Sous-espace propre

Définition 4.3.3. *Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in sp(f)$. on définut l'espace*

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda Id_E) = \{x \in E \diagup f(x) = \lambda x\}.$$

est appelé ***sous-espace propre de*** *E* ***associé à*** *λ, c'est l'ensemble constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de f associés à λ.*

Proposition 4.3.2. *Si λ est valeur propre, alors $dimE_\lambda \geq 1$.*

Somme directe des sous-espaces propres

Théorème 4.3.1. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes de f. Alors la somme $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$ est directe.*

Corollaire 4.3.2. *L'endomorphisme $f : E \to E$ est diagonalisable si et seulement l'un de ces conditoins est vérifié*

1. $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$.
2. $dimE = dimE_{\lambda_1} + \dots + dimE_{\lambda_n}$.
3. $dimE_{\lambda_i} = m(\lambda_i) \ \forall i = \{1, \dots, n\}$, *avec $m(\lambda_i)$ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i.*

Proposition 4.3.3. *Si A désigne la matrice de f dans une base quelconque B de E, alors l'endomorphisme f est diagonalisable si et seula matrice A est diagonalisable. Dans ce cas, on a*

$$A = M_f(B), \qquad D = M_f(B') \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

et

$$P = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in GL_n(\mathbb{K}), \qquad A = PDP^{-1}.$$

4.3.2 Diagonalisation d'une matrice carrée

Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 4.3.4. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. S'il existe un vecteur non nul X de $\mathbb{K}^n$ tel que $AX = \lambda X$, on dit que*

- *λ est une **valeur propre** de A.*
- *X est un **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ.*

Remarque. *Dans ce cas*

$$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda Id_E) = \{X \in \mathbb{K}^n : AX = \lambda X\},$$

*est appellé le **sous-espace propre** associé à λ.*

Exemple 4.3.3. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$AX = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2X,$$

donc 2 est une valeur propre de A et X est un vecteur propre de A associée à 2.

Remarque. *Soit A une matrice, on a*

1. *Un vecteur propre associé à une valeur propre donnée n'est pas unique, c'est-à-dire Si X est un vecteur propre et β un réel non nul alors*

$$\beta AX = \beta\lambda X \Rightarrow A(\beta X) = \lambda(\beta X),$$

   alors βX est aussi un vecteur propre de A associé à λ.
2. *La trace de A est la somme des valeurs propres de A, chacune comptée avec sa multiplicité.*
3. *Le déterminant A est le produit des valeurs propres de A, chacune comptée avec sa multiplicité.*

Polynôme caractéristique

Définition 4.3.5. *Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **polynôme caractéristique** associé à A la formule suivante*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Remarque. *Les racines d'équation $P_A(\lambda) = 0$ forment les valeurs propres de A.*

Exemple 4.3.4. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

on a

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 10.$$

L'équation $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$ admet deux racines, sont $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 2$, alors -5 et 2 sont les valeurs propres de A.

Matrice semblable

Définition 4.3.6. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est **semblable** à B s'il existe une matrice inversible P non nulle telle que*

$$A = P^{-1}BP.$$

Remarque. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a cette relation est une relation d'équivalence puisque*

1. *A est toujours semblable à lui même, car $A = I_n^{-1}AI_n$,*
2. *Si B semblable à A alors A semblable à B (car $(P^{-1})^{-1} = P$).*
3. *Si B semblable à A et C semblable à B donc C semblable à A.*
4. *Si A semblable à B alors $\det(A) = \det(B)$.*

Matrice diagonalisable

Définition 4.3.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est **diagonalisable** quand A est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire*

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}),\ A = PDP^{-1}.$$

Exemple 4.3.5. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

on trouver une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$, avec D est une matrice diagonale.

Le polynôme caractéristique de A est donnée par

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}, \\ &= (4-\lambda)(\lambda+2)^2, \end{aligned}$$

donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Maintenant on veux trouver les vecteurs propres associ à ces valeurs propres

$$AV_1 = \lambda_1 V_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ce qui revient à resoudre le système suivant.
Pour $\lambda_1 = 4$

$$\begin{cases} x - 3y + 3y = 4x, \\ 3x - 5y + 3z = 4y, \\ 6x - 6y + 4z = 4z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2x, \\ z = 2x, \\ x = y, \end{cases}$$

donc

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = -2x, \\ 3x - 5y + 3z = -2y, \\ 6x - 6y + 4z = -2z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 3z = 0, \\ 3x - 3y + 3z = 0, \\ 6x - 6y + 6z = 0, \end{cases} \Rightarrow x - y + z = 0,$$

c'est l'équation d'un plan donc l'espace associé à la valeur propre -2 *est bien de dimension* 2, *les vecteurs* $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Alors*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice P *est inversible car* $\det(P) = 2$, *et son inverse est*

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} (comP)^t,$$

$$(comP)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

d'où A *est diagonalisable et*

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Remarque. *Soient* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension finie* n *et* $f \in \mathcal{L}(E)$. $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *une base de* E, *si* $B' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *des vecteurs propres associés à* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *et* P *la matrice de passage de de* B *à* B' *alors la matrice associée à* f *dans la base* B' *est une matrice diagonale et les éléments diagonaux sont les valeurs propres de* f *et soit* D *telle que*

$$D = P^{-1}AP.$$

Matrices nilpotentes

Définition 4.3.8. *Une matrice* $N \neq 0$ *est* ***nilpotente*** *lorsqu'il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $N^p = 0$. *Le plus petit entier* $p \geq 1$ *tel que* $N^p = 0$ *est l'ordre de nilpotence de* N.

Proposition 4.3.4. *Soit* $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *les assertions suivantes sont équivalentes*

1. N *est nilpotente.*
2. *La seule valeur propre de* N *est* 0.
3. *Le polynôme caractéristique de* N *est* $P_N(x) = x^n$.

Remarque. $*$ *L'ordre de nilpotence de* $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est toujours inférieur à* n.

$*$ *Si* N *est une matrice nilpotente et diagonalisable, alors* N *est semblable à la matrice nulle, donc est nulle.*

Puissance nième d'une matrice diagonalisable

Exemple 4.3.6. *Soit A une matrice diagonalisable d'ordre n, alors*

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^5 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^5 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$A^5 = \begin{pmatrix} 496 & -528 & 528 \\ 528 & -560 & 528 \\ 1056 & -1056 & 1024 \end{pmatrix}.$$

Remarque. *On utilise la diagonalisation des matrices pour résoudre des systèmes différentielles linéaires.*

5 | Les formes quadratiques

5.1 Les formes linéaires

Définition 5.1.1. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Une forme linéaire sur E est une application linéaire sur E à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Exemple 5.1.1.

1. *Soit $E = \mathbb{K}[X]$ l'espace des polynômes, alors $P \to P(0)$ est une forme linéaire.*
2. *Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application trace est une forme linéaire sur E.*
3. *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, l'application*

$$\begin{array}{rl} H: & E \to \mathbb{R}, \\ & f \mapsto H(f) = \int_a^b f(t)\,dt. \end{array}$$

est une forme linéaire. En effet, soit $f_1,\ f_2 \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} H(\alpha f_1 + \beta f_2) &= \int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2)(t)\,dt \\ &= \int_a^b (\alpha f_1)(t) + (\beta f_2)(t)\,dt \\ &= \int_a^b \alpha f_1(t)\,dt + \int_a^b \beta f_2(t)\,dt \\ &= \alpha H(f_1) + \beta H(f_2). \end{aligned}$$

Définition 5.1.2. *L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur l'espace vectoriel E est notée E^*. C'est l'éspace dual de E.*

Remarque. *On a*

$$\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E.$$

Exemple 5.1.2. *Si $E = \mathbb{R}^2$, on a $\forall f \in E^*$*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= xf(1,0) + yf(0,1) \\ &= ax + by \end{aligned}$$

avec $a = f(1,0)$ et $b = f(0,1)$.

Notation. *On notes les élements de E^* par "x^*",*

$$x^* : \begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ t \mapsto x^*(t). \end{array}$$

Exemple 5.1.3. *Les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$*

$$\begin{array}{l} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \\ (x_1, ..., x_n) \mapsto a_1x_1 + ... + a_nx_n. \end{array}$$

5.1.1 Hyperplans

Définition 5.1.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ est appelé un* ***Hyperplan de E*** *et notée H,* $(\dim E = \dim H + 1)$.

Exemple 5.1.4.

1. *Si E est de dimension 2, les hyperplans de E sont des droites.*
2. *Si $E = \mathbb{R}^2$, alors l'hyperplan de $\mathbb{R}^2$est de dimension 1, une droite vectorielle $[a]$, au $a \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.*
3. *Si E est de dimension 3, les hyperplans de E sont des plans.*
4. *Si $E = \mathbb{R}^3$, l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ est de dimension 2, un plan vectoriel $[a, b]$, avec a, b des vecteurs non colinéaires.*

Proposition 5.1.1. *Soit H un huperplan de E, et $a \in E$ et $a \notin H$. Alors on a*

$$E = H \oplus [a].$$

Démonstration. Si $E = H \oplus [a]$, alors

$$\begin{cases} E = H + [a] \\ H \cap [a] = \{0_E\}. \end{cases}$$

Donc H est un hyperplan de E, c'est-à-dire H est un sous espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

$$\begin{aligned} [A] &= \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i a_i : \lambda_i \in \mathbb{K}, a_i \in E \right\}. \\ [A] &= \{\alpha a : \alpha \in \mathbb{K}\}. \end{aligned}$$

Donc $H + [a]$ est un sous espace vectoriel de E. Pour montrer que $E = H + [a]$, il reste de montrer que

$$\dim E = \dim H + \dim [a].$$

Puisque $a \neq 0_E$, on a

$$\dim H = n - 1 \text{ et } \dim [a] = 1.$$

Donc

$$\dim H + \dim [a] = n.$$

Ensuite on a auusi $H \cap [a] \subset [a]$ et $\dim[a] = 1$ Donc

$$\dim H \cap [a] = \{0\}.$$

Si $\dim H \cap [a] = 1$. Alors

$$H \cap [a] = [a].$$

Mais on aurait

$$a \in [a] = H \cap [a], a \in H,$$

ce qui n'est pas le cas par l'hypothèse. Ainsi

$$\dim H \cap [a] = 0 \quad \text{et} \quad H \cap [a] = \{0_E\}.$$

Ce qu'implique que

$$E = H \oplus [a].$$

□

Proposition 5.1.2. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, on a*

1. *H est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*
2. *Deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan si et seulement si elle sont proportionnelles. Autrement dit ker(φ) =ker(ψ), alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.*

Démonstration.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, $\varphi \neq 0$, telle que $H = \ker(\varphi)$. Par le Théoreme du rang, on a

$$\dim(H) = \dim(E) - rg(\varphi).$$

Or $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$, c'est donc $\{0_E\}$ ou $\mathbb{K}$. Ce n'est pas $\{0_E\}$, car $\varphi \neq 0$. Donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$, et $rg(\varphi) = 1$, d'où le résultat. Supposant que H est un hyperplan de E. On considère $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ une base de H, qu'on complète en $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Notons φ_n la n-ème forme linéaire coordonnée. Pour tout $x \in E$, on a

$$x \in \ker(\varphi_n) \Leftrightarrow \varphi_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1e_1 + ... + x_{n-1}e_{n-1} \Leftrightarrow x \in H.$$

Ainsi on a bien $H = \ker(\varphi_n)$, noyau d'une forme linéaire non nulle$(\varphi_n(e_n) = 1)$.

2. Supposons que $H = \ker(\varphi) = \ker(\psi)$. Soit $a \notin H$, on sait qu'alors

$$E = H \oplus [a].$$

On a $\psi(a), \varphi(a) \neq 0$, si non ses formes linéaires seraient nulles (elles seraient nulles sur H, sur $[a]$ et donc sur E . Posons

$$\lambda = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}.$$

et montrons que

$$\varphi = \lambda\psi.$$

Ces deux formes linéaires coincident sur H, elles coincident en a et donc sur $[a]$. Elles sont donc égales , on a

$$\varphi = \lambda\psi.$$

□

Exemple 5.1.5. $E = \mathbb{R}^3$. *Soit* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, *tel que* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. *Concidérons la forme linéaire*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = ax + by + cz. \end{array}$$

Son noyau est un hyperplan H, *donné par*

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ ax + by + cz = 0\right\}.$$

Il s'agit d'un plan véctoriel (sous-espace de dimension 2*) d'équation*

$$ax + by + cz = 0.$$

5.1.2 Base duale

Proposition 5.1.3 (Formes linéaires coordonnées)**.** *Soit* $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *une base de* E. *Pour tout* $1 \leq i \leq n$, *on définit la i-ème application coordonnée* $\varphi_i : E \to \mathbb{K}$ *par*

$$\varphi_i(x) = i\text{-ème coordonnée de } x \text{ dans la base } B.$$

L'application φ_i *est une formes linéaire pour tout* $1 \leq i \leq n$.

Démonstration. Soit x, $y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, il existe un unique $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, tel que

$$x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n.$$

De même, y se décompose de maniére unique dans la base B, il existe un unique $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$y = y_1 e_1 + ... + y_n e_n.$$

On a alors

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) e_1 + ... + (\lambda x_n + \mu y_n) e_n,$$

donc pour tout $1 \leq i \leq n$

$$\varphi_i(\lambda x + \mu y) = \lambda x_i + \mu y_i = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y).$$

Ainsi φ_i est linéaire. Comme de plus $\varphi_i : E \to \mathbb{K}$, c'est bien une forme linéaire. □

Proposition 5.1.4. *Pour tout* $x \in E$, *on a*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i.$$

Pour tout $1 \leq i$, $j \leq n$, *on a*

$$\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & si\ i = j, \\ 0, & si\ non. \end{cases}$$

Démonstration. Par définition, $\varphi_i(x)$ est la i-ème composante de x dans la base B. Donc on a

$$x = \varphi_1(x)\, e_1 + ... + \varphi_n(x)\, e_n.$$

On a $e_j = 0 \cdot e_1 + \ldots + 1 \cdot e_j + \ldots + 0 \cdot e_n$. Donc la i-ème coordonnée de e_j dans la base B est 0 si $i \neq j$, et 1 si $i = j$. d'où le résultat. □

Proposition 5.1.5. *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, et $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ la famille des formes linéaires coordonnées associées à B. Alors $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ est une base de E^*, appelée base duale de E.*

Démonstration. Posant $\mathfrak{F} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, on souhaite montrer que $\mathfrak{F}$ est une base de E^*. On a $\dim E^* = \dim E = n$, et $\text{Card}(\mathfrak{F}) = n$.

Il suffit donc de montrer que la famille est libre. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n = 0_{E^*}. \tag{5.1}$$

Montrant que $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, on évalue pour cela (5.1) en e_j. On obtient

$$\alpha_1\varphi_1(e_j) + \ldots + \alpha_j\varphi_j(e_j) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(e_j) = 0.$$

Or puisque $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$, on déduit que $\alpha_j = 0$, et ce pour tout $1 \leq j \leq n$. La famille $\mathfrak{F}$ est libre. C'est donc une base de E^*. □

Exemple 5.1.6. *Soit les vecteurs $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$, tels que*

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (1,0,1),\ u_3 = (0,1,1)\}.$$

D'abord, on montre que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a dim$(\mathbb{R}^3)$ =Card$(B) = 3$ il suffit de prouver que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice ou bien une famille libre de $\mathbb{R}^3$

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3.$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta, \\ y = \alpha + \gamma, \\ z = \alpha + \beta + \gamma. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x + y - z, \\ \beta = -y + z, \\ \gamma = \alpha + \beta + \gamma. \end{cases}$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ensuite, on trouve maintenant la base duale de $\mathcal{B}$, noté $\mathcal{B}^* = \{u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$, comme suite

$$\begin{aligned} u_1^* :\ & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ & (x,y,z) \mapsto u_1^*(x,y,z), \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} uu_1^*(x,y,z) &= u_1^*(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3), \\ &= \alpha u_1^*(u_1) + \beta u_1^*(u_2) + \gamma u_1^*(u_3), \\ &= \alpha = x + y - z. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} u_2^* :\ & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ & (x,y,z) \mapsto u_2^*(u_1^*(x,y,z)) = u_2^*(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} u_2^*(\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3) &= \alpha u_2^*(u_1)+\beta u_2^*(u_2)+\gamma u_2^*(u_3), \\ &= \beta = -y+z. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} u_3^*: \ & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ & (x,y,z) \mapsto u_3^*(x,y,z) \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} u_3^*(x,y,z) &= u_3^*(\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3), \\ &= \alpha u_3^*(u_1)+\beta u_3^*(u_2)+\gamma u_3^*(u_3), \\ &= \gamma \ = -x+z. \end{aligned}$$

Définition 5.1.4. *On appelle bidual de E le dual du dual de E, noté E^{**}.*

Théorème 5.1.1 (L'isomorphisme canonique)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n, on a $E \simeq E^{**}$, tels que*

$$\begin{aligned} \varphi: \ & E \to E^{**}, \\ & x \mapsto \varphi(x): \begin{array}{l} E^* \to \mathbb{K}, \\ y^* \mapsto (\varphi(x))(y^*) = y^*(x). \end{array} \end{aligned}$$

Démonstration. D'abord on prouve que φ est une application linéaire. Soit x_1,$x_2 \in E$, $y^* \in E^*$.

$$\begin{aligned} (\varphi(x_1+x_2))(y^*) &= y^*(x_1+x_2), \\ &= y^*(x_1)+y^*(x_2), \\ &= (\varphi(x_1))(y^*)+(\varphi(x_2))(y^*), \\ &= (\varphi(x_1)+\varphi(x_2))(y^*). \end{aligned}$$

Alors

$$(\varphi(x_1+x_2)) = (\varphi(x_1)+\varphi(x_2)).$$

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in E$, $y^* \in E^*$

$$(\varphi(\alpha x))(y^*) = y^*(\alpha x) = \alpha(y^*(x)) = \alpha(\varphi(x))(y^*).$$

Donc

$$(\varphi(\alpha x)) = \alpha(\varphi(x)).$$

Ensuite il reste de montrer que φ est bijective. On a

$$\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}.$$

Il suffit de montrer que φ est injective. Soit $\{a_1,\ldots,a_n\}$ est une base de E

$$\forall x_1,x_2 \in E, \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Soit $x_1, x_2 \in E$, alors il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \text{ et } x_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i.$$

Soit $y^* \in E^*$, on a

$$\begin{aligned} (\varphi(x_1))(y^*) &= (\varphi(x_2))(y^*) \Rightarrow y^*(x_1) = y^*(x_2). \\ &\Rightarrow y^*(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Si $\{a_1^*, \ldots, a_n^*\}$ base duale de $\{a_1, \ldots, a_n\}$, alors

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} : a_j^*(x_1 - x_2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_j^* \left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) a_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) a_j^*(a_i) = 0.$$

Alors

$$(\forall i = j : \alpha_i - \beta_i = 0) \Rightarrow (\alpha_i = \beta_i, \forall j \in \{1, \ldots, n\}) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

□

5.1.3 L'orthogonalité pour une forme linéaire

Définition 5.1.5. *Soit F et F^* des sous-espaces vectoriels de E et E^* respectivement. Les enssembles suivantes*

$$F^{\perp} = \{\varphi \in E^*, \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}.$$

$$(F^*)^{\perp} = \{\varphi \in E, \forall x \in F^*, \varphi(x) = 0\}.$$

Sont des sous-espaces vectoriels de E^* et E respectivement.

Définition 5.1.6. *Soit F et F^* des sous-espaces vectoriels de E et E^* respectivement. L'espace $F^{\perp}$ (resp :$\left((F^*)^{\perp}\right)$) s'appelle l'orthogonale de F (respe : F^*).*

Théorème 5.1.2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim F^* + \dim F^{\perp} = \dim E.$$

5.2 Les formes bilinéaires

5.2.1 Définition d'une forme bilinéaire

Définition 5.2.1. *Soit $E - \mathbb{K}$ espace vectoriel. Une forme bilinéaire est une application sur $E \times E$ a valeurs dans $\mathbb{K}$ qui est linéaire en chacune de ses variables. Il s'agit donc d'une application*

$$\begin{aligned} \varphi &: E \times E \to \mathbb{K} \\ &(x, y) \mapsto \varphi(x, y), \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes

1. $\forall\ x_1, x_2 \in E, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \forall y \in E$:

$$\varphi\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\right) = \alpha_1 \varphi\left(x_1, y\right) + \alpha_2 \varphi\left(x_2, y\right).$$

2. $\forall\ y_1, y_2 \in E, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}, \forall x \in E$:

$$\varphi(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 \varphi\left(x, y_1\right) + \beta_2 \varphi\left(x, y_2\right).$$

Notation. *On note l'ensemble des formes bilinéaires dans* E *par* $\mathcal{L}_2\left(E\right) = \mathcal{L}\left(E \times E, \mathbb{K}\right)$.

Remarque. $\forall x, y \in E, \varphi \in \mathcal{L}_2\left(E\right)$, *on a* $\varphi\left(0_E, y\right) = 0_{\mathbb{K}} = \varphi\left(x, 0_E\right)$.

Proposition 5.2.1. $\left(\mathcal{L}_2\left(E\right), +, \bullet\right)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *car* $\mathcal{L}_2\left(E\right) \subset \mathfrak{F}\left(E \times E, \mathbb{K}\right)$ *l'ensemble des applications de* $E \times E$ *vers* $\mathbb{K}$ *, tel que*

$$\begin{array}{rl} "+": & \mathcal{L}_2\left(E\right) \times \mathcal{L}_2\left(E\right) \to \mathcal{L}_2\left(E\right) \\ & (f, g) \to f + g : E \times E \to \mathbb{K} \end{array}$$

tel que pour tout $(x, y) \in E \times E$, *on a* $\left(f + g\right)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ *et*

$$\begin{array}{rl} "\bullet": & \mathbb{K} \times \mathcal{L}_2\left(E\right) \to \mathcal{L}_2\left(E\right) \\ & (\lambda, f) \to \lambda \bullet f : E \times E \to \mathbb{K}, \end{array}$$

tel que pour tout $(x, y) \in E \times E$, *on a* $\left(\lambda \bullet f\right)(x, y) = \lambda f(x, y)$.

Démonstration. Pour montrer que $\mathcal{L}_2\left(E\right)$ est un espace vectoriel , il suffit de montrer que $\mathcal{L}_2\left(E\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{F}\left(E \times E, \mathbb{K}\right)$.
1) $0_I \in \mathcal{L}_2\left(E\right)$.

2) $\forall f, g \in \mathcal{L}_2\left(E\right) : (f + g) \in \mathcal{L}_2\left(E\right)$, on a $\forall\ x_1, x_2, y \in E, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \left(f + g\right)\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\right) &= \alpha_1 (f + g)\left(x_1, y\right) + \alpha_2 (f + g)\left(x_2, y\right), \\ &= f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\right) + g\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\right), \\ &= \alpha_1 f\left(x_1, y\right) + \alpha_2 f\left(x_2, y\right) + \alpha_1 g\left(x_1, y\right) + \alpha_2 g\left(x_2, y\right). \end{aligned}$$

De la même façon pour le deuxième variable y.
3)$\forall\ f \in \mathcal{L}_2\left(E\right), \forall \beta \in \mathbb{K} : \beta \bullet f \in \mathcal{L}_2\left(E\right)$, on a

$$\begin{aligned} \left(\beta \bullet f\right)\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\right) &= \beta f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\right), \\ &= \beta \alpha_1 f\left(x_1, y\right) + \alpha_2 f\left(x_2, y\right). \end{aligned}$$

□

Exemple 5.2.1. *Le produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^n$ *est une forme bilinéaire. Pour* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *il est donné par*

$$f\left(x, y\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On a

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x + \alpha_2 y, z) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 x_i z_i + \alpha_2 y_i z_i), \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_2 y_i z_i, \\ &= \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} y_i z_i, \\ &= \alpha_1 f(x,z) + \alpha_2 f(x,z). \end{aligned}$$

De la même façon on montre que f est linéaire pour le deuxième vecteur y.

Définition 5.2.2. *Soit E un espace vectoriel sur le corps caumutatif $\mathbb{K}$ et φ une forme bilinéaire sur E*

1. *On dit que φ est symétrique, si pour toutes $x, y \in E$,*

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

2. *On dit que φ est antisymétrique, si pour toutes $x, y \in E$,*

$$\varphi(x,y) = -\varphi(y,x).$$

3. *On dit que φ est altèrnée, si pour tout $x \in E$,*

$$\varphi(x,x) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Exemple 5.2.2. *On a les formes bilinéaires symétriques*

1. $\varphi : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \varphi(x,y) = xy.$
2. $\varphi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{K}^2, \varphi(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$

En effet,

1. $\varphi(x,y) = xy = yx = \varphi(y,x)$ *donc elle est symétrique.*
2. $\varphi(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = \varphi(y,x)$ *donc elle est symétrique.*

Exemple 5.2.3. *Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ la fonction suivante est une forme bilinéaire symétrique*

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

Nous verrons que cet exemple joue un role important en analyse.

Notation. *On note l'enssemble des formes bilinéaires symétriques, antisymétriques, altèrnées par $S_2^+(E)$, $S_2^-(E)$, $A_2(E)$ respectivement et chacun de ces enssembles est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 5.2.2. *Si $\varphi \in A_2(E) \Rightarrow \varphi \in S_2^-(E)$.*

5.2.2 Représentation matricielle et changement de base.

Définition 5.2.3. *Soit φ une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E muni d'une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Alors, pour $i, j = \overline{1, n}$, nous avons $\varphi(v_i, v_j) \in \mathbb{K}$. Ainsi il existe une matrice $(\varphi(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle la matrice associée à φ dans la base indiquée*

$$\begin{pmatrix} \varphi(v_1, v_1) & \varphi(v_1, v_2) & \cdots & \varphi(v_1, v_n) \\ \varphi(v_2, v_1) & \varphi(v_2, v_2) & \cdots & \varphi(v_2, v_n) \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ \varphi(v_n, v_1) & \varphi(v_n, v_2) & \ldots & \varphi(v_n, v_n) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(v_i, v_j) x_i y_j.$$

Cette expression s'appelle l'expression algèbrique de φ, ou plus souvent dite expression en coordonnées. Ainsi les termes de la somme dont on définit φ ne contiennent que des produits mixtes $x_i y_j$ avec des coefficients dans $\mathbb{K}$.

Comme on peut écrire l'expression algèbrique sous forme matricielle

$$\varphi(x, y) =^t xAy, \text{ où } A = (\varphi(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Posons $\varphi(v_i, v_j) = a_{ij}$, pour $i, j = \overline{1, n}$. Si on change la base de E à la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$, pour tout $l, k = \overline{1, n}$, on obtient

$$u_k = p_{1k} v_1 + \ldots + p_{nk} v_n, u_l = p_{1l} v_1 + \ldots + p_{nl} v_n.$$

Par suite de la même manière précédente, nous obtenons

$$\varphi(u_k, u_l) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_{ik} p_{jl} = \sum_{i,j=1}^{n} p'_{ki} a_{ij} p_{jl}, \text{ou } p'_{ki} = p_{ik}.$$

Ainsi la matrice $B = (\varphi(u_k, u_l))_{n \times n}$ associée à φ dans la nouvelle base et donnée par

$$B =^t PAP.$$

Exemple 5.2.4. *Soit la forme bilinèaire φ définit sur $\mathbb{R}^3$, par $\varphi(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_3$. Soit $\{v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (0, 1, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Méthode directe : on pose $b_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$ pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Ainsi, on obtient*

$$b_{11} = \varphi(v_1, v_1) = 1, \; b_{12} = \varphi(v_1, v_2) = -1, \; b_{13} = \varphi(v_1, v_3) = 1.$$

De la même manière nous obtenons les restes des lignes de la matrice, donc

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. *Méthode indirecte : utilisons la matrice A associée à φ dans la base canonique et la matrice P de passage à la nouvelle base*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d'où,

$$B =^t PAP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.2.5. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire définie par*

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2.$$

Soit $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,0), u_2 = (1,1)\}$ et $\mathcal{B}' = \{u_1' = (2,1), u_2' = (1,-1)\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

1. *On écrit la matrice A associée à φ selon la base B. On a $A = (\varphi(u_i, u_j))_{1 \leq i,j \leq 2}$. C'est à dire*

$$\varphi(u_1, u_1) = 2, \varphi(u_1, u_2) = -1, \varphi(u_2, u_1) = 2, \varphi(u_2, u_2) = 0,$$

donc

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *On écrit A' la matrice associée à φ selon la base $\mathcal{B}'$. On a $A' = \left(\varphi\left(u_i', u_j'\right)\right)_{1 \leq i,j \leq 2}$. C'est à dire*

$$\varphi(u_1', u_1') = 3, \varphi(u_1', u_2') = 9, \varphi(u_2', u_1') = 0, \varphi(u_2', u_2') = 6,$$

donc

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. *Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$*

$$P = M_{Id_{\mathbb{R}^2}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a selon les propriétés de changement de base

$$A' =^t PAP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.2.3. *Si la forme bilinèaire donnée est symétrique, alors la matrice associée est symétrique dans n'importe quelle base, car pour une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de E, on a*

$$^tB = B \Leftrightarrow b_{ij} = \varphi(v_i, v_j) = \varphi(v_j, v_i) = b_{ji}, \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Démonstration.

1. Soit φ une forme bilinéaire symetrique, on montre que B sa matrice associée est symetrique, on a $\varphi(x,y) =^t xAy$, alors ${}^t\varphi(x,y) = \varphi(x,y)$, donc
$$\varphi(x,y) =^t ({}^t xAy) = y^t Ax.$$
D'autre part, on a
$$\varphi(y,x) =^t yAx.$$
Puisque φ est symetrique, alors $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$, donc ${}^tA = A$.
2. Soit A une matrice symetrique et on prouveque φ est symetrique
$$\forall x, y \in E : \varphi(y,x) = \varphi(x,y).$$
Puisque A est symetrique, on a
$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= {}^t xAy =^t \left({}^t xAy\right) \\ &= {}^t y^t Ax =^t yAx = \varphi(y,x).\end{aligned}$$
Donc φ est symetrique.

$\square$

Définition 5.2.4 (Les matrices congruantes)**.** *Les matrices qui représentent la même forme bilinéaire dans différentes bases sont dite congruantes.*

5.2.3 Forme bilinéaire non dégénérée

Définition 5.2.5. *On dit que une forme bilinéaire φ non dégénéréé ou régulière si les deux condotions suivantes sont vérifiées*

i) $\varphi(x,b) = 0$ *pour tout* $x \in E$ *entraine* $b = 0$.

ii) $\varphi(a,y) = 0$ *pour tout* $y \in E$ *entraine* $a = 0$.

Si le noyau de la forme bilinéaire φ est réduit à $\{0\}$, la forme est dite non dégénérée.

Exemple 5.2.6. *Si $E = \mathbb{K}^n$ et si $\varphi(x,y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Alors φ est non dégénérée.*

Exemple 5.2.7. *La forme bilinéaire définit sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ par*
$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$
est non dégénérée. De fait, si $\varphi(f,g) = 0$ pour tout g, on peut prendre $g = f$ et obtenir
$$\int_0^1 f(t)^2 dt = 0.$$
On conclut en utilisant le résultat d'intégration suivant une fonction continue positive dont l'intégrale est nulle est identiquement nulle.

5.2.4 Orthogonalité

Définition 5.2.6. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et φ une forme bilinéaire symetrique sur E. L'orthogonale de F pour φ est l'ensemble*

$$F^{\perp} = \{x \in E : \forall y \in F, \varphi(x,y) = 0_{\mathbb{K}}\}.$$

Exemple 5.2.8. *1) Soit B une forme bilinéaire symetrique sur $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$B(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2, \text{ avec } x = (x_1,x_2), \ y = (y_1,y_2).$$

Soit le sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^2$

$$H = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\right\},$$

évidemment que

$$H = \langle e_1 = (1,1)\rangle,$$

on a,

$$x = (x_1,x_2) \in H^{\perp} \iff B(x,e_1) = 0,$$

implique que

$$x_1 = x_2,$$

donc

$$H^{\perp} = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\right\} = H.$$

2) Soit φ une forme bilinéaire symetrique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4,$$

avec $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, $y = (y_1,y_2,y_3,y_4)$.

Soit le sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^2$

$$H = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2, \ x_3 = x_4\right\},$$

évidemment que

$$H = [e_1 = (1,1,0,0), e_2 = (0,0,1,1)],$$

et $dimH = 2$

on a,

$$x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in H^{\perp} \iff B(x,e_1) = 0 \text{ et } B(x,e_2) = 0,$$

implique que

$$x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_3 + x_4 = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} H^{\perp} &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, \ x_3 + x_4 = 0\right\} \\ &= \langle\{e_3 = (-1,1,0,0), e_4 = (0,0,-1,1)\}\rangle. \end{aligned}$$

Proposition 5.2.4. *Soit F un sous espace vectoriel de E et φ une forme bilinéaire sur E.*

1. *$F^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E.*
2. *$\{0\}^{\perp} = E$.*
3. *$(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.*
4. *$A^{\perp} + B^{\perp} = (A \cap B)^{\perp}$.*
5. *$A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.*
6. *$E^{\perp} = ker\varphi \subset F^{\perp}$.*
7. *$F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$. On a l'égalité si φ est non dégénérée.*
8. *$A^{\perp} = [A]^{\perp}$.*

Théorème 5.2.1. *Soit E un espace vectoriel de dimention finie et F un sous- espace vectoriel de E. Soit φ une forme bilinéaire symetrique sur E. On a*

$$F \cap F^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow E = F \oplus F^{\perp}.$$

Démonstration.
Soit Fet $F^{\perp}$ deux espaces vectoriels de E. Si on a $E = F \oplus F^{\perp}$, alors,

$$F \cap F^{\perp} = \{0_E\}.$$

Par définition de la somme directe. Réciproquement, on pose $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$. Montrons que $E = F \oplus F^{\perp}$. Il suffit de prouver que $E = F + F^{\perp}$. C'est-à-dire

$$\forall z \in E, \exists u \in F, \exists v \in F^{\perp}, \text{ tel que } z = u + v.$$

Soit l'application $f : F \to F^*$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi(x) : \quad & F \to \mathbb{K} \\ & y \mapsto (f(x))(y) = \varphi(x, y). \end{aligned}$$

Soit f est un isomorphisme de F vers F^*, f application linéaire et $\dim F = \dim F^*$, pour montrer que f est bijective, il reste de prouver que f est injective. On a

$$\begin{aligned} \ker f &= \{x \in f, f(x) = 0_{F^*}\} \\ &= \{x \in F, (f(x))(y) = 0_{\mathbb{K}}, \forall y \in F\} \\ &= \{x \in F, \varphi(x, y) = 0_{\mathbb{K}}, \forall y \in F\} \\ &= \left\{x \in F, x \in F^{\perp}\right\} \\ &= F \cap F^{\perp} = \{0_E\}, \end{aligned}$$

ce qu'implique que f est injective, donc f est bijective. D'autre part, pour tout $z \in E$, on a l'application

$$\begin{aligned} \varphi_z : \quad & F \to \mathbb{K} \\ & x \mapsto \varphi_z(x) = \varphi(z, x), \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur F, $\varphi_z \in F^*$. On sait que f est bijective, donc elle est surjective et $\exists u \in F$, $f(u) = \varphi_z$. On a

$$\forall y \in F, (f(u))(y) = \varphi_z(y) \Rightarrow \varphi(u, y) = \varphi(z, y)$$

$$\varphi(u-z,y)=0_{\mathbb{K}}$$

C'est-à-dire $u-z\in F^{\perp}$, et on pose $v=u-z$ et $v\in F^{\perp}$, alors

$$z=u-v, u\in F, -v\in F^{\perp}.$$

Enfin

$$E=F+F^{\perp}.$$

□

5.3 Les formes quadratiques

Considérons dans tous les chapitres que $\mathbb{K}$ corps commutatif tels que $(1_{\mathbb{K}}+1_{\mathbb{K}})\neq 0_{\mathbb{K}}$.

Définition 5.3.1. *Une forme quadratique Q est définit sur un espace vectoriel E est une application de E dans $\mathbb{K}$ de la forme $\varphi(x,x)$, ou $\varphi : E\times E\to\mathbb{K}$ est une forme bilinéaire symétrique.*

$$\forall x\in E : Q(x)=\varphi(x,x).$$

La forme bilinéaire φ est appelée forme polaire de Q. Soit E un espace vectoriel finie muni d'une base $(v_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$. Donnons l'expression générale d'une forme quadratique en coordonnées. Soit B la matrice de la forme bilinéaire associée à Q, alors

$$Q\left(\sum_{k=1}^{n}x_kv_k\right)={}^t xBx=\sum_{i,j}b_{i,j}x_ix_j=\sum_{i,j}b_{i,j}x_i^2+2\sum_{i,j,i<j}b_{i,j}x_ix_j,$$

tels que $b_{ij}=\varphi(v_i,v_j)$. Cette expression est un polynôme à plusieurs variables, dont tous les termes sont de degré total deux.

Exemple 5.3.1. 1) *Considérons la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$, pour la quelle $B=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$, alors*

$$Q(x_1,x_2)=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2.$$

2) *La forme quadratique associée au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est*

$$Q(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{i=n}x_k^2.$$

C'est le carré de la longueur du vecteur $(x_1,\ldots,x_n)$.

Proposition 5.3.1. *Si Q est une forme quadratique sur un e.v E, alors la forme polaire φ associée est unique et on a pour tout $x,y\in E$, pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$*

1. *$Q(\lambda x)=\lambda^2Q(x)$,*
2. *$Q(x+y)=Q(x)+2\varphi(x,y)+Q(y)$,*

3. *On a*

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \frac{1}{2}\left(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(Q(x)+Q(y)-Q(x-y)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(Q(x+y)-Q(x-y)\right).\end{aligned}$$

Démonstration.
Pour tout $(x,y)\in E^2$et un scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$, on a

1. On a $Q\ (\lambda x)=\varphi(\lambda x,\lambda x)=\lambda\varphi(x,\lambda x)=\lambda^2\varphi(x,x)=\lambda^2 Q(x)$ et

$$\begin{aligned}Q(x+y) &= \varphi(x+y,x+y).\\ &= \varphi(x,x)+\varphi(y,x)+\varphi(x,y)+\varphi(y,y).\\ &= Q(x)+2\varphi(x,y)+Q(y).\\ Q(x-y) &= Q(x+(-y)).\\ &= Q(x)-2\varphi(x,y)+Q(y).\end{aligned}$$

Il suffit de soustraire ces deux égalités pour obtenir la dernière formules.

□

Remarque. *Les trois dernière formules s'appellent identités de polarisation (règle de parallélogramme). Démontrons les par un calcul direct.*

Théorème 5.3.1. *Une application $Q:E\to\mathbb{K}$ est une forme quadratique si et seulement si l'application*

$$(x,y)\mapsto\frac{1}{2}\left(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\right),$$

est bilinéaire symétrique et $\forall x\in E,\forall\lambda\in\mathbb{K},Q\left(\lambda x\right)=\lambda^2 Q(x)$.

Démonstration.
Si Q est une forme quadratique associée à φ, on a pour tous $x,y\in E$,

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\left(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\right).$$

est bilinéaire.
Inversement, soit l'application bilinéaire

$$\begin{aligned}\alpha:\ & E^2\to\mathbb{K},\\ & (x,y)\mapsto\tfrac{1}{2}\left(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\right)\end{aligned}$$

Puisque

$$Q(\lambda x)=\lambda^2 Q(x),\ \forall x\in E,\forall\lambda\in\mathbb{K}.$$

Alors α est aussi symetrique, et pour tout $x\in E$

$$\alpha(x,x)=\frac{1}{2}\left(Q(x+x)-Q(x)-Q(x)\right)=Q(x).$$

Donc Q est la forme quadratique associée a α. □

Exemple 5.3.2. *Consédirons la forme quadratique* $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *donnée par*

$$Q(x) = 2x_1^2 + 9x_1x_2 - 9x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2.$$

En appliquant la première méthode on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right). \\
&= \frac{1}{2}[2(x_1+y_1)^2 + 9(x_1+y_1)(x_2+y_2) - 9(x_1+y_1)(x_3+y_3) + 5(x_2+y_2)^2 \\
&\quad -4(x_2+y_2)(x_3+y_3) - (x_3+y_3)^2 - (2x_1^2 + 9x_1x_2 - 9x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2) \\
&\quad -(2y_1^2 + 9y_1y_2 - 9y_1y_3 + 5y_2^2 - 4y_2y_3 - y_3^2)] \ - 4(x_2+y_2)(x_3+y_3) - (x_3+y_3)^2 \\
&\quad -(2x_1^2 + 9x_1x_2 - 9x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2) \\
&\quad -(2y_1^2 + 9y_1y_2 - 9y_1y_3 + 5y_2^2 - 4y_2y_3 - y_3^2)].
\end{aligned}$$

En fin on trouve

$$\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + \frac{9}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - \frac{9}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) + 5x_2y_2 - (x_2y_3 + x_3y_2) - x_3y_3.$$

Exemple 5.3.3. *Soit* A *une matrice* $n \times n$ *symetrique c'ést-à-dire* $A^t = A$. *Alors*

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \quad X \mapsto {}^tXAX,$$

est une forme quadratique, sa forme polaire est la forme bilinéaire symetrique de la matrice A *dans la base canonique de* $\mathbb{K}^n$.

Exemple 5.3.4. *Soit* $E = \mathbb{R}^4$ *l'application* $Q : E \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$Q(x) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2,$$

est une forme quadratique bien connue en mécanique quantique.

L'expression algèbrique d'une forme quadratique

L'expression algèbrique d'une forme quadratique est

$$Q(x) = \varphi(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(v_i, v_j)x_ix_j =^t xAx,$$

où $A = (\varphi(v_i, v_j))_{n\times n}$ la matrice associée à Q. Si on change la base on obtient une nouvelle représentation $Q(x) =^t xBx$, mais toujours on a $B = {}^tPBP$, ou P est la matrice de passage à la nouvelle base.

Matrice associée

Théorème 5.3.2. *Soit* E *un espace vectoriel de dimention finie sur* $\mathbb{K}$, $Q : E \to \mathbb{K}$ *forme quadratique sur* E *et* φ *forme bilinéaire symetrique associée à* Q. *Les lignes de* A, *la matrice associée à* Q *dans la base* $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$, *c'est la matrice des formes linéaires dans la même base comme suite*

$$Q_i(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i}(x), (1 \leq i \leq n), \text{ (les dérivées partielles de } Q).$$

C'est-à-dire la matrice de la forme linéaire Q_i.

Exemple 5.3.5. *Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique par*

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3.$$

Calculons les dérivées partielles par rapport à x_i qui défine la ligne i de la matrice

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x) &= x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) x, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i}(x) &= \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) x, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i}(x) &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) x.
\end{aligned}$$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode :Calcul la matrice associée à une formes quadratique.

Pour calculer la matrice associée à une forme quadratique, on place sur le diagonale les coéfficients des carrées x_i^2 apparaissants dans le polynômede degré 2 définissant Q. Pour les termes qui ne sont pas sur le diagonale, il faut diviser par deux les coéfficients des termes x_ix_j du polynome.

Exemple 5.3.6. *Soit $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3$. La matrice associée de Q est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 5.3.2. *Soit Q une forme quadratique de E et A sa matrice associée dans une base B. On appelle rang de Q noté $rg(Q)$, le rang de sa matrice associée A.*

Définition 5.3.3. *On appelle noyau de Q le sous-espace véctoriel de E*

$$\ker(q) = \{x \in E, \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}.$$

Remarque. *On définit également le rang et le noyau d'une forme quadratique. Ils sont egaux au rang et au noyau de la forme bilinéaire symetrique ou de la matrice associée. On remarque que le rang de Q ne dépond pas de la base choisie. En effet, deux matrices congruantes ont même rang.*

Exemple 5.3.7. *Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique donnée par*

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz.$$

a pour matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puisque $\det A \neq 0$, *alors Q est de rang* 3.

Définition 5.3.4. *Un vecteur $x \in E$, est dit isotrope (pour Q) lorsque $Q(x) = 0$. Si non, on dit qu'il est anisotrope.*

Une forme quadratique Q est dite isotrope lorsqu'elle admet un vecteur isotrope non nul.

Définition 5.3.5. *Soit Q une forme quadratique sur un espace véctoriel E. Le cone des vecteurs isotropes de Q est définie par*

$$C(Q) = \{x \in E \setminus Q(x) = 0\}.$$

Définition 5.3.6. *Un vecteur $x \in E$ satisfaisant $Q(x) = 0$ est dite isotrope.*

Remarque. *On a toujours $kerQ \subseteq C(Q)$, mais attention en générale $C(Q)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*

Exemple 5.3.8. *Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique donnée par*

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

La matrice associée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique est donc de rang 2 et de $kerQ = \{0\}$.

Calculons son cone .

$$Q(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Cest-à-dire $x_1 = x_2$ ou bien $x_1 = -x_2$. Le cone $C(Q)$ est l'union des deux droites vectorielles dirigées par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Forme quadratique non dégénérée

Définition 5.3.7. *La forme quadratique Q est dite non dégénérée si $ker(Q) = \{0\}$, dégénérée si non .*

Exemple 5.3.9. *La forme quadratique suivante est non dégénérée.*

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} :\ & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \\ & A \mapsto \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A \times A) \end{aligned}$$

Remarque. *On a toujours $\det(A) \neq 0$ si et seuleument si Q est non dégénérée, où A est la matrice associée de la forme quadratique Q.*

Exemple 5.3.10. *Soit A la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a $det(A) = -\frac{9}{4} \neq 0$ donc Q est non dégénérée.

Proposition 5.3.2. *Soit Q une forme quadratique, on a Q est non dégénérée si et seulement si $rang(Q)$ =$dim(E) = n$.*

Définition 5.3.8. *On appelle espace quadratique un espace vectoriel E muni d'une forme quadratique Q, noté souvent (E, Q).*

L'espace prend des noms particuliers selon les proprietès suplimentaires de la forme quadratique.

L'espace quadratique est dit Euclidien s'il muni d'un produit scalaire.

Définition 5.3.9. *Soient (E, Q) et (F, Q') deux espaces quadratiques. On appelle* ***morphisme métrique*** *de (E, Q) vers (F, Q') toute application linéaire $u : E \to F$ telle que*

$$\forall x \in E : Q'(u(x)) = Q(x).$$

Si l'application u est injective, on dit que u est un isomorphisme.

5.3.1 Orthogonalité

Définition 5.3.10. *L'ortogonalité pour une forme quadrtique c'est l'ortogonalité pour sa forme polaire.*

Théorème 5.3.3. *Soit $x, y \in E$, on a*

$$x \perp y \Leftrightarrow Q(x + y) = Q(x) + Q(y).$$

Démonstration. On a pour tout $x, y \in E$

$$Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + 2\varphi(x, y).$$

Et selon la définieion de l'orthogonalité on a $x \perp y \Leftrightarrow \varphi(x, y) = 0_{\mathbb{K}}$. Donc

$$Q(x + y) = Q(x) + Q(y).$$

□

5.3.2 Signature

On va introduire un invariant important des formes quadratiques, relié au signe qui peuvent prendre ses valeurs.

Définition 5.3.11. *Soit Q une forme quadratique.On dit que Q est*

1. *Définie si $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*
2. *Positive si pour tout $x \in E : Q(x) \geq 0$.*
3. *Définie positive si pour tout $x \in E$ non nul, $Q(x) > 0$.*
4. *4) Négative si pour tout $x \in E$, $Q(x) \leq 0$.*
5. *5) Définie négative si pour tout $x \in E$ non nul, $Q(x) < 0$.*

Exemple 5.3.11. *Soit $Q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $Q(A) = (tr(A))^2$ une forme quadratique, donc Q est positive mais non définie, car*

$$Q\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Proposition 5.3.3. *Une forme quadratique définie positive est non dégénérée. De fait, $kerQ \subseteq C(Q)$ et le cone est nul dans le cas dégénérée par définieion*

$$C(Q) = \{x \in E : Q(x) = 0\} = \{0\}.$$

Démonstration. Par contraposé, supposons Q dégénérée, alors il existe x non nul tels que pour tout $y \in E$, $\varphi(x, y) = 0$. En particulier pour $x = y, \varphi(x, x) = 0$. Donc Q est non définie. □

Exemple 5.3.12. *Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est définie positif.*

Théorème 5.3.4 (Schwartz)**.** *Si Q est positive alors*

$$\forall (x, y) \in E^2 : |\varphi(x, y)| \leq Q(x)Q(y).$$

Si de plus Q est définie il ya égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$, on a

$$Q(tx + y) = t^2 Q(x) + 2t\varphi(x, y) + Q(y) \geq 0,$$

car Q est positive.
Si $Q(x) = 0$, alors on a

$$2t\varphi(x, y) + Q(y) \geq 0.$$

Ce qui entraine

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Si $Q(x) \neq 0$, alors on a un polynôme du second degré qui ne change pas de signe. Son déscriminant

$$4\varphi(x, y)^2 - Q(x)Q(y).$$

Est donc négatif d'où l'inégalité.

Pour le cas ou Q est de plus définie, on a égalité lorsque le discriminant est nul. C'est-à-dire si il existe t_0, tel que

$$Q(t_0 x + y) = 0.$$

Ce qui équivaut à

$$t_0 x + y = 0.$$

Car Q est définie. Donc x et y sont liés. □

Définition 5.3.12. *Soit E un espace vectoriel de dimention finie et Q une forme quadratique sur E. La signature de Q est le couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ donnés par*

$$p = \max\left\{\dim F : F \text{ sous espace de } E \text{ tel que } Q_{|F} \text{ est définie positive}\right\}.$$
$$q = \max\left\{\dim F : F \text{ sous espace de } E \text{ tel que } Q_{|F} \text{ est définie négative}\right\}.$$

Exemple 5.3.13. *Une forme quadratique Q sur E de dimension n qui est définie positive est de signature $(n, 0)$. C'est le cas par exemple pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.*

De fait, pour une forme quadratique définie positive, le plus grand espace sur lequel Q est définie positive est E lui même. Si F est un espace sur lequel Q est définie négative, il ne peut pas contenir de vecteur x non nul, car on aurait pour ce vecteur $Q(x) > 0$ et $Q(x) < 0$. Le sous espace $F = \{0\}$ est le seule sur lequel Q est définie négative.

Exemple 5.3.14. *La forme bilinéaire symetrique $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2.$$

Sa forme quadratique associée est

$$Q(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2.$$

Sa signature est (2.0).

5.3.3 Reduction des formes quadratiques en somme des carrés.

Soit E un espace vectoriel et $\dim E = n$. Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de E, Q une forme quadratique sur E. La réduction des formes quadratiques nous permet d'écrire la forme quadratique dans une autre base $\{e'_1, ..., e'_n\}$ pour simplifier l'écriture de la forme quadratique en somme des quarées et la matrice associée sera diagonale. Dans l'exemple si dessus en verra **la méthode de Gauss.**

Exemple 5.3.15. *Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$définie par*

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

tel que

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On va réduire Q en somme des carées c'est-à-dire

$$Q = \alpha_1\ell_1^2 + \alpha_2\ell_2^2 + \alpha_3\ell_3^2,$$

tel que $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ des formes linéaires on va les trouver. On pose

$$\begin{aligned}
\phi\left(x_1, x_2, x_3\right) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \\
\ell_1(x) &= \frac{1}{2}\phi'_{x_1}\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1 - 4(x_2 + x_3), \\
Q_1(x) &= Q(x) - (\ell_1(x))^2 = -3x_2^2 - 3x_3^2 - 12x_2x_3.
\end{aligned}$$

On répète l'opération sur Q_1, on pose

$$\psi\left(x_1, x_2, x_3\right) = -3x_2^2 - 3x_3^2 - 12x_2x_3,$$

et

$$\begin{aligned}
\ell_2(x) &= \frac{1}{2}\phi'_{x_2}\left(x_1, x_2, x_3\right) = -3x_2 - 6x_3, \\
Q_2(x) &= Q_1(x) + \frac{1}{3}(\ell_2(x))^2 = 9x_3^2,
\end{aligned}$$

on pose

$$\ell_3(x) = 3x_3,$$

alors

$$Q(x) = (\ell_1(x))^2 - \frac{1}{3}(\ell_2(x))^2 + (\ell_3(x))^2,$$

au

$$\ell_1(x) = 2x_1 - 4(x_2 + x_3),\ \ \ell_2(x) = -3x_2 - 6x_3,\ \ \ell_3(x) = 3x_3.$$

On va prouver maintenant que $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ *est une base de* $(\mathbb{R}^3)^*$. *On montre d'abord que* $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ *est libre c'est-à-dire*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2 + \lambda_3\ell_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, *on a*

$$(2\lambda_1)x_1 + (-4\lambda_1 - 3\lambda_2)x_2 + (-4\lambda_1 - 6\lambda_2 + 3\lambda_3)x_3 = 0,$$

pour

$$x = (1, 0, 0),\ \ x = (0, 1, 0),\ \ x = (0, 0, 1),$$

on trouve

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0, \\ -4\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0, & \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \\ -4\lambda_1 - 6\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

Ensuite, on sait que

$$\text{Card}\,\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\} = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)^* = 3.$$

Donc $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ *est une base de* $(\mathbb{R}^3)^*$.

Bibliographie

[1] A. J. Marie, J. L. Ferrand, *Cours de Mathématiques*, Tome 1Algebre, 1978.

[2] A,Howard,R.Chris, *Elementary linear algebra, applications version,* John Wiley & Sons, 2013.

[3] T. M. APOSTOL, *Linear Algebra, A First Course with Applications to Differential Equations.* John Wiley & Sons, 2014.

[4] S. K. Berberian, *Linear algebra, Courier Corporation,* 2014.

[5] J. Chirzad, *Algèbre linéaire*, Université de Constantine, 1987.

[6] C. François, *Algèbre et géométrie.* Vol. 51. Bréal, 1998.

[7] C. Yves, *Algèbre linéaire et bilinéaire I,* Surbonne université, 2020.

[8] C. Emard François, *Algebre linéaire et bilinéaire,* De Boeck Superieur, 2005.

[9] D. Etienne, *Exercices corrigés d'algèbre linéaire,* Tome 1, 2006

[10] D. Etienne, *Exercices corrigés d'algèbre linéaire,* Tome 2, 2006.

[11] D. Camille, F. Yves, *Algèbre linéaire : pour HEC et ingénieurs commerciaux.* De Boeck Supérieur, 2000.

[12] J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire,* Hermann, 1964.

[13] G. Joseph, *Algèbre Linéaire,* Éditions Cépaduès, 2019.

[14] J. J. Colin, J. M. Morvan, *Bien débuter en mathématiques. Espaces vectoriels, Applications linéaires–L1, L2,* Classes préparatoires, 2011.

[15] L. MIRSKY, *An introduction to linear algebra,* Courier Corporation, 2012.

[16] R. MANSUY, R. MNEIMNÉ, *Algèbre linéaire, Réduction des endomorphismes.* Vuibert, 2012.

[17] C. Robet, *Formes quadratiques réelles,* Université de Rennes 1, 2014.

[18] M. Ruffini, *les formes quadratiques et orthogonalité,* Lecon 170.

[19] A. TELEMAN, *Géométrie Différentielle Cours L3 MG,* Aix-Marseille Université. 2015.

[20] H. Zakraoui, *Cours d'algèbre 4, 2ème année LMD,* 2018.

[21] L. Serge, *Introduction to linear algebra,* Springer Science & Business Media, 2012.