

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Oran's Higher Teachers College
AMMOUR Ahmed



المدرسة العليا للأساتذة بهران
عمور احمد

قسم العلوم الدقيقة

تخصص :رياضيات

دروس مفصلة و تمارين محلولة سنة رابعة رياضيات

تخصص أستاذ تعليم متوسط و تعليم ثانوي

السداسي الأول

مقياس المعادلات التفاضلية

من إعداد الأستاذ :

• الدكتور مجاهدي براهيم

أستاذ محاضر صنف "أ"

السنة الجامعية : 2025 / 2026

❖ تقدير و شكر ❖

الحمد لله الذي أنشئ وبرى و خلق الماء و الثرى و أبدع كل شيء و درى الرحمن على العرش استوى و الصلاة و السلام على من بكى على أمته المبعوث في أم القرى و صل اللهم على الحبيب المصطفى أمّا بعد: فإنما طلبنا العلم لوجه الله تعالى ولم نرد بذلك إلا وجه الله وذلك فضل الله يؤتيه من يشاء، لقوله تعالى: "يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ"، وقد رفعنا الله بذلك و نسأله أن يرفع قيمتنا في الآخرة ويرفع مقامنا في الآخرة كما رفعه في الدنيا، فالشكر لله العلي القدير في الأول و الآخر على نعمة التوفيق .

بقلوب ممتنة و عرفان بالجميل، نتقدم بخالص الشكر و التقدير لكل من ساهم في إنجاح هذه المطبوعة كما نخص بالشكر الجزيل إلى السادة الأساتذة على قبولهم الدعوة و على وقتهم وجهدهم في مراجعة و تقييم هذه المطبوعة التي نأمل أن تكون عوناً لطلابنا الأعزاء يجدون فيها ضالتهم في فهم و مراجعة مقياس المعادلات التفاضلية.

وآخر دعوانا أن الحمد لله ربّ العالمين اللهم انفعنا بما علمتنا و انفع بنا فالحمد لله على حسن التمام و الختام .

الفهرس

مقدمة

1

الفصل الأول: مفاهيم عامة حول المعادلات التفاضلية

3

1.1 المعادلات التفاضلية : 4

2.1 رتبة معادلة تفاضلية : 5

3.1 درجة معادلة تفاضلية : 5

4.1 الحل العام و الحل الخاص : 6

5.1 تكوين معادلة تفاضلية (حذف الثوابت) : 7

6.1 الشروط الابتدائية و الشروط الحدية : 8

7.1 مسألة كوشي : 9

8.1 نظرية الوجود و الوحدانية لحل المعادلة التفاضلية العادية : 10

الفصل الثاني: المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

11

1.2 طرق حل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى: 12

1.1.2 طريقة تغيير الثوابت لحل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى : 12

2.1.2 طريقة المعامل التكامل لحل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى : 15

2.2 معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين : 16

3.2 كيفية حل معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين: 16

4.2 معادلة تفاضلية متجانسة : 17

5.2 كيفية حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى : 18

6.2 معادلات تفاضلية تؤول إلى خطية : 19

1.6.2 معادلة برنولي: 19

2.6.2 معادلة ريكتي: 22

3.6.2 معادلة لاغرانج : 25

7.2 تمارين 26

8.2 حل بعض التمارين 27

الفصل الثالث: المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة

32

1.3 مفاهيم عامة حول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية: 33

1.1.3 تعاريف: 33

2.1.3 نظرية الوجود و الوحدانية: 34

35	3.1.3 المؤثر التفاضلي الخطي:
37	4.1.3 محدد ورونسكي: woronskian
39	2.3 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة:
39	1.2.3 طريقة المعادلة المميزة
43	2.2.3 طريقة تغيير الثابتين
45	3.2.3 طريقة المؤثر العكسي
50	3.3 تمارين

52	الفصل الرابع: المعادلات ت.مخ من الرتبة 2 بمعاملات متغيرة
53	1.4 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات متغيرة:
53	2.4 طريقة أويلر:
56	3.4 طريقة لاغرونج
57	4.4 طريقة البرامترات (تغير الثوابت أو الوسائط):
64	5.4 طريقة الصورة القياسية
66	6.4 إيجاد صيغة أبل:
70	7.4 طريقة تحليل المؤثر:
72	8.4 إستبدال المتغير المستقل:
77	9.4 المعادلة التامة Exact Equations :
80	10.4 المعادلة المزاملة Equation Adjoint :
82	11.4 المعادلة المزاملة ذاتيا Equation Adjoint Sefl :
83	12.4 إستعمال طريقة إختزال الرتبة
87	13.4 تمارين مقترحة
90	14.4 بعض الحلول المقترحة

108	الفصل الخامس: تحويل لابلاس وتطبيقاته في حل معادلة تفاضلية
109	1.5 تحويل لابلاس :
111	1.1.5 شرط التقارب :
111	2.1.5 التقارب المطلق :
112	3.1.5 الإستمرار المقطعي :
112	4.1.5 الرتبة الأسية :
113	5.1.5 نظرية الوجود :
115	6.1.5 جدول لابلاس :
116	2.5 خصائص تحويل لابلاس :
116	1.2.5 خاصية الخطية :
116	2.2.5 خاصية الإزاحة الأولى :
120	3.2.5 خاصية الإزاحة الثانية :

121	خاصية تغير المقياس :
123	خاصية تحويل لابلاس للمشتقات :
124	خاصية تحويل لابلاس للتكاملات :
125	خاصية الضرب في t :
127	خاصية القسمة على t :
129	تحويل لابلاس العكسي :
129	خواص تحويل لابلاس العكسي :
130	جدول تحويل لابلاس العكسي :
130	طرق إيجاد تحويل لابلاس العكسي :
134	التلاف:
136	خواص التلاف :
137	نظرية التوزيع (نظرية التلاف):
139	تطبيقات على حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويلات لابلاس :
139	حل معادلات تفاضلية عادية ذات معاملات ثابتة :
142	حل معادلات تفاضلية عادية ذات معاملات متغيرة :
145	قائمة المراجع

مقدمة

يمكن القول دون تجاوز أو مبالغة أن المعادلات التفاضلية تحتل مكانة مرموقة في كل فروع العلوم الهندسية والفيزيائية، فبواسطة المعادلات التفاضلية أمكن فهم الكثير من الظواهر المعقدة في حياتنا اليومية. أبرزها ظاهرة الكهرومغناطيسية فهي تجربنا عما جرى سابقا و عما سيجري لاحقا واصفا تلك الحادثة بمتحولات ترمز للزمان و المكان و عوامل أخرى تؤثر في الحادثة نفسها لذلك مامن تخصص في حقل العلوم التطبيقية إلا و يجد نفسه أمام معادلة تفاضلية أو أكثر يتوجب معرفة الكثير من خصائصها لكي نجد حلها وإن إستعصى الحصول عليه في بعض الأحيان، فلا توجد طريقة رياضية عامة لحل المعادلات التفاضلية بل هناك بعض الطرق يمكن تعميمها على مجموعة خاصة من المعادلات.

لقد استحوذ هذا الأمر على إهتمام الرياضيين منذ بداية القرن السابع عشر، إذ إستخدم إسحاق نيوتن المعادلات التفاضلية في دراسة حركة الجسيمات و الأجرام السماوية و تكهن بسلوكها و موقعها في أي لحظة، و إمتد استخدامها في التحليل الرياضي إذ تعتبر من مواضيع الرياضيات البحتة و التطبيقية وهي الرابط بين العلوم الرياضية و الهندسية.

فلا تخلو مواضيع الهندسة الكهربائية و الميكانيكية من المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية و تزايدت أهميتها في جميع العلوم التطبيقية.

ولا شك أن المعادلات التفاضلية الخطية ذات الشروط الابتدائية المعطاة تعتبر من أبرز عناوين التمثيل الرياضي و التي تم بناءه لمعرفة و تحديد الظواهر العلمية بما في ذلك مصادر المعلومات المتعلقة بها.

ولتوضيح فكرة التمثيل الرياضي نجد المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية في شتى العلوم كالطب الحيوي و الاقتصاد و التمويل و فهم سلوك الظواهر الطبيعية مثل الإهتزازات، كذا في البيئة بأحوال الطقس و الكوارث الطبيعية، كما نجد لها في مجال الذكاء الاصطناعي مما ساعد الباحثين و المهندسين لحل مشاكل معقدة مثل التنبؤ و التحكم الآلي. ونحن بدورنا قنا بإبراز أهم تطبيقات المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية خاصة في المجال الميكانيكي و الكهربائي لما لهما من أهمية كبيرة في حياتنا الواقعية من خلال دراسة مجموعة من المفاهيم التي من شأنها أن تكون أساسا للطلاب ليتمكن من التعمق في هذا المجال أكثر مستقبلا و تضمن بحثنا أربعة فصول وهي كالآتي :

الفصل الأول :

يتناول الفصل الأول المفاهيم الأساسية والمتمثلة في تعريف وتصنيف للمعادلات من ناحية الرتبة والدرجة و لما لهما من أهمية في تحديد طرق حل المعادلة التفاضلية.

الفصل الثاني :

يهدف هذا الفصل إلى تزويد القارئ بأهم الطرق لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى وذلك بالتعرف على الحل المتجانس والحل الخاص وطريقة المعامل التكاملي، ثم أدرجنا معادلات غير خطية والتي يؤول حلها إلى تغيير متغير لتتحول إلى معادلة خطية و منها معادلة برنولي، معادلة لاغرونج، معادلة ريكارتي، معادلة كليرو. كما ختمنا هذا الفصل بتمارين مقترحة وحل بعض هذه التمارين.

الفصل الثالث:

يهدف هذا الفصل إلى تزويد القارئ بأهم الطرق لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة ونميز منها حالتين المتجانسة والتي تعتمد على كثير الحدود المميز و نوعية جذوره، كما سندس المعاملات الغير المتجانسة وهي التي تكون بالطرف الثاني وهنا نتعرف على المؤثر التفاضلي والمؤثر العكسي. وفي ختام هذا الفصل إقترحنا تمارين دون حل وذلك لظون الحلول سنعاول التطرق لها في الفصل الموالي.

الفصل الرابع:

كما نتطرق إلى معادلات بمعاملات غير ثابتة وإلى أهم الدراسات في هذا المجال الذي في الحقيقة لم يتوصل لطريقة شاملة تستطيع معالجة كل المعادلات من هذا النوع إلا أنه الكثير من العلماء من عمل على هذا النوع وتوصل إلى نتائج لحل معادلات خاصة وفق شروط معلومة ونذكر من هذه الطرائق: طريقة البرامترات والصورة القياسية وغيرها من الطرق، بحيث نسعى في سبيل حلها إلى إرجاعها إلى قالب معادلة تفاضلية بمعاملات ثابتة. وختمنا هذا الفصل بتمارين متنوعة عن كل حالة مع إقترح حل أو حلين في كل حالة.

الفصل الخامس:

نتعرف في هذا الفصل على محول لابلاس و خصائصه وأهم القوانين المتعلقة بحسابه كما نتعرف على محول لابلاس العكسي وإستعماله في إيجاد حلول المعادلات التفاضلية.

الفصل الأول

مفاهيم عامة حول المعارضات النفاضية



تمهيد

في هذا الفصل سنتكلم على بعض التعاريف و المفاهيم الأساسية المتعلقة بالمعادلات التفاضلية و التي تمكننا من الإجابة على بعض الأسئلة منها. ماهي المعادلة التفاضلية؟ ماهي أنواع المعادلات التفاضلية؟ هل كل المعادلات التفاضلية تقبل حلول وماهي حلول المعادلات التفاضلية؟ إذا قبلت المعادلة التفاضلية حل فهل دوما نستطيع إيجاداه؟.

1.1 المعادلات التفاضلية :

تعريف 1.1.1:

- المعادلة التفاضلية هي كل معادلة المتغير فيها هو عبارة عن دوال و مشتقاتها من رتبة مختلفة حيث إذا كانت الدالة ذات متغير واحد تسمى معادلة تفاضلية عادية (ODE) أما إذا كانت الدالة ذات متغيرين أو أكثر فتسمى معادلة تفاضلية جزئية (PDE).
- المعادلة التفاضلية من الرتبة n حيث $n \in \mathbb{N}^*$ هي كل معادلة من الشكل :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

مع F علاقة تربط بين المتغير الحر x و دالة y مجهولة ذات المتغير x و مشتقاتها إلى غاية الرتبة n .
و نسمي حلا أو جذرا للمعادلة (1.1) في مجال حقيقي I كل دالة φ تقبل الاشتقاق n مرة على I و تحقق:

$$\forall x \in I : F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad (2.1)$$

أمثلة 1.1.1

$$2y'' + \frac{1}{x}y = x^3 \quad \textcircled{1}$$

$$(x^2 - 3)y^2 y^{(2)} + xy'' = 0 \quad \textcircled{2}$$

هي معادلات تفاضلية عادية.
و كمثال على معادلة تفاضلية جزئية.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

2.1 رتبة معادلة تفاضلية :

تعريف 1.2.1:

هي رتبة أعلى معامل تفاضلي في المعادلة.

أمثلة 1.2.1

① $y''' + 2y'^4 - 5y = e^x$ هي معادلة تفاضلية عادية رتبته 3.

② $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2y^2 = \sin x$ هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية.

3.1 درجة معادلة تفاضلية :

تعريف 1.3.1:

هي درجة (أس) أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية.

أمثلة 1.3.1

من الأمثلة السابقة :

المثال الأول درجة المعادلة التفاضلية هو 1.

المثال الثاني درجة المعادلة التفاضلية هو 3.

4.1 الحل العام والحل الخاص :

تعريف 1.4.1:

لكل معادلة تفاضلية نوعين من الحلول حل عام و هو الحل الذي يحتوي على ثوابت بقدر رتبة المعادلة أي الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الإختيارية ويحقق المعادلة التفاضلية.
أما الحل الخاص هو أي حل يحقق المعادلة التفاضلية لا يشمل على ثوابت إختيارية وقد نحصل عليه أحيانا بالتعويض عن الثوابت الإختيارية في الحل العام بقيم محددة.
يوجد حل خاص يسمى الحل الشاذ و هو الحل الذي نحصل عليه دون التعويض في الحل العام و لا علاقة له به أصلا.

أمثلة 1.4.1

① الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y'' + 4y' + 3y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, هو $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

حيث c_1, c_2 , ثوابت حقيقية إختيارية.
الحلول الخاصة تكون على الصور :

$$(أ) \quad y(x) = e^{-x} - e^{-3x}$$

$$(ب) \quad y(x) = 2e^{-x}$$

$$(ج) \quad y(x) = 3e^{-3x}$$

② المعادلة التفاضلية : $y' = -\frac{y}{x}, x \in \mathbb{R}^*$

حلها العام هو $y = \frac{c}{x}, x \in \mathbb{R}^*$ و حلها الخاص هو $y = -\frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$

③ نثبت أن $y(x) = c \sin x$ حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت:

$$y(x) = c \sin x$$

$$y'(x) = c \cos x$$

$$y''(x) = -c \sin x$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$y''(x) + y(x) = -c \sin x + c \sin x = 0$$

إذن $y(x) = c \sin x, x \in \mathbb{R}$ هو حل عام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

5.1 تكوين معادلة تفاضلية (حذف الثوابت) :

تعريف 1.5.1:

إذا أعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n ، نجد أن ذلك الحل يعتمد على n من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة:

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (3.1)$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ ثوابت إختيارية و للحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى نجري n من المشتقات للمعادلة (3.1).

مثال 1.5.1

لنجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام:

$$y = c \sin x, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[. \quad (4.1)$$

حيث c ثابت.
نفاضل مرة واحدة:

$$y' = c \cos x \quad (5.1)$$

نحذف c من المعادلتين (4.1) و (5.1)، وذلك بقسمة (5.1) على (4.1) و تكون المعادلة التفاضلية المطلوبة هي:

$$y' = y \cot x, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[. \quad (6.1)$$

6.1 الشروط الابتدائية و الشروط الحدية :

تعريف 1.6.1:

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية تعطى بعض الشروط التي يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية. وهذه الشروط تمكننا من تحديد التوابت الاختيارية التي تظهر في الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة في إيجاد الحل العام.

• إذا أعطي الشرطان عند نفس النقطة x_0 مثلا $y(x_0) = a$ ، $y'(x_0) = b$:
فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الابتدائية وتسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى هذه الشروط مسألة القيمة الابتدائية.

• إذا أعطي الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_1) = y_1$ ، $y(x_2) = y_2$:
كانت الشروط حدية و سميت المعادلة التفاضلية بالإضافة لهذه الشروط مسألة القيمة الحدية.

أمثلة 1.6.1

1. حل المعادلة التفاضلية $y'' = x$ مع الشروط الابتدائية : $y(0) = 1$ ، $y'(0) = -1$
بإجراء التكامل مرتين للمعادلة التفاضلية نجد : $y = \frac{1}{6}x^3 + c_1x + c_2$ و بتعويض الشروط
الابتدائية نتحصل على : $c_1 = -1$ و $c_2 = 1$

إذن حل المسألة المعطاة هو : $y = \frac{1}{6}x^3 - x + 1, x \in \mathbb{R}$.

2. حل المعادلة التفاضلية $y'' = 6x + 2$ التي تحقق الشروط الحدية : $y(0) = 2$ ، $y(2) = 8$
بتكامل طرفي المعادلة التفاضلية مرتين نجد : $y = x^3 + x^2 + c_1x + c_2$

و بتعويض الشروط الحدية نتحصل على : $c_2 = 2$ و $c_1 = -3$

إذن حل المسألة المعطاة هو : $y = x^3 + x^2 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}$.

7.1 مسألة كوشي :

تعريف 1.7.1:

نسمي مسألة كوشي مسألة إيجاد حلول المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

حيث $f : I \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تطبيق معرف على $I \times D$ و الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى بالشرط الابتدائي لمسألة كوشي.

مثال 1.7.1

$$(p_2) : \begin{cases} y' = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

بالتكامل نجد $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ مع $c \in \mathbb{R}$.

و بتعويض الشرط الابتدائي نحصل على : $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

و نقول أن المسألة (p_2) تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$.

8.1 نظرية الوجود والوحدانية لحل المعادلة التفاضلية العادية :

تعريف 1.8.1:

نعتبر المعادلة التفاضلية :

$$y' = f(x, y) \quad (7.1)$$

والتي تحقق الشرط الابتدائي :

$$y(x_0) = y_0 \quad (8.1)$$

حيث الدالة $f(x, y)$ المعرفة في المغلق المحدود: $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ مع a و b ثابتان، تحقق :

① الدالة $f(x, y)$ مستمرة و محدودة أي يوجد عدد موجب M حيث: $|f(x, y)| \leq M$

② الدالة $f(x, y)$ لها مشتقة جزئية بالنسبة إلى y محدودة أي أنه من أجل K عدد موجب:

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K$$

فإن المعادلة (7.1) يكون لها حل وحيد $y = y(x)$ يحقق الشرط الابتدائي (8.1) في المنطقة $|x - x_0| \leq h$ حيث: $h = \min(a, \frac{b}{M})$

مثال 1.8.1

نبحث عن وجود حل وحيد للمسألة الابتدائية $y' = x^2 + y^2$ مع $y(0) = 0$.

لتكن $f(x, y) = x^2 + y^2$ دالة كثير حدود .

نكون المستطيل R الذي مركزه $(0, 0)$ أي: $|x| \leq a, |y| \leq b$ حيث $a, b > 0$

$$|f(x, y)| = |x^2 + y^2| \leq |x^2| + |y^2| = |x|^2 + |y|^2 = a^2 + b^2 = M$$

أي $|f(x, y)| \leq M$ و منه $h = \min(a, \frac{b}{a^2 + b^2})$ أي أن h تعتمد على a و b فإذا كانت مثلاً $a = b = 1$ نجد أن $h = \min(1, \frac{1}{2})$ أي $h = \frac{1}{2}$ وبالتالي فإن المعادلة $y' = x^2 + y^2$ لها حل وحيد في المجال $|x| \leq \frac{1}{2}$.

الفصل الثاني

المعاملات النفاضية الخطبة من الرتبة الأولى

1.2 طرق حل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى:

تعريف 1.1.2:

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى هي معادلة تفاضلية من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad (1.2)$$

حيث $p(x)$ و $q(x)$ دالتان في x . وتسمى هذه المعادلة خطية لأنها تحتوي على المتغير y ومشتقته بشكل خطي، أي دون قوى أو جداء بين y ومشتقاته.

1.1.2 طريقة تغيير الثابت لحل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى :

① إيجاد الحل المتجانس y_h :

نبدأ بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة المرتبطة بالمعادلة الأصلية والتي تأخذ الشكل :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

بالتكامل نجد :

$$\ln(y) = F(x) + c$$

حيث: $F(x) = -\int p(x)dx$

ومنه الحل المتجانس يكون من الشكل:

$$y_h = Ke^{F(x)}, \quad K = e^c$$

② إيجاد الحل الخاص y_p :

باستعمال طريقة تغيير الثابت بدلاً من إعتبار K ثابتاً، نفترض أنه دالة في x أي :

$$y_p = K(x)e^{F(x)}.$$

③ ثم نشتق ونعوض في المعادلة (1.2) ونجد عبارة $K(x)$ ثم عبارة الحل العام y_G .

مثال 1.1.2

إيجاد من أجل $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ حل المعادلة التفاضلية:

$$(\sin x)y' - (\cos x)y = x \quad (2.2)$$

❶ إيجاد الحل المتجانس:

$$\sin(x)y' = \cos(x)y. \quad (3.2)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (4.2)$$

بتكامل طرفي المعادلة (4.2) نجد:

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + c. \quad (5.2)$$

إذاً:

$$y_h = e^{\ln |\sin x| + c} \quad (6.2)$$

نضع: $K = \pm e^c$

إذاً الحل المتجانس هو:

$$y_h = K \sin x, \quad K \in \mathbb{R} \quad (7.2)$$

❷ إيجاد الحل الخاص y_p :

باستعمال تغيير الثابت نضع:

$$y_p = k(x) \sin x \quad (8.2)$$

بالاشتقاق نجد:

$$y_p' = k'(x) \sin x + k(x) \cos x \quad (9.2)$$

بتعويض المعادلتين (8.2) و (9.2) في المعادلة (2.2) نجد:

$$k'(x) \sin^2 x = x \quad (10.2)$$

أي أن:

$$k'(x) = \frac{x}{\sin^2 x} \quad (11.2)$$

باستعمال التكامل بالتجزئة، نجد:

$$k(x) = \frac{x}{\tan x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad (12.2)$$

إذا

$$k(x) = \frac{x}{\tan x} + \ln |\sin x| + c \quad (13.2)$$

ومنه:

$$y_p = -x \cos x + \sin x \ln |\sin x| + c, x \in]0, \frac{\pi}{2}[, c \in \mathbb{R}.$$

2.1.2 طريقة المعامل التكامل لحل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى :

لحل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى (1.2) يمكننا إستخدام الصيغة التالية :

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx + c$$

حيث يتم حساب المعامل التكامل $\mu(x)$ بإستخدام العلاقة :

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

حيث c ثابت التكامل و μ يسمى بمعامل التكامل .

مثال 2.1.2

إيجاد في $\mathbb{R}^*$ حل المعادلة التفاضلية:

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^3 \quad (14.2)$$

لدينا المعادلة خطية في y و منه نضع المعادلة على الصورة العامة :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (15.2)$$

بالقسمة على x نجد :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2 \quad (16.2)$$

بالمطابقة بين المعادلتين (15.2) و (16.2) نجد : $q(x) = x^2$ و $p(x) = \frac{2}{x}$
نحسب المعامل التكامل $\mu(x)$ لدينا :

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx}$$

$$\mu(x) = x^2$$

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx + c = \int x^4dx + c \quad \text{ولدينا:}$$

إذا:

$$x^2y = \int x^4dx + c$$

ومنه حل المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى هو :

$$c \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}_+^*. \text{ حيث } y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{c}{x^2}$$

2.2 معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين :

تعريف 1.2.2:

تعرف المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرين منفصلين على النحو التالي:

$$g(y)y' = f(x) \quad (17.2)$$

حيث f و g دالتان مستمرتان على مجالين حقيقيين I و J على التوالي.

3.2 كيفية حل معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين:

لحل المعادلة (17.2)، نعيد كتابتها على الشكل التالي :

$$g(y)dy = f(x)dx$$

بعد ذلك، نقوم بتكامل الطرفين :

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

وبتطبيق قاعدة التكامل، نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

حيث c ثابت حقيقي إختياري.

مثال 1.3.2

إيجاد حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = 1 + y^2 \quad (18.2)$$

نفصل المتغيران على النحو التالي :

$$\frac{1}{1+y^2}dy = dx \quad (19.2)$$

بأخذ الدوال الأصلية لكل طرف نجد:

$$\arctg y = x + c; \quad c \in \mathbb{R} \quad (20.2)$$

و منه نجد الحل العام :

$$y = \tan(x + c); \quad x + c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

حيث c ثابت حقيقي إختياري.

مثال 2.3.2

إيجاد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = \frac{x^3}{y^2} \quad (21.2)$$

نفصل المتغيران على النحو التالي:

$$y^2 dy = x^3 dx \quad (22.2)$$

بتكامل الطرفين نجد:

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^4}{4} + c \quad (23.2)$$

حيث: $c \in \mathbb{R}$

و منه نجد الحل العام :

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{4}x^4 + 3c} ; c \in \mathbb{R}$$

حيث : c ثابت حقيقي اختياري.

4.2 معادلة تفاضلية متجانسة :

تعريف 1.4.2:

نسمي المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى متجانسة إذا أمكن كتابتها على الشكل :

$$y' = f(x, y) \quad (24.2)$$

بحيث تكون الدالة f متجانسة من الدرجة n ، أي أنها تحقق العلاقة التالية:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

أمثلة 1.4.2

1. نعتبر الدالة الموالية:

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$$

ومنه $f(x, y)$ متجانسة من الدرجة 2.

2. لنختبر تجانس الدالة التالية:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x + y}}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\sqrt{\lambda x - \lambda y}}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\frac{3}{2}} f(x, y)$$

$f(x, y)$ دالة متجانسة من الدرجة $\frac{3}{2}$.

يمكن للمعادلة المتجانسة أن تكتب بالصورة العامة:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (25.2)$$

5.2 كيفية حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى :

لإيجاد حل معادلة من الشكل:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0. \quad (26.2)$$

نضع تغير المتغير:

$$v = \frac{y}{x} \quad (27.2)$$

و بالتالي :

$$y = vx \quad (28.2)$$

بإشتقاق (28.2) نجد:

$$y' = v + xv' \quad (29.2)$$

بتعويض (29.2) في المعادلة (26.2) نجد:

$$v' = \frac{f(v) - v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x} \quad (30.2)$$

ومنه نجد :

$$\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x} \quad (31.2)$$

مثال 1.5.2

إيجاد حل المعادلة التفاضلية :

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0, \quad (32.2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy} \Rightarrow y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad (33.2)$$

باستعمال طريقة تغير المتغير $v = \frac{y}{x}$ نجد :

$$f(v) = \frac{1}{v} + v \quad (34.2)$$

إذا:

$$\int \frac{dv}{f(v)-v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int v dv = \int \frac{dx}{x} \quad (35.2)$$

و منه نجد حل المعادلة التفاضلية:

$$v = \sqrt{2 \ln|x| + 2c} \quad (36.2)$$

بتعويض v نجد:

$$\frac{y}{x} = \sqrt{2 \ln|x| + 2c} \quad (37.2)$$

$$y = x \sqrt{2 \ln|x| + 2c}, x \in \mathbb{R}^*.$$

حيث c ثابت.

6.2 معادلات تفاضلية تؤول إلى خطية :

1.6.2 معادلة برنولي:

تعريف 1.6.2:

إن معادلة برنولي هي الحالة العامة من المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى لها شكل خاص جداً يميزها عن باقي المعادلات التفاضلية ولنبدأ بالشكل العام لمعادلة برنولي وهو على الصورة التالية:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

حيث n عدد طبيعي يختلف عن 0 و 1، هذه المعادلة تؤول إلى معادلة خطية، لحل هذه المعادلة

$$u = \frac{1}{y^{n-1}}$$

مثال 1.6.2

إيجاد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' \cos x + y \sin x = -y^3 \quad (38.2)$$

هذه المعادلة (38.2) هي معادلة برنولي بحيث $n = 3$ بالقسمة على $-y^3$ نجد:

$$-y' y^{-3} \cos x - y^{-2} \sin x = 1 \quad (39.2)$$

نضع:

$$z = y^{-2} \quad (40.2)$$

بإشتقاق z نجد :

$$z' = -2y' y^{-3} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2y^{-3}} z' \quad (41.2)$$

ومنه بتعويض (40.2) ، (6.3) في المعادلة (39.2) والضرب في (-2) نجد :

$$z' \cos x - 2z \sin x = 2 \quad (42.2)$$

❶ إيجاد حل المعادلة المتجانسة :

$$z' \cos x - 2z \sin x = 0 \quad (43.2)$$

بفصل المتغيرات و من أجل $x \neq \frac{\pi}{2}$ نجد:

$$\int \frac{z'}{z} = 2 \int \frac{\sin x}{\cos x} \quad (44.2)$$

إذاً :

$$\ln |z| = -2 \ln |\cos x| + c \quad (45.2)$$

ومنه :

$$k = \pm e^c, \quad z_h = \frac{k}{\cos^2 x} \quad (46.2)$$

② إيجاد الحل الخاص بطريقة تغيير الثابت :

$$z_p = \frac{k(x)}{\cos^2 x} \quad (47.2)$$

بإشتقاق المعادلة (47.2) نجد :

$$z'_p = \frac{k'(x) \cos x + 2 \sin x k(x)}{\cos^3 x} \quad (48.2)$$

بتعويض (47.2) و (48.2) في (42.2)

$$z_G = 2 \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{K}{\cos^2 x}$$

وبالتالي حل المعادلة (38.2) هو :

$$y = \left(2 \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{K}{\cos^2 x} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

مثال 2.6.2

إيجاد من أجل $x \neq 0$ حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 y^5 \quad (49.2)$$

هذه المعادلة (49.2) هي معادلة برنولي بحيث $n = 5$ بالقسمة على y^5 نجد:

$$y' y^{-5} - \frac{2}{x} y^{-4} = x^2 \quad (50.2)$$

نضع:

$$z = y^{-4} \quad (51.2)$$

بإشتقاق z نجد :

$$z' = -4y' y^{-5} \Rightarrow y' = -\frac{1}{4y^{-5}} z' \quad (52.2)$$

ومنه بتعويض المعادلتين (51.2) و (52.2) في المعادلة (50.2) والضرب في (-4) نجد :

$$z' + \frac{8}{x} z = -4x^2 \quad (53.2)$$

① إيجاد حل المعادلة المتجانسة :

$$z' + \frac{8}{x}z = 0 \quad (54.2)$$

بفصل المتغيرات :

$$\int \frac{dz}{z} = -8 \int \frac{1}{x} dx \quad (55.2)$$

إذاً :

$$\ln |z| = -8 \ln |x| + c \quad (56.2)$$

ومنه :

$$k = \pm e^c, \quad z_h = Kx^{-8} \quad (57.2)$$

② إيجاد الحل الخاص بطريقة تغيير الثابت :

$$z_p = k(x)x^{-8} \quad (58.2)$$

بإشتقاق المعادلة (58.2) نجد :

$$z_p' = k'(x)x^{-8} - 8x^{-9}k(x) \quad (59.2)$$

بتعويض المعادلتين (58.2) و (59.2) في المعادلة (53.2) نجد :

$$k'(x) = -4x^{10} \Rightarrow k(x) = -\frac{4}{11}x^{11} + c \quad (60.2)$$

وبالتالي حل المعادلة (49.2) هو :

$$y = \left(-\frac{4}{11}x^3 + cx^{-8}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

2.6.2 معادلة ريكاتي:

تعريف 2.6.2:

تعرف معادلة ريكاتي على أنها معادلة تفاضلية من الشكل التالي :

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x) \quad (61.2)$$

❖ لإيجاد حل معادلة ريكاتي نميز طريقتين :

❶ الطريقة الأولى نقوم بفرض أن:

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \quad (62.2)$$

حيث y_1 يمثل حلاً خاصاً لمعادلة ريكاتي، بإشتقاق المعادلة (62.2) نجد:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} \quad (63.2)$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية، نحصل على :

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = f(x)(y_1 + \frac{1}{z})^2 + g(x)(y_1 + \frac{1}{z}) + h(x) \quad (64.2)$$

إذاً:

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = f(x)y_1^2 + 2f(x)y_1\frac{1}{z} + f(x)\frac{1}{z^2} + g(x)y_1 + g(x)\frac{1}{z} + h(x) \quad (65.2)$$

وحيث أن y_1 حلاً خاصاً للمعادلة فإن:

$$\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = 2f(x)y_1\frac{1}{z} + f(x)\frac{1}{z^2} + g(x)\frac{1}{z} \quad (66.2)$$

بالضرب في z^2 نحصل على :

$$\frac{dz}{dx} + (2f(x)y_1 + g(x))z = -f(x)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى.

❷ بدلاً من ذلك، يمكننا استخدام التعويض التالي:

$$y = y_1 + z$$

بالتعويض في المعادلة (61.2) نجد:

$$y_1' + z' = f(x)(y_1 + z)^2 + g(x)(y_1 + z) + h(x) \quad (67.2)$$

$$y_1' + z' = (f(x)y_1^2 + g(x)y_1 + h(x)) + f(x)z^2 + (2f(x)y_1 + g(x))z \quad (68.2)$$

لدينا y_1 يمثل حل خاص إذاً :

$$y_1' = f(x)y_1^2 + g(x)y_1 + h(x) \quad (69.2)$$

فإنه :

$$z' = f(x)z^2 + (2f(x)y_1 + g(x))z$$

وهذه المعادلة (معادلة برنولية) حيث : $a = 2$

مثال 3.6.2

إيجاد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' + 3y + y^2 + 2 = 0 \quad (70.2)$$

هذه المعادلة الريكاتية تقبل الدالة الثابتة $y_1 = -1$ حلاً خاصاً .
للحصول على حلها العام نلجأ إلى تغيير المتغير $y = -1 + \frac{1}{z}$ بالإشتقاق وتعويض في معادلة (70.2) نجد:

$$-\frac{z'}{z^2} = -3y - y^2 - 2 \quad (71.2)$$

إذاً:

$$y' = -3(-1 + \frac{1}{z}) - (-1 + \frac{1}{z})^2 - 2 \quad (72.2)$$

وبالتالي :

$$z' - z = 1$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى حلها العام هو :

$$z = Ae^x - 1; A \in \mathbb{R}_+^*$$

نستخلص في النهاية أن الحل العام للمعادلة الريكاتية (70.2) هو :

$$y = -1 + \frac{1}{Ae^x - 1}; x \in \mathbb{R} - \ln(\frac{1}{A})$$

3.6.2 معادلة لاغرانج :

تعريف 3.6.2:

معادلة لاغرانج التفاضلية هي كل معادلة تكتب من الشكل

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \quad (73.2)$$

مثال 4.6.2

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية :

$$y = 2xy' + y'^2 \quad (74.2)$$

نضع $z = y'$ وعليه

$$y = 2xz + z^2 \quad (75.2)$$

بالاشتقاق والتعويض في (74.2) نحد :

$$y' = 2z + 2xz' + 2zz' \quad (76.2)$$

$$z = 2z + 2xz' + 2zz' \Rightarrow -z = 2(x + z)z' \quad (77.2)$$

نميز الحالتين :

① إذا كان $z = 0$ ينتج لدينا : $y = 0$ ② إذا كان $z \neq 0$ ينتج لدينا :

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{2}{z}x - 2$$

هي معادلة خطية من الرتبة الأولى ذات المتغير x حلها هو :

$$x = \frac{k}{z^2} - \frac{2}{3}z, \quad k \in \mathbb{R}^*$$

إذاً الشكل الوسيطى للحل العام هو :

$$\begin{cases} x = \frac{k}{z^2} - \frac{2}{3}z \\ y = \frac{2k}{z} - \frac{4}{3}z^2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}^*$$

7.2 تمارين

التمرين الأول

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$\cos y dx + x \sin y dy = 0, x \in]0, \frac{\pi}{2}[. \quad (1)$$

$$y dx - (e^{x^2} + 4) dy = 0 \quad (2)$$

التمرين الثاني

أوجد من أجل $x \in \mathbb{R}_+^*$ الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$x dy - (y - 2x^3) dx = 0 \quad (1)$$

$$y' = y \tan x + \cos x, x \in]0, \frac{\pi}{2}[. \quad (2)$$

التمرين الثالث

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = 2xy' + (y')^3 \quad (2)$$

التمرين الرابع

نعتبر المعادلة التفاضلية الموالية:

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2} \quad (1)$$

أوجد الحل العام علما أنها تقبل حل خاص $y_1 = \frac{1}{x}$.

8.2 حل بعض التمارين

حل التمرين الأول

أ- المعادلة التفاضلية المعطاة من أجل $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ هي كما يلي:

$$\cos y \, dx + x \sin y \, dy = 0$$

بفصل المتغيرات نجد:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{\sin y}{\cos y} dy$$

بالتكامل نجد:

$$\int \frac{1}{x} dx = - \int \frac{\sin y}{\cos y} dy$$

إذاً:

$$\ln x = \ln \cos y + c$$

ومنه:

$$x = A \cos y$$

حيث: $A = e^c$
وبالتالي الحل العام هو:

$$y = \arccos\left(\frac{x}{A}\right)$$

ب- لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$y dx - (e^{2x} + 4) dy = 0$$

بفصل المتغيرات نجد:

$$\frac{dx}{e^{2x} + 4} = \frac{dy}{y}$$

بالتكامل نجد:

$$-\frac{1}{8} \ln(1 + 4e^{-2x}) = \ln y + c$$

ومنه حل العام للمعادلة هو:

$$y = \frac{e^{-c}}{1 + 4e^{-2x}}$$

حيث: $A = e^{-c}$

حل التمرين الثاني

أ- لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}_+^*$ المعادلة التفاضلية التالية:

$$x dy - (y - 2x^3) dx = 0$$

بما أن:

$$P(x) = -\frac{1}{x}, \quad Q(x) = 2x^2$$

فإن المعادلة يمكن كتابتها على الشكل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x^3}{x}$$

نحسب المعامل التكاملي:

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

بضرب المعادلة في $\mu(x)$ نحصل على:

$$\frac{y}{x} - \int \frac{1}{x} (2x^2) dx = c$$

$$\frac{y}{x} - 2 \int x dx = c$$

ومنه:

$$\frac{y}{x} - x^2 = c$$

إذن، الحل العام هو:

$$y = x(x^2 + c)$$

ب- لدينا:



$$y' = y \tan x + \cos x = 0$$

بما أن:

$$P(x) = -\tan x, \quad Q(x) = \cos x$$

فإن المعامل التكاملي هو:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\tan x dx} = e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{\cos x}$$

بضرب المعادلة في $\mu(x)$ نحصل على:

$$\frac{y}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos x} dx$$

$$\frac{y}{\cos x} = \int dx = x + C$$

ومنه:

$$y = \cos x(x + C)$$

إذن، الحل العام هو:

$$4y \cos x - 2x + \sin 2x = 4c$$

حل التمرين الثالث

أ- إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$xy \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2}$$

لدينا

$$-y^{-3} \frac{dy}{dx} = y^{-3} y^3 e^{-x^2}$$

نفرض أن :

$$Z = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2}$$

$$\frac{dz}{dx} = -2y \Rightarrow z = y^{-2}, \quad \frac{dz}{dx} = -2y \Rightarrow P(x) = 2x, \quad Q(x) = 2e^{-x^2}$$

$$u(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

$$ze^{x^2} - 2 \int e^{x^2} (2e^{-x^2}) dx = c$$

$$\Rightarrow ze^{x^2} - 2x = c \Rightarrow y^{-2}e^{x^2} - 2x = c$$

ب- نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:

$$y = 2xy' + (y')^3$$

بإشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x ، نحصل على:

$$y' = 2xy'' + 2y' + 3(y')^2 y''$$

نفرض أن $y' = Z$: بإشتقاق $y'' = Z'$ ومنه نحصل على:

$$2xz' + z + 3z^2 z' = 0$$

إذا:

$$(2x + 3z^2) \frac{dz}{dx} + z = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dz} + \frac{2}{z}x + -3z = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في x

$$u(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = Z^2$$

ومنه الحل هو:

$$xz^2 + \frac{3}{4}z^4 = c$$

نفرض أن:

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

ونحل المعادلة التالية:

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة، نجد أن:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right)^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{x^2}$$

وبالضرب في $-z^2$ نجد أن:

$$z' + \frac{2}{x}z = -1$$

وهذه معادلة خطية تحل كالتالي:
المعامل التكاملي هو:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{\ln(x^2)} = x^2$$

إذن:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{x^2} \left(\int x^2 \cdot (-1) dx + c \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left[-\frac{x^3}{3} + c \right] \end{aligned}$$

إذن:

$$y = \frac{1}{x} + \left[\frac{-x^2}{\frac{x^3}{3} + c} \right]$$

هو حل المعادلة التفاضلية المعطاة.

الفصل الثالث

المعاملات النفاضية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة

تمهيد

سنتطرق في هذا الفصل إلى مجموعة من التعاريف و المفاهيم حول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية سواء كانت متجانسة أو غير متجانسة بمعاملات ثابتة وأهم الطرق في إيجاد الحل العام.

1.3 مفاهيم عامة حول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية:

1.1.3 تعريف:

تعريف 1.1.3:

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$.
نسمي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية كل معادلة من الشكل:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x), \quad (1.3)$$

حيث f, g, h دوال حقيقية مستمرة على I .
إذا كانت الدالتان f و g ثابتين على I قلنا عن المعادلة (1.3) أنها معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة فنكتب:

$$ay'' + by' + cy = h(x), \quad (2.3)$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية.

إذا كانت الدالة h معدومة على I نقول عنها أنها معادلة تفاضلية متجانسة.

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (3.3)$$

هي المعادلة المتجانسة الملحقه بالمعادلة (2.3) و التي تلعب دورا في حل هذه الأخيرة.

ملاحظة:

إذا كانت $h(x) \neq 0$ فإن المعادلة (1.3) تكون خطية غير متجانسة.



2.1.3 نظرية الوجود و الوحدانية:

إنه لمن المهم قبل البدء في عملية البحث على الحل العام للمعادلة التفاضلية التطرق إلى نظرية الوجود و الوحدانية لهذا الحل. المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية تتضمن المشتقة الثانية لذلك و بصورة عامة نحتاج إلى إجراء عمليتي تكامل لإيجاد الحل فمن الطبيعي توقع إجراء إحتواء على ثابتين عشوائيين. و للحصول على حل وحيد من الضروري تعيين شرطين ابتدائيين، لذلك لتحديد منحنى تكاملي وحيد لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ليس كافي تعيين نقطة يمر بها المنحنى وإنما تعيين ميل المنحنى عند تلك النقطة أيضا تعطي قيمة الحل و قيمة المشتقة عند نقطة معينة x_0 .

نظرية 1.3.1

إذا كانت العوامل $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ دوال مستمرة في مجال مفتوح I فإنه توجد دالة وحيدة فقط $y = \Phi(x)$ حل للمعادلة (1.3) و تحقق الشرطين:

$$y'(x_0) = y_1 \quad y(x_0) = y_0.$$

مثال 1.1.3

من أبرز الأمثلة عن المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية هي المعادلات التفاضلية التي تحكم حركة الكتلة m معلقة بنواس مرنة ثابت مرونته k و معامل الإحتكاك c .

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t).$$

حيث m ، c و k ثوابت معلومة و F دالة معرفة من أجل جميع قيم t .

مثال 2.1.3

حل المعادلة التفاضلية: $y'' + y = 0$ والذي يحقق الشرطين التاليين: $y(0) = 2$ و $y'(0) = 3$ إنه لمن السهولة التحقق من أن $y(x) = 2 \cos x + 3 \sin x$ حل لهذه المعادلة التفاضلية.

3.1.3 المؤثر التفاضلي الخطي:

تعريف 2.1.3:

نعرف المؤثر التفاضلي بأنه يحول الدالة إلى دالة أخرى حيث سنتعرف على الرمز D على أنه المؤثر التفاضلي بالنسبة لـ x ، إذا أثر هذا المؤثر على الدالة $f(x)$ فإن ناتج هذا التأثير يكون المعامل التفاضلي لهذه الدالة أي مشتقاتها $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = D[f(x)]$$

يمكن تعريف المؤثرات التفاضلية من الرتبة الثانية و الثالثة حتى الرتبة n على الشكل:

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, D^3 = \frac{d^3}{dx^3}, \dots, D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

و بالتالي يمكن أن نكتب المعادلة التفاضلية:

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad a \neq 0$$

باستخدام المؤثر التفاضلي D على الشكل:

$$(aD^2 + bD + c)y = f(x), \quad a \neq 0$$

أي:

$$\phi(D)y = f(x).$$

بعض خواص المؤثر التفاضلي :

- ① $D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x)$
- ② $D(\lambda f(x)) = \lambda D(f(x))$
- ③ $F(D)e^{ax} = F(\alpha)e^{ax}$

حيث F كثير حدود في D .

ملاحظة :

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية على الشكل :

$$\phi(D)y = f(x).$$

يطبق هذا المبدأ في حل المعادلات التفاضلية الخطية الغير المتجانسة حيث لا يمكن تطبيقه على المعادلات التفاضلية الغير خطية.

تعريف 3.1.3:

نقول عن الحلين y_1 و y_2 للمعادلة المتجانسة (3.3) أنهما مستقلان خطيا إذا لم تكن نسبتهما ثابتة أي إذا لم يوجد ثابت حقيقي c بحيث $\frac{y_2}{y_1} = c$.

أمثلة 1.1.3

المعادلة $y'' + y = 0$ تقبل الدوال $y_1 = \cos x$ ، $y_2 = -\sin x$ و $y_3 = 3 \cos x$ حلول لها:

① نرى أن النسبة $\frac{y_2}{y_1} = -\tan x$ ليست ثابتة فإن y_1 و y_2 حلا مستقلان خطيا.

② بينما النسبة $\frac{y_1}{y_3} = \frac{1}{3}$ ثابتة فإن y_1 و y_3 حلين ليسا مستقلين خطيا (مرتبطين خطيا).

قضية 1.3.1

إذا كان كل من y_1 و y_2 حلا متجانسان للمعادلة (2.3) فإن:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

حل أيضا للمعادلة (3.3) ويسمى هذا الحل بالحل العام إذا كان y_1 و y_2 مستقلين.

4.1.3 محدد ورونسكي: woronskian

تعريف 4.1.3:

إذا كان y_1 و y_2 دالتين قابلتين للإشتقاق في نطاق تعريفهما فإننا نعرف كمايلي:

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}$$

حيث :

$$w(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

ويسمى هذا بمحدد ورونسكي ويرمز له بالرمز $w(x) = w(y_1, y_2)$.

تعريف 5.1.3:

❖ الحلان y_1, y_2 للمعادلة (3.3) مرتبطان خطيا إذا فقط إذا كان $w(y_1, y_2) = 0$.

❖ الحلان y_1, y_2 للمعادلة (3.3) مستقلان خطيا إذا فقط إذا كان $w(y_1, y_2) \neq 0$.

أمثلة 2.1.3

لنبحث عن إرتباط وإستقلال كل مجموعة من الدوال التالية:

① e^x, e^{-x} .

$$w(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

وبالتالي الدالتان (e^x, e^{-x}) مستقلين خطيا.

② $e^x, 2e^x, x$

$$w(e^x, 2e^x, x) = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x & 2e^x \\ e^x & 2e^x & 1 \\ e^x & 2e^x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ومنه الدوال $(e^x, 2e^x, x)$ مرتبطة خطيا.



قضية 1.3.2

يكون y_1 و y_2 الحلان للمعادلة المتجانسة (3.3) مستقلين خطيا إذا وفقط إذا كان ورونسكيهما معدوما في I .

برهان. باستعمال البرهان بالعكس النقيض أي:

$$w(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 y_2 \text{ مرتبطان خطيا}$$

1. الإستلزام الأول " $\Leftarrow$ " لتكن الدالتين y_1 و y_2 مرتبطتان خطيا إذا يوجد ثابت حقيقي c حيث $y_1 = cy_2$ إذن:

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cy_2 & y_2 \\ cy_2' & y_2' \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

2. الإستلزام الثاني " $\Rightarrow$ " أي نبين:

$$w(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow y_2 y_1 \text{ مرتبطان خطيا}$$

وفعلا لدينا:

$$\square \quad w(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \Rightarrow \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = 0 \Rightarrow y_2 = cy_1, c \in \mathbb{R}$$



2.3 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة:

1.2.3 طريقة المعادلة المميزة

نعود الآن إلى الدراسة العامة للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية بغية الحصول على حلول ذات معاملات ثابتة ونكتب هذه المعادلات على شكل المعادلة (3.3).

للحصول على الحل المتجانس لهذه المعادلة نحاول إيجاد حلين خاصين مستقلين خطياً، نلاحظ أولاً أن هذه المعادلة هي علاقة خطية بين $y(x)$ ومشتقاتها، والدالة التي يمكن أن تحقق مثل هذه العلاقة الخطية هي الدالة الأسية $e^{\lambda x}$.

لكن لقيم خاصة أو مميزة يراد تعيينها للثابت λ ويرجع ذلك لكون الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة التي تناسب جميع مشتقاتها معها ومع بعضها البعض. إذن نفرض حلاً للمعادلة (3.3) على الشكل:

$$y = e^{\lambda x},$$

لدينا:

$$\begin{cases} y' = \lambda e^{\lambda x} \\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة (1.3) نجد:

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0,$$

بما أن $e^{\lambda x} \neq 0$ فإن:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية وتسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية الخطية بمعاملات ثابتة ويمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر التفاضلي D بوضع λ بدلاً من D .

2.3.1 قضية

تكون الدالة $y = e^{\lambda x}$ حل للمعادلة (1.3) إذا وفقط إذا كان λ جذراً للمعادلة المميزة (3.3).



❖ نعلم مما سبق أنه لحل المعادلة المتجانسة (3.3) يكفي أن نجد لها حلين خاصين مستقلين، يظهر الإجراء الموالي إرتباط حل المعادلة (3.3) بمميز معادلتها المميزة.

❖ نحسب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ و نميز 3 حالات :

- ① جذران حقيقيان متساويان إذا كان $\Delta > 0$.
- ② جذران متساويان إذا كان $\Delta = 0$.
- ③ جذران مركبان (مترافقان) إذا كان $\Delta < 0$.

سوف ندرس كل حالة على حدى.

✓ إذا كان $\Delta > 0$:

أي أن $\lambda_2 \neq \lambda_1$ حيث:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

في هذه الحالة يمكن إثبات أن $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ و $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ دوال مستقلة وعلى ذلك هما الحلان الأساسيان للمعادلة التفاضلية (3.3):

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0$$

إذن الحلان مستقلان خطيا ويصبح الحل المتجانس في هذه الحالة هو:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان.

مثال 1.2.3

لنقم بحل المعادلة التالية:

$$y'' - 5y' + 6 = 0,$$

هذه المعادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية نضع:

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0,$$

نفرض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة فإن المعادلة المميزة هي:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

ومنه:

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

أي أن:

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_1 = 2$$

إذن الحل المتجانس يكون على الشكل:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

✓ إذا كان $\Delta = 0$:

أي أن $\lambda_2 = \lambda_1$ حيث:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-b}{2a}$$

و عليه يكون أحد الحلول هو $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ويكون المطلوب الآن إيجاد الحل الثاني بحيث يكون مستقل خطيا عن y_1 :

$$w(y_1, y_2, x) = e^{-\int \frac{b}{a} dx} = e^{\frac{-b}{a} x}$$

ومنه:

$$y_2 = y_1 \int \frac{w}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{e^{\frac{-bx}{a}}}{e^{\frac{-bx}{a}}} dx = y_1 \int dx = x y_1(x)$$

إذن:

$$y_2 = x e^{\lambda_1 x}$$

و على ذلك يكون الحل المتجانس بالشكل:

$$f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta, \text{ نعرف الدالة:}$$

بالتفاضل بالنسبة لـ θ نجد:

$$\frac{df}{d\theta} = -\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + \sin \theta),$$

ومنه:

$$\frac{df}{d\theta} = i f(\theta),$$

إذن:

$$\frac{df}{f(\theta)} = i d\theta,$$

بإجراء تكامل الطرفين نجد:

$$\ln f(\theta) = i\theta + c \quad c \in \mathbb{R},$$



نعلم أن $f(0) = 1$ إذن $c = 0$ ومنه:

$$\ln f(\theta) = i\theta,$$

إذن:

$$f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta},$$

والعلاقة الأخيرة تسمى بصيغة أولر و على ذلك نجد:

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta},$$

$$\cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta},$$

بجمع و طرح المعادلتين الأخيرتين يصبح لدينا:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

ومنه الحلان للمعادلة التفاضلية هما:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

وهما مستقلان خطيا وعليه:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

بتعويض قيمتي y_1 و y_2 نجد:

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} ((c_1 + c_2) \cos \beta x + i(c_1 - c_2) \sin \beta x),$$

نعتبر $A = c_1 + c_2$ و $B = (c_1 - c_2)i$ وعلى ذلك يكون الحل المتجانس للمعادلة بالشكل:
حيث A و B عددان مركبان.

مثال 2.2.3

لنبحث عن حل للمعادلة التالية:

$$y'' - 4y' + 13 = 0$$

نضع:

$$(D^2 - 4D + 13)y = 0,$$

نفرض أن $y = e^{\lambda x}$ حل للمعادلة فان المعادلة المميزة هي:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

تقبل جذران مركبان مترافقان:

$$\lambda_1 = 2 + 3i \quad \lambda_2 = 2 - 3i$$

إذن الحل المتجانس يكون على الشكل:

$$y(x) = e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x) \quad A, B \in \mathbb{C}$$

تعريف 1.2.3:

الحل العام y_G للمعادلة هو مجموع الحل المتجانس y_h و الحل الخاص y_p حيث:

$$y_G = y_h + y_p$$

ملاحظة :

البحث عن الحل الخاص هو في العموم العائق الأساسي لدى هذا النمط من المعادلات، سنعرض أهم الطرق التي تعطي حلا خاصا.

2.2.3 طريقة تغيير الثابتين

تستخدم هذه الطريقة بصفة عامة لإيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية وذلك بمعلومية حل المعادلة المتجانسة y_h بحيث أننا نعتبر الثوابت الاختيارية دوال في المتغير x .
نفرض أن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (4.3)$$

حيث a_1 و a_2 ثابتان و $f(x)$ دالة ذات المتغير المستقل x .
وتكون المعادلة المتجانسة:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

نفرض حل المعادلة المتجانسة على الشكل:

$$y_h = Ay_1 + By_2 \quad A, B \in \mathbb{R},$$

لإيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة (4.3) نعتبر أن كل من A و B دوال للمتغير x ويكون الحل الخاص من الشكل:

$$y_p = A(x)y_1 + B(x)y_2,$$

نقوم بإشتقاق عبارة الحل الخاص فنحصل على:

$$y_p' = Ay_1' + A'y_1 + By_2' + B'y_2,$$

نفرض أن:

$$A'y_1 + B'y_2 = 0,$$

وعليه يكون:

$$y_p' = Ay_1' + By_2',$$

بإشتقاق طرفي هذه المساواة نجد:

$$y_p'' = A'y_1' + Ay_1'' + B'y_2' + By_2'',$$

وبتعويض كل من y_p و y_p' و y_p'' في المعادلة التفاضلية (4.3) نجد:

$$A(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + B(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + (A'y_1' + B'y_2') = f(x),$$

حيث أن كل من y_1 و y_2 حلين للمعادلة المتجانسة فيصبح لدينا:

$$A'y_1' + B'y_2' = f(x).$$

هكذا تسمح الجملة الجبرية:

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1 + B'y_2' = f(x) \end{cases}$$

بإيجاد A' و B' و بمكاملتهما نصل إلى عبارتي A و B و بالتالي نحصل على الحل الخاص وبذلك يمكن إيجاد الحل العام $y_G = y_h + y_p$ للمعادلة (4.3).

ملاحظة:

تستخدم هذه الطريقة بصفة خاصة إذا كانت الدالة $f(x)$ على إحدى الصور:

$$\frac{e^x}{x}, \sec x, \cot x, \tan x, \ln x, \sin^{-1} x, \dots$$

أمثلة 1.2.3

نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

أولا : لنجد الحل المتجانس:
المعادلة المتجانسة هي:

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0,$$

باستخدام المعادلة المميزة نحصل على:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

فيكون حل المعادلة المتجانسة:

$$y_h = Ae^{3x} + Bxe^{3x} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

ثانيا : لنجد الحل الخاص:

نفرض أن الحل الخاص على الشكل:

$$y_p = A(x)e^{3x} + xB(x)e^{3x},$$

حيث $A(x)$ و $B(x)$ دالتين في x .
بالاشتقاق بالنسبة ل x نجد:

$$y_p' = 3Ae^{3x} + A'e^{3x} + B'xe^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x},$$

نفرض أن:

$$A'e^{3x} + B'xe^{3x} = 0, \quad (5.3)$$

من هذا نجد:



$$y_p' = 3Ae^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x},$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة لـ x نحصل على:

$$y_p'' = 9Ae^{3x} + 3A'e^{3x} + 3Be^{3x} + B'e^{3x} + 3B'xe^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bxe^{3x},$$

بتعويض كل من y_p و y_p' و y_p'' في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد:

$$3A'e^{3x} + B'(1 + 3x)e^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2},$$

أي أن:

$$3A' + B'(1 + 3x) = \frac{1}{x^2}, \quad (6.3)$$

بحل المعادلتين (5.3) و (6.3) نجد أن:

$$A' = \frac{-1}{x} \quad B' = \frac{1}{x^2}$$

وبالتكامل نجد:

$$A = -\ln x \quad B' = \frac{-1}{x}$$

وبذلك يكون:

$$y_p = -e^{3x} \ln x - \frac{1}{x} x e^{3x},$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو:

$$y_G = Ae^{3x} + Bxe^{3x} - e^{3x} \ln x - e^{3x} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3.2.3 طريقة المؤثر العكسي

إذا كان المؤثر التفاضلي D يعرف على أنه عملية تفاضلية للدالة التي يؤثر عليها فإن المؤثر التفاضلي العكسي يمثل عملية تكامل ويرمز له بـ D^{-1} حيث يعرف أنه المؤثر العكسي للمؤثر التفاضلي D .

تعتمد هذه الطريقة على إيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية أي الحل الخاص يعتمد على الدالة $f(x)$ وبصورة عامة فإن المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها على الشكل:

$$(aD^2 + bD + c)y_p = f(x)$$

بحيث a و b و c أعداد ثابتة و $a \neq 0$.
أي أن:

$$\phi(D)y_p = f(x) \Rightarrow y_p = \frac{1}{\phi(D)}f(x).$$



ملاحظة: إذا كان D مؤثر تفاضلي فإن D^{-1} مؤثر تكاملي أي أن $\frac{1}{D}$ تعني تكامل مرة واحدة و $\frac{1}{D^2}$ تكامل مرتين وهكذا.

بعض الصيغ لإيجاد الحل الخاص :

سوف ندرس استخدام التأثير العكسي $\frac{1}{\phi(D)}$ على الدالة $f(x)$ في صور مختلفة، ونعطي بعض الصيغ.

❖ إذا كان $f(x) = e^{ax}$:

نعلم أن:

$$\phi(D)e^{ax} = \phi(a)e^{ax}$$

أي:

$$\frac{1}{\phi(D)}\phi(D)e^{ax} = \frac{1}{\phi(D)}\phi(a)e^{ax},$$

إذن:

$$e^{ax} = \frac{1}{\phi(D)}\phi(a)e^{ax},$$

✓ إذا كان $\phi(a) \neq 0$ فإن:

$$\frac{1}{\phi(D)}e^{ax} = \frac{1}{\phi(a)}e^{ax}$$

✓ إذا كان $\phi(a) = 0$:

$$\frac{1}{\phi(D)}e^{ax} = e^{ax} \frac{1}{\phi(D+a)} \{1\}.$$

❖ إذا كان $f(x) = k$:

حيث k مقدار ثابت نميز حالتين:

① إذا كان $\phi(0) \neq 0$ فإنه:

$$\frac{1}{\phi(D)}k = \frac{1}{\phi(D)}ke^{0x} = \frac{1}{\phi(0)}k,$$

إذن:

$$\frac{1}{\phi(D)}k = \frac{1}{\phi(0)}k.$$

لنوضح هذه الأخيرة في مثال: $\phi(D) = D^3 - 3D^2 + 2D + 5$

$$\text{ومنه: } \frac{1}{\phi(D)}k = \frac{1}{\phi(0)}k = \frac{k}{5}$$



② إذا كان $\phi(0) = 0$ فإنه يتم حسابه كما يلي:
من جل $\phi(D) = D^3 - 2D^2 + 6D$ نجد:

$$\frac{1}{\phi(D)}k = \frac{k}{D^3 - 2D^2 + 6D} = \frac{1}{D} \frac{1}{D^2 - 2D + 6}k = \frac{1}{D} \frac{k}{6} = \frac{k}{6}x$$

❖ إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة n حيث $n > 0$ فإن $\phi(D)$ تأخذ إحدى الأشكال:

$$(1 + D), (1 - D), (1 + D)^2, \dots$$

$$\frac{1}{1 + D}f(x) = [1 - D + D^2 + \dots + (-1)^n D^n]f(x)$$

$$\frac{1}{1 - D}f(x) = [1 + D + D^2 + \dots + D^n]f(x)$$

$$\frac{1}{(1 - D)^2}f(x) = [1 + 2D + 3D^2 + \dots + (n + 1)D^n]f(x)$$

أو تتبع القسمة المطولة لإيجاد $\frac{1}{\phi(D)}$.

❖ إذا كان $f(x) = e^{ax}v(x)$:

نعلم أن:

$$D[e^{ax}v(x)] = e^{ax}Dv(x) + ae^{ax}v(x) = e^{ax}(D + a)v(x),$$

ومنه:

$$\frac{1}{\phi(D)}e^{ax}v(x) = e^{ax} \frac{1}{\phi(D + a)}v(x). \quad (7.3)$$

❖ إذا كان $f(x) = \begin{cases} \sin(ax + \beta) \\ \cos(ax + \beta) \end{cases}$

نعلم أن:

$$D(\sin(ax + \beta)) = a\cos(ax + \beta),$$

إذن:

$$D^2(\sin(ax + \beta)) = -a^2\sin(ax + \beta),$$

وبالمثل نجد:

$$D^2\cos(ax + \beta) = -a^2\cos(ax + \beta).$$

✓ إذا كان $\phi(-a^2) \neq 0$:

فإن:



$$\frac{1}{\phi(D^2)} \begin{cases} \sin(ax + \beta) \\ \cos(ax + \beta) \end{cases} = \frac{1}{\phi(-a^2)} \begin{cases} \sin(ax + \beta) \\ \cos(ax + \beta) \end{cases}$$

✓ إذا كان $\phi(-a^2) = 0$:

فإننا نستخدم التعويض بأخذ $v(x) = 1$ في العلاقة (7.3):

$$\sin(ax + \beta) = \text{Im}(e^{iax+\beta})$$

$$\cos(ax + \beta) = \text{Re}(e^{iax+\beta})$$

وبأخذ $f(x) = \sin(ax + \beta)$ نجد:

$$\frac{1}{\phi(D^2)} \sin(ax + \beta) = \text{Im} \frac{1}{\phi(D)^2} e^{iax} = \text{Im} e^{iax} \frac{1}{\phi(D + ia)^2}.$$

❖ إذا كان $f(x) = \begin{cases} \sinh(ax + \beta) \\ \cosh(ax + \beta) \end{cases}$:

$$\frac{1}{\phi(D^2)} \begin{cases} \sinh(ax + \beta) \\ \cosh(ax + \beta) \end{cases} = \frac{1}{\phi(a^2)} \begin{cases} \sinh(ax + \beta) \\ \cosh(ax + \beta) \end{cases}$$

حيث $\phi(a^2) \neq 0$.

أمثلة 2.2.3

① مثال:

لنجد حل المعادلة التالية:

$$(D^2 + 4D + 3)y = 8xe^x - 6$$

أولا : لنجد الحل المتجانس:
المعادلة المتجانسة هي:

$$(D^2 + 4D + 3)y = 0,$$

باستخدام المعادلة المميزة نحصل على:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0,$$

ومنه:

$$(\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3.$$

ومنه الحل المتجانس هو:

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ثانيا : لنجد الحل الخاص:



$$y_p(x) = \frac{1}{(D+1)(D+3)} [8xe^x - 6],$$

ومنه:

$$y_p(x) = 8e^x \frac{1}{(D+2)(D+4)} x - \frac{1}{(D+1)(D+3)} 6,$$

$$y_p(x) = 8e^x \frac{1}{8(\frac{D}{2}+1)(\frac{D}{4}+1)} x - \frac{1}{3} 6,$$

$$y_p(x) = e^x (1 - \frac{D}{2})(1 - \frac{D}{4}) x - 2,$$

$$y_p(x) = e^x (1 - \frac{D}{2})(x - \frac{D}{4}) - 2 = e^x \left[x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] - 2,$$

إذن:

$$y_p(x) = \frac{1}{4} e^x (4x - 3) + 2,$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة هو:

$$y_G(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x (4x - 3) + 2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

② مثال:

لنجد حل المعادلة التالية:

$$(D^4 - 1)y = 10 \cos x \cosh x$$

أولا : لنجد الحل المتجانس:
المعادلة المتجانسة هي:

$$(D^4 - 1)y = 0$$

باستعمال المعادلة المميزة نجد:

$$\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = i \\ \lambda_4 = -i \end{cases}$$

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

ثانيا : لنجد الحل الخاص:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^4 - 1} (10 \cos x \cosh x),$$

$$y_p(x) = \operatorname{Re} \frac{10}{(D^2 - 1)(D^2 + 1)} (e^{ix} \frac{e^x + e^{-x}}{2}),$$



$$y_p(x) = 5\operatorname{Re} \frac{1}{(D^2 - 1)(D^2 + 1)} (e^{(1+i)x} + e^{(i-1)x}),$$

$$y_p(x) = 5\operatorname{Re} \left[\frac{e^{(1+i)x}}{((1+i)^2 - 1)((1+i)^2 + 1)} + \frac{e^{(i-1)x}}{((i-1)^2 - 1)((i-1)^2 + 1)} \right],$$

$$y_p(x) = 5\operatorname{Re} \left[\frac{e^{(1+i)x}}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{e^{(i-1)x}}{(-2i-1)(-2i+1)} \right],$$

$$y_p(x) = 5\operatorname{Re} \left[\frac{e^{(1+i)x}}{-5} + \frac{e^{(i-1)x}}{-5} \right] = -\operatorname{Re}(e^x + e^{-x})e^{ix},$$

$$y_p(x) = -\operatorname{Re} 2\cosh x (\cos x + \sin x),$$

وبالتالي يكون الحل الخاص:

$$y_p(x) = -2\cosh x \cos x,$$

إذن نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y_G = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - 2\cosh x \cos x \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

3.3 تمارين

التمرين الأول

أوجد حلول المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' + 2y' - 3y = 42e^{4x}. \quad (1)$$

$$(D - 1)(D + 1)y = -2e^x. \quad (2)$$

التمرين الثاني

أوجد حل مسألة القيم الابتدائية.

$$(D - 2)y = 3(x + 1)e^x. \quad (1)$$

$$y(0) = \frac{-11}{4}, y'(0) = \frac{1}{4}.$$

التمرين الثالث

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

$$(D^3 - D^2)y = 2\cos x. \quad (1)$$

$$y'' - y' + 5y = \sin 2x. \quad (2)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 2x. \quad (3)$$

- استنتج حلول المعادلة:

$$(D^2 + 4)y = \cos 2x. \quad (4)$$

التمرين الرابع

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

$$(D^4 - 8D^2 - 9)y = 50\sinh 2x. \quad (1)$$

$$(D^4 - 1)y = 10\cos x \cdot \cosh x. \quad (2)$$

التمرين الخامس

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

$$D^2(D^2 + 4)y = 96x. \quad (1)$$

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 50(e^x + \cos 3x). \quad (2)$$

$$y'' - 5y' + 6y = 100\sin 4x. \quad (3)$$

الفصل الرابع

المعاملات تخرج من الرتبة 2 بمعاملات منغبرة

تمهيد

سندرس في هذا الفصل أهم الطرق لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات متغيرة، مع شرح مفصل للخطوات والتقنيات المستخدمة في كل طريقة.

1.4 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات متغيرة:

نعرف المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة على الشكل التالي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x)$$

حيث $p(x)$, $q(x)$ و $f(x)$ دوال مستمرة على المجال I .

وهذه المعادلة تكون متجانسة إذا كانت $f(x) = 0$ أما إذا كانت $f(x) \neq 0$ فإنها تكون غير متجانسة.

هناك العديد من الطرق لحل هذه المعادلة نسعى في سبيل حلها إلى إرجاعها إلى قالب معادلة تفاضلية بمعاملاتها ثابتة، وسوف نعرض بعض الطرق في هذا الصدد.

2.4 طريقة أولير:

معادلة أولير التفاضلية من الرتبة الثانية تأخذ على الشكل:

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = f(x) \quad (1.4)$$

ويمكن كتابتها على الشكل:

$$(a_2x^2D^2 + a_1xD + a_0)y = f(x) \quad (2.4)$$

حيث a_0, a_1, a_2 أعداد حقيقية غير معدومة.

ولإيجاد حلول المعادلة (1.4) نستعمل التعويض:

$$x = e^t \text{ أي } t = \ln x$$

وهذا التعويض يحول المعادلة (1.4) إلى معادلة ذات معاملات ثابتة. نفرض أن:

$$D = \frac{d}{dx} \text{ و } \theta = \frac{d}{dt}$$

لذلك نجد:

$$Dy = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \Rightarrow x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt},$$

ومنه فإن:

$$xD = \theta \quad (3.4)$$

وأيضاً:

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dt} \frac{dt}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{-1}{x^2} \right) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dt} \right),$$

$$D^2 = \frac{-1}{x^2} \frac{d}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) \frac{dt}{dx},$$

وبذلك نجد:

$$D^2 = \frac{-1}{x^2} \theta + \frac{1}{x^2} \theta^2,$$

أي أن:

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1), \quad (4.4)$$

بنفس الطريقة نجد:

$$x^n D^n = \theta(\theta - 1)(\theta - 2) \dots (\theta - n + 1),$$

و بتعويض العلاقات (3.4) و (4.4) في المعادلة (1.4) نجد:

$$a_2 \theta(\theta - 1)y + a_1 \theta y + a_0 y = f(e^t),$$

أي:

$$(a_2 \theta^2 + (a_1 - a_2)\theta + a_0)y = f(e^t),$$

ومنه المعادلة (1.4) تكافئ المعادلة:

$$(a_2 \theta^2 + (a_1 - a_2)\theta + a_0)y = f(e^t).$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية غير متجانسة بمعاملات ثابتة ذات المتغير t .

مثال 1.2.4

إيجاد حلول المعادلة التفاضلية التالية

$$(x^2 D^2 + 2xD + 2)y = 4x^2 \quad (5.4)$$

لحل هذه المعادلة نقوم بتعويض

$$x = e^t$$

ونفرض أن

$$\theta = \frac{d}{dt}$$

و منه

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض في المعادلة (5.4) نجد

$$(\theta(\theta - 1) - 2\theta + 2)y = 4e^{3t} \quad (6.4)$$

أي

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 4e^{3t} \quad (7.4)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة وإيجاد حلولها يؤول إلى تتبع المراحل الموالية
1- حل المعادلة المتجانسة

$$(\theta^2 - 3\theta + 2) = 0$$

المعادلة المميزة لها

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

جذورها هما

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$$

و منه

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2- إيجاد الحل الخاص y_p
المعادلة (7.4) من الشكل

$$\phi(\theta)y = ae^{3t}, \quad \phi(\theta) = \theta^2 - 3\theta + 2$$

إذن

$$y_p = \frac{1}{\phi(\theta)} 4e^{3t} = \frac{4}{\phi(3)} e^{3t}$$

ومنه

$$y_p = 2e^{3t}$$

3- الحل العام للمعادلة (7.4)

$$y_g = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 2e^{3t}$$

ونستنتج أن الحل العام للمعادلة (5.4) هو

$$y_g = c_1 x + c_2 x + 2x^3 \quad c_1; c_2 \in \mathbb{R}$$

لاغرونج

3.4 طريقة

هذه المعادلة تأخذ صورة عامة لمعادلة أولير التفاضلية السابقة وهي على الشكل:

$$F[(ax + b)D]y = f(x), \quad (8.4)$$

حيث a, b ثوابت حقيقية و F دالة كثير حدود ذات المتغير $(ax + b)D$ و D هو المؤثر التفاضلي.

و على الصورة الخطية تأخذ الشكل الآتي :

$$(ax + b)^2 y'' + A(ax + b)y' + By = f(x), \quad (9.4)$$

حيث A, B, a, b ثوابت حقيقية.

ولحل معادلة لاغرونج التفاضلية السابقة فإننا نستخدم التعويض: $z = ax + b = e^t$ و $t = \ln z$ فتتحول معادلة لاغرونج إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة نحلها كما سبق دراسته و سنرى ذلك بشكل أوضح في المثال .

ملاحظة :

عند أخذ $a = 1$ و $b = 0$ فإن معادلة لاغرونج تتحول إلى معادلة أولير.

مثال 1.3.4

إيجاد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(x + 2)^2 y'' + (x + 2)y' - y = x \quad (10.4)$$

باستخدام التعويض $Z = x + 2$ أي $x = Z - 2$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dZ} \text{ و } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dZ^2}$$

و عليه تصبح المعادلة (10.4) على النحو :

$$Z^2 y'' + Z y' - y = Z - 2 \quad (11.4)$$

و المعادلة (11.4) هي معادلة أولير التفاضلية

باستخدام التعويض $z = e^t$ و بوضع $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$(\theta(\theta - 1) + \theta - 1)y = e^t - 2 \quad (12.4)$$

و منه

$$(\theta^2 - 1)y = e^t - 2 \quad (13.4)$$

وهذه المعادلة الاخيرة هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة

وإيجاد حلولها يؤول إلى المراحل الآتية :

أولا : الحل المتجانس y_h المعادلة المتجانسة هي :

$$(\theta^2 - 1)y = 0$$

المعادلة المميزة لها:

$$r^2 - 1 = 0 \implies r = \pm 1$$

إذن الحل المتجانس:

$$y_h = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

ثانيا : الحل الخاص y_p المعادلة (13.4) من الشكل :

$$\phi(\theta)y = e^t - 2$$

حيث :

$$\phi(\theta) = \theta^2 - 1$$

إذن

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\phi(\theta)}(e^t - 2) \\ &= \frac{1}{\theta^2 - 1}(e^t) - \frac{1}{\theta^2 - 1}(2) \\ &= \frac{e^t}{(\theta + 1)^2 - 1}(1) - \frac{1}{\theta^2 - 1}(2) \\ &= \frac{e^t}{\theta^2 + 2\theta}(1) + (1 + \theta^2 + \dots)(2) \\ &= \frac{e^t}{2} \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)(1) + 2 \\ &= \frac{e^t}{2} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2} + \dots\right)(1) + 2 \\ y_p &= \frac{e^t}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right) + 2 \end{aligned}$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة (10.4) هو :

$$y_G = C_1(x + 2) + C_2(x + 2)^{-1} + \frac{x+2}{2}(\ln(x + 2) - \frac{1}{2}) + 2$$

حيث C_1 و C_2 عددان حقيقيان .

4.4 طريقة البرامترات (تغير الثابت أو الوسائط):

تتماز طريقة لاغرونج لتغيير البرامترات بعموميتها حيث تسرى على جميع أنواع المعادلات

الدالة $f(x)$ لكن ما يُعيب طريقة لاغرونج:

- (1) كثرة المشتقات خصوصا في حالة عُلُو رتبة المعادلة التفاضلية.
- (2) إعتماؤها على معرفة الحل المتجانس والذي قد يكون متعذرا في حالة المعاملات المتغيرة.
- (3) تضمُّنها تكاملات قد يتعذر الحصول عليها.

نظرية 4.4.1

إذا كانت الدوال $q(x)$, $p(x)$ و $f(x)$ دوال مستمرة على المجال I وإذا كانت الدالتان y_1 و y_2 حلان مستقلتان خطيا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة الملحقة بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

إذن الحل الخاص لهذه المعادلة يعطى بالعلاقة:

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{-y_2(x)}{w(y_1(x), y_2(x))} f(x) dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)}{w(y_1(x), y_2(x))} f(x) dx$$

لنعتبر المعادلة:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \quad (14.4)$$

إذا علمنا أن حلا المعادلة المتجانسة:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

هما $y_1(x)$ و $y_2(x)$.

الحل المتجانس:

$$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

حيث $y_1(x)$ و $y_2(x)$ حلان مستقلان.

الحل الخاص:

لإيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة (14.4) فإننا نعتبر كل من C_1 و C_2 دوال ذات المتغير x , ويكون الحل الخاص هو:

$$y_p = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

نقوم بالإشتقاق بالنسبة لـ x فنجد:

$$y_p' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x)$$

حيث:

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0$$

إذن:

$$y_p' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)$$

نقوم بالاشتقاق بالنسبة لـ x فنجد:

$$y_p'' = C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x)$$

نعوض كل من y_p' ، y_p و y_p'' في المعادلة (1) فنجد:

$$\begin{aligned} & C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x) + \\ & + f(x) [C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)] + \\ & + g(x) [C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)] \\ & = h(x) \end{aligned}$$

بما أن y_1 و y_2 حلان للمعادلة المتجانسة:

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = h(x)$$

ينتج:

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \dots (2) \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x) \dots (3) \end{cases}$$

من (2) لدينا :

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0$$

ومنه:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)}{y_1(x)} C_2'(x) \dots (4)$$

نعوض (4) في (3) :

$$-\frac{y_1(x)}{y_2(x)} C_2'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = h(x)$$

اي:

$$\frac{y_2'(x)y_1(x) - y_2(x)y_1'(x)}{y_1(x)} C_2'(x) = h(x)$$

نجد:

$$C_2'(x) = \frac{y_1(x)h(x)}{y_2'(x)y_1(x) - y_2(x)y_1'(x)}$$

و نعلم ان : تعريف الرونسكيان لزوج من الدوال y_1, y_2 $W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ $y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ منه:

$$C_2'(x) = \frac{y_1(x)h(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \dots (5)$$

اذن:

$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x)h(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

نعوض (5) في (4) نجد :

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)}{y_1(x)} C_2'(x)$$

نجد:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \cdot \frac{y_1(x)h(x)}{W(y_1, y_2)(x)}$$

و منه :

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)h(x)}{W(y_1, y_2)(x)}$$

اذن:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)h(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

مثال 1.4.4

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(2x + 1)(x + 1)y'' + 2xy' - 2y = (2x + 1)^2 \dots (1)$$

بعد إثبات أن الحلين المستقلين للمعادلة المتجانسة هما:

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x+1}$$

المعادلة المتجانسة:

$$(2x + 1)(x + 1)y'' + 2x y' - 2y = 0 \dots (2)$$

1. تحقق من $y_1 = x$ مشتقات y_1 :

$$y_1' = 1, \quad y_1'' = 0$$

التعويض في المعادلة:

$$(2x + 1)(x + 1) \cdot 0 + 2x \cdot 1 - 2 \cdot x = 2x - 2x = 0$$

إذن $y_1 = x$ حل.

2. تحقق من $y_2 = \frac{1}{x+1}$

مشتقات y_2 :

$$y_2' = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad y_2'' = \frac{2}{(x+1)^3}$$

التعويض في المعادلة:

$$(2x + 1)(x + 1) \cdot \frac{2}{(x+1)^3} + 2x \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) - 2 \cdot \frac{1}{x+1} = 0$$

تبسيط الحدود:

$$\frac{2(2x + 1)}{(x + 1)^2} - \frac{2x}{(x + 1)^2} - \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{4x + 2 - 2x - 2x - 2}{(x + 1)^2} = 0$$

إذن $y_2 = \frac{1}{x+1}$ حل.

الحل المتجانس
مما سبق، الحل المتجانس للمعادلة المتجانسة هو :

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x + C_2 \frac{1}{x+1}$$

الحل الخاص لنكتب المعادلة (1) على الشكل :

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

و ذلك بقسمة المعادلة (1) على $(2x+1)(x+1)$ فنجد :

$$y'' + \frac{2x}{(2x+1)(x+1)} y' - \frac{2}{(2x+1)(x+1)} y = \frac{2x+1}{x+1}$$

لإيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة (1) فإننا نعتبر كل من C_1 و C_2 دوال ذات المتغير x ،
ويكون الحل الخاص هو :

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1(x)x + C_2(x)\frac{1}{x+1}$$

نعلم ان :

$$C_1(x) = - \int \frac{y_2(x)h(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

و

$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x)h(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

حساب الرونسكيان :

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = x \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2} \right) - \frac{1}{x+1} \cdot 1 = -\frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

وبما أن

$$W(y_1, y_2)(x) \neq 0$$

y_1

فان y

$C_1(x)$

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int -\frac{\frac{1}{x+1} \cdot \frac{2x+1}{x+1}}{-\frac{2x+1}{(x+1)^2}} dx \\ &= \int -\frac{\frac{2x+1}{(x+1)^2}}{-\frac{2x+1}{(x+1)^2}} dx \end{aligned}$$

$$C_1(x) = \int 1 dx$$

$$C_1(x) = x$$

لنحسب : $C_2(x)$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= \int \frac{x \cdot \frac{2x+1}{x+1}}{-\frac{2x+1}{(x+1)^2}} dx \\ &= \int \frac{x(2x+1)}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{-(2x+1)} dx \\ &= \int -x(x+1) dx \\ &= \int (-x^2 - x) dx \\ C_2(x) &= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

اذن:

$$\begin{aligned} y_p &= C_1(x)x + C_2(x) \frac{1}{x+1} = x \cdot x + \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{x+1} \\ &= x^2 - \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}}{x+1} = \frac{x^2(4x+3)}{6(x+1)}. \end{aligned}$$

لدينا:

$$Y_G = Y_H + Y_P$$

ومنه:

الحل العام

$$Y_G = C_1 x + C_2 \frac{1}{x+1} + \frac{x^2(4x+3)}{6(x+1)}$$

5.4 طريقة الصورة القياسية

إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية على الشكل:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (15.4)$$

حيث $p(x)$ و $q(x)$ دوال مستمرة على المجال I .

الصورة القياسية لهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية أخرى خالية من المشتقة الأولى وتكون على الشكل:

$$v'' + g(x)v = h(x),$$

تكون المعادلة (15.4) على الصورة القياسية بوضع:

$$\begin{cases} y = uv \\ y' = uv' + vu' \\ y'' = uv'' + 2u'v' + vu'' \end{cases}$$

بتعويض y و y' و y'' في (15.4) نجد:

$$uv'' + (2u' + pu)v' + (u'' + pu' + qu)v = f(x) \quad (16.4)$$

حيث p, q, u, v و f دوال مستمرة ذات المتغير x .
نختار u بحيث تحقق:

$$2u' + pu = 0,$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{cases} u = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} \\ u' = -\frac{1}{2} p(x) u \\ u'' = \frac{1}{4} [p(x)]^2 u - \frac{1}{2} p'(x) u \end{cases}$$

ثم بالتعويض عن u و u' و u'' في المعادلة (16.4) تصبح المعادلة على الشكل:

$$v'' + g(x)v = h(x),$$

تسمى هذه المعادلة بالصورة القياسية للمعادلة (15.4) وهي تكون على شكل معادلة خطية ذات معاملات ثابتة وبحلها نحصل على الدالة $v(x)$ وبالتالي نحصل على الحل العام $y = uv$.

مثال 1.5.4

حل المعادلة التفاضلية التالية بطريقة الصورة القياسية

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - 1}{4x^2}y = 0 \quad (17.4)$$

لايجاد حل المعادلة التفاضلية نستخدم التعويض :

$$\begin{cases} y = uv \\ y' = uv' + vu' \\ y'' = uv'' + 2u'v' + vu'' \end{cases}$$

بتعويض y و y' و y'' في (17.4) نجد:

$$uv'' + 2u'v' + u''v + \frac{1}{x}(u'v + v'u) + \frac{x^2-1}{4x^2}(uv) = 0$$

$$\Rightarrow uv'' + (2u' + \frac{1}{x}u) + (\frac{1}{x}u' + \frac{x^2-1}{4x^2}u + u'')v = 0 \quad (18.4)$$

نضع:

$$2u' + \frac{1}{x}u = 0$$

$$u = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx} \Rightarrow \boxed{u = x^{-\frac{1}{2}}}$$

اذن:

$$u' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$u'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

بتعويض u و u' و u'' في (***) نجد:

$$\frac{-1}{x^{\frac{3}{2}}}v'' + [\frac{1}{x}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}) + \frac{x^2-1}{4x^2}(x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}})]v = 0$$

$$\frac{-1}{x^{\frac{3}{2}}}v'' + [-\frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}]v = 0$$

ومنه الصورة القياسية ل (15.4) هي:

$$v'' + \frac{1}{4}v = 0 \quad (19.4)$$

اذن:

$$(D^2 + \frac{1}{4})v = 0$$

المعادلة المميزة هي:

$$\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}i; \lambda_2 = -\frac{1}{2}i$$

$$v_h = c_1 e^{\frac{1}{2}i} + c_2 e^{-\frac{1}{2}i}$$

و منه:

$$y = uv$$

$$y_G = x^{\frac{-1}{2}} \left[c_1 e^{\frac{1}{2}i} + c_2 e^{\frac{-1}{2}i} \right]$$

6.4 إيجاد صيغة أبل:

لنعتبر المعادلة المتجانسة :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (20.4)$$

إذا كان y_1 و y_2 حلان مستقلان للمعادلة المتجانسة (20.4) فإن الرونسكيان يعطى ب:

$$w(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (21.4)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x نجد:

$$w'(y_1, y_2) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1''$$

أي:

$$w'(y_1, y_2) = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \quad (22.4)$$

لدينا y_1, y_2 حلين للمعادلة (20.4) معناها:

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases}$$

نعوض y_1'', y_2'' في المعادلة (22.4)

$$\begin{aligned} w'(y_1, y_2) &= y_1(-p(x)y_2' - q(x)y_2) - y_2(-p(x)y_1' - q(x)y_1) \\ &= -y_1 y_2' p(x) - y_1 y_2 q(x) + y_1' y_2 p(x) + y_1 y_2 q(x) \\ &= -y_1 y_2' p(x) + y_1' y_2 p(x) \\ &= p(x)(y_1' y_2 - y_1 y_2') \\ w'(y_1, y_2) &= -p(x)w(y_1, y_2) \end{aligned}$$

إذن:

$$\frac{dw}{dx} = -p(x)w$$

بتكامل الطرفين:

$$\int_{x_0}^x \frac{dw(y_1, y_2; z)}{w(y_1, y_2; z)} dz = \int_{x_0}^x -p(z) dz$$

أي:

$$\ln |w(y_1, y_2; x)| - \ln |w(y_1, y_2; x_0)| = - \int_{x_0}^x p(z) dz$$

ومنه صيغة ابل:

$$w(y_1, y_2; x) = w(y_1, y_2; x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(z) dz}$$

إيجاد الحل الثاني:

إذا علمنا أن y_1 حل للمعادلة (20.4) نبحث عن حل ثان باستخدام صيغة أبل و من المعادلة (21.4):

$$w(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = c e^{-\int_{x_0}^x p(z) dz}$$

بالقسمة على y_1 :

$$y_2' - y_2 \frac{y_1'}{y_1} = c \frac{e^{-\int_{x_0}^x p(z) dz}}{y_1}$$

هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بمتغير y_2 باستخدام المعامل التكامل:

$$\mu = e^{-\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} dx} = e^{-\ln y_1(x)} = \frac{1}{y_1(x)}$$

إذن:

$$\frac{1}{y_1(x)} y_2(x) = \int \frac{1}{y_1(x)} c \frac{e^{-\int_{x_0}^x p(z) dz}}{y_1(x)} dx$$

ومنه :

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int_{x_0}^t p(z) dz}}{(y_1(t))^2} dt .$$

وبذلك يكون الحل العام لمعادلة الهمتناسة:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

صيغة أبيل للمعادلة الغير متجانسة:

ليكن y_1, y_2 حلان مستقلان للمعادلة المتجانسة.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (23.4)$$

نبحث عن حل خاص بالاستعمال طريقة تغيير الثابت لدينا

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x), \quad (24.4)$$

حيث $c_1(x), c_2(x)$ دالتان مستمرتان نفرض الشرط:

$$c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0$$

بعد تبسيط الحساب و التعويض في المعادلة (23.4) نحصل على النظام:

$$\begin{cases} u'_1(x)y_1(x) + u'_2(x)y_2(x) = 0, \\ u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) = f(x). \end{cases}$$

بعد حل النظام نحصل على:

$$c'_1(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)},$$

$$c'_2(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

بالتكامل وتعويض $c_1(x), c_2(x)$ في (24.4) :

$$y_p(x) = -y_1(x) \int^x \frac{f(t)y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int^x \frac{f(t)y_1(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt.$$

نعوض صيغة ابل

$$y_p(x) = \int^x (-f(t)y_1(x)y_2(t)e^{\int_{x_0}^t p(z)dz} + f(t)y_2(x)y_1(t)e^{\int_{x_0}^t p(z)dz})dt.$$

$$y_p(x) = \int^x f(t)e^{\int_{x_0}^t p(z)dz} (-y_1(x)y_2(t) + y_2(x)y_1(t))dt.$$

نلاحظ أن المقدار داخل القوس هو المحدد

$$-y_1(x)y_2(t) + y_2(x)y_1(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}.$$

ومنه الحل العام

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \int_{x_0}^x f(t)e^{-\int_{x_0}^t p(z)dz} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} dt.$$

مثال 1.6.4

إذا علم أن $y_1 = x$ حل للمعادلة المتجانسة إيجاد الحل العام للمعادلة

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x. \quad (25.4)$$

أولا نتحقق أن y_1 حل للمعادلة المتجانسة وعلى ذلك فإن: $y_1' = 1, y_1'' = 0$ نعوض في (25.4)

$$-\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}x = 0$$

ثم نوجد بإستخدام صيغة أبُل

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int_{x_0}^t p(z) dz}}{(y_1(t))^2} dt$$

لدينا $p(x) = \frac{2}{x}$ أي:

$$e^{-\int p(x) dx} = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

إذن الحل الثاني:

$$y_2(x) = x \int \frac{x^2}{x^2 dx} = x x$$

وعليه :

$$y_2(x) = x^2.$$

ومنه:

$$y_h(x) = c_1 x + c_2 x^2.$$

إيجاد الحل العام: لدينا الحل الخاص

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad (26.4)$$

حيث

$$c_1(x) = - \int \frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx,$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx.$$

أولا حساب الرنسيكان:

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2.$$

أي:

$$c_1(x) = - \int \frac{x x^2}{x^2} = \frac{-x^2}{2},$$

$$c_2(x) = \int \frac{x x}{x^2} = x.$$

ومنه :

$$y_G = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{x^3}{2}$$

7.4 طريقة تحليل المؤثر:

طريقة تحليل المؤثر هي طريقة سهلة اذا كانت قابلة للتطبيق، حيث انها طريقة تقوم على اختزال معادلة من الدرجة الثانية الى معادلة من الدرجة الاولى . اذا كان لدينا المعادلة:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

أو:

$$(D^2 + p(x)D + q(x))y = r(x)$$

و أمكن تحليل المؤثر التفاضلي كيلي:

$$[D^2 + p(x)D + q(x)]y = (D + p_1(x))(D + p_2(x))y$$

تصبح المعادلة على الشكل :

$$(D + p_1(x))(D + p_2(x))y = r(x)$$

ثم نفرض أن:

$$(D + p_2(x))y = z$$

على ذلك فان:

$$(D + p_1(x))z = r(x)$$

أو:

$$\frac{dz}{dx} + p_1(x)z = r(x)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى و بحلها نحصل على قيمة z و بالتعويض في (2) عن $z = z(x)$ تصبح (2) على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = z(x)$$

وهي أيضا معادلة خطية من الرتبة الأولى و بحلها نحصل على الحل العام.

مثال 1.7.4

بطريقة تحليل المؤثر أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x+2)y'' - (2x+5)y' + 2y = 2(x+2)^2 e^{2x}$$

نكتب المعادلة على الصورة:

$$[(x+2)D^2 - (2x+5)D + 2]y = 2(x+2)^2 e^{2x}$$

و بتحليل الطرف الايسر للمعادلة (1) تصبح على الصورة :

$$((x+2)D - 1)(D - 2)y = 2(x+2)^2 e^{2x}$$

نفترض ان :

$$(D-2)y = z$$

بالتعويض من (3) في (2) نحصل على :

$$((x+2)D - 1)z = 2(x+2)^2 e^{2x}$$

او :

$$(x+2) \frac{dz}{dx} - z = 2(x+2)^2 e^{2x}$$

بالقسمة على $(x+2)$ تصبح :

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x+2}z = 2(x+2)e^{2x}$$

المعادلة (4) معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى ويكون عامل التكامل هو :

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x+2} dx} = \frac{1}{x+2}$$

و على ذلك فان :

$$\int \frac{1}{x+2} 2(x+2)e^{2x} dx = e^{2x}$$

و يكون حل المعادلة (4) هو :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2}z &= e^{2x} + C_1 \\ z &= (x+2)e^{2x} + (x+2)C_1 \end{aligned}$$

بالتعويض من (5) في (3) نجد :

$$\begin{aligned} (D-2)y &= (x+2)e^{2x} + C_1(x+2) \\ \frac{dy}{dx} - 2y &= (x+2)e^{2x} + C_1(x+2) \text{ او} \end{aligned}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى ويكون عامل التكامل μ :

$$\mu(x) = e^{-\int 2dx} = e^{-2x}$$

$$\mu(x) = \int e^{-2x} [(x+2)e^{2x} + C_1(x+2)] dx$$

$$\mu(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + C_1 \left[\frac{e^{-2x}}{-2}(x+2) - \frac{e^{-2x}}{4} \right]$$

اي ان الحل العام يكون :

$$e^{-2x} y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{2}C_1 e^{-2x}(x+2) - \frac{1}{4}C_1 e^{-2x} + C_2$$

او:

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 e^{2x} - \frac{1}{4}C_1(2x+5) + C_2 e^{2x}$$

8.4 إستبدال المتغير المستقل:

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

حيث $p(x)$, $q(x)$ و $f(x)$ دوال مستمرة على المجال I .

نختار z وذلك بإستبدال المتغير المستقل x بالمتغير z .
نضع:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} \quad (2)$$

بالإشتقاق نجد:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} \right),$$

أي:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dz} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dz} \right) \frac{dz}{dx},$$

إذن:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{dy}{dz} + \frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} \right) \frac{dz}{dx},$$

ومنه:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{dy}{dz} + \frac{d^2 y}{dz^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \quad (3)$$

بتعويض (2) و (3) في (1) نجد:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \frac{dy}{dz} + \frac{d^2 y}{dz^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + p(x) \left(\frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} \right) + q(x)y = f(x),$$

إذن:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dz} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + p(x) \frac{dz}{dx} \right) + q(x)y = f(x),$$

بقسمة المعادلة على $\left(\frac{dz}{dx} \right)^2$ نحصل على:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + p_1(x) \frac{dy}{dz} + q_1(x)y = g(x) \quad (4)$$

بحيث:

$$p_1 = \frac{\left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) + p(x) \frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx} \right)^2} \quad q_1 = \frac{q}{\left(\frac{dz}{dx} \right)^2} \quad g(x) = \frac{f(x)}{\left(\frac{dz}{dx} \right)^2}$$

نجد حالتين:

إذا كان $p_1(x)$ عبارة عن دالة بدلالة المتغير فلا يمكن استعمال هذه الطريقة.إذا كان $p_1(x)$ عبارة عن ثابت فيمكن استخدام هذه الطريقة حيث يتم إختيار $\left(\frac{dz}{dx} \right)^2$ حتى تكون $q_1(x)$ ثابت.

ولدينا من جهة أخرى:

$$q_1 = c \Leftrightarrow \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = cq(x) \quad c \in \mathbb{R},$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{cq(x)} \Leftrightarrow dz = \sqrt{cq(x)} dx,$$

ومنه:

$$z = \int \sqrt{cq(x)} dx \quad c \in \mathbb{R}.$$

بعد حل المعادلة (4) نعوض z ب x فنحصل على الحل المطلوب.
ملاحظة: يمكننا أن نختار c بحيث تكون $\sqrt{cq(x)}$ دالة قابلة للمكاملة بسهولة.
بعد إيجاد $z(x)$:

- نحسب p_1 بالتعويض ب $z(x)$ في معادلته:

$$p_1 = \frac{\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

- إذا كان p_1 ثابتاً أيضاً (في هذه الحالة q_1 ثابت بالاختيار)، فإن المعادلة (11) تصبح معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة يمكن حلها بالطرق القياسية.

- إذا لم يكن p_1 ثابتاً، فسنحصل على معادلة:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy}{dz} + cy = g(z)$$

حيث $p_1(z)$ و $g(z)$ يُعبر عنهما بدلالة z بعد التعويض ب $x = x(z)$ (عكس الدالة $z = z(x)$).

ملخص الخطوات:

تستخدم هذه الطريقة لتحويل المعادلة ذات المعاملات المتغيرة إلى معادلة ذات معاملات ثابتة، وتتلخص الخطوات فيما يلي:

1. الوضع القياسي للمعادلة:

نجعل معامل المشتقة الثانية y'' يساوي الوحدة، لتصبح المعادلة على الصورة:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad \dots (1)$$

2. فرض المتغير المستقل الجديد z :

نختار علاقة تربط المتغير الجديد z بالمتغير x بحيث تحقق العلاقة التالية (لتبسيط الحد $Q(x)$):

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = |K \cdot Q(x)|$$

أو بشكل عام بناءً على دالة $f(x)$ يتم اختيارها:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{Kf(x)}$$

ومنها نحصل على z بالتكامل:

$$z = \int \sqrt{Kf(x)} dx$$

3. التحويل إلى الصورة الجديدة:
باستخدام المتغير z ، تتحول المعادلة (1) إلى الصورة:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1 \frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \quad \dots (2)$$

4. حساب المعاملات الجديدة:
يتم حساب قيم المعاملات P_1 و Q_1 و الطرف الأيمن R_1 باستخدام العلاقات التالية:

$$P_1 = \frac{\frac{d^2z}{dx^2} + P(x) \frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$Q_1 = \frac{Q(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad (\text{لثابت يؤول أن يجب})$$

$$R_1 = \frac{R(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

5. اختبار النجاح والحل:

- إذا كان P_1 و Q_1 مقادير ثابتة، فقد نجحت الطريقة.

- نقوم بحل المعادلة التفاضلية الخطية (2) ذات المعاملات الثابتة لإيجاد $y(z)$.

6. التعويض العكسي:

بعد الحصول على الحل العام بدلالة z ، نعوض عن كل z بقيمتها بدلالة x (التي حصلنا عليها في الخطوة 2) للحصول على الحل النهائي المطلوب.

مثال 1.8.4

حل المعادلة التفاضلية الخطية:

$$x y'' - y' + 4x^3 y = x^5, \quad x \neq 0.$$

الحل :

نقسم المعادلة على x للحصول على الشكل القياسي:

$$y'' - \frac{1}{x} y' + 4x^2 y = x^4 \quad (27.4)$$

ثم نختار التبديل $z = g(x)$ بحيث يتم تحويل المعادلة لمعادلة ذات معاملات ثابتة.
الشرط الأساسي هو أن يكون معامل y في المعادلة القياسية ($Q(x) = 4x^2$) متناسباً مع مربع

مشتق z ، أي: $Q(x) = k \left(\frac{dz}{dx} \right)^2$.

* بما أن $Q(x) = 4x^2$ ، وبفرض $k = 1$ ، فإننا نحتاج $\left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = 4x^2$.

* هذا يعني $\frac{dz}{dx} = 2x$.

* بالتكامل نحصل على التبديل الصحيح $z = x^2$.

التبديل المعتمد هو:

$$z = x^2 \implies \frac{dz}{dx} = 2x \quad (28.4)$$

المشتق الثاني هو:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \frac{dy}{dz} + 4x^2 \frac{d^2y}{dz^2} \quad (29.4)$$

بالتعويض في (27.4) وحذف حد y' الذي يلغى تلقائياً $(2 \frac{dy}{dz} - 2 \frac{dy}{dz} = 0)$ ، واستخدام $z = x^2$:

$$4x^2 \frac{d^2y}{dz^2} + 4x^2 y = x^4 \implies 4z \frac{d^2y}{dz^2} + 4zy = z^2 \quad (30.4)$$

وبالقسمة على $4z$ نحصل على المعادلة ذات المعاملات الثابتة:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + y = \frac{z}{4} \quad (31.4)$$

5. الحل العام بدلالة z

* الحل المتجانس: $y_H = C_1 \cos(z) + C_2 \sin(z)$.

* الحل الخاص: $y_P = \frac{z}{4}$.

$$y(z) = C_1 \cos(z) + C_2 \sin(z) + \frac{z}{4} \quad (32.4)$$

6. الحل النهائي (الإرجاع إلى x)

بالتعويض $z = x^2$ في الحل العام:

$$y(x) = C_1 \cos(x^2) + C_2 \sin(x^2) + \frac{x^2}{4} \quad (33.4)$$

9.4 المعادلة التامة Exact Equations :

تعريف 1.9.4: نقول عن المعادلة التفاضلية:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (34.4)$$

حيث $a_0, a_1, a_2, f(x)$ دوال مستمرة على مجال I .

أنها تامة إذا أمكن إيجاد معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى تفاضلها هو المعادلة (34.4).

ملاحظة:

يمكن أيضا أن نقول أن المعادلة (34.4) تامة إذا أمكن الحصول عليها بتفاضل معادلة تفاضلية من الرتبة أولى.

مثال 1.9.4

المعادلة التفاضلية:

$$(x^2 + 1)y'' + 4xy' + 2y = e^x.$$

تامة لأنها تنتج من تفاضل المعادلة:

$$(x^2 + 1)y' + 2xy = e^x + c.$$

$$c \in \mathbb{R}$$

نظرية 9.4.1

الشرط الضروري والكافي لتكون المعادلة (34.4) تامة هو:

$$a_2''(x) - a_1'(x) + a_0(x) = 0$$

وعند تحقق الشرط المطلوب يكون التكامل الأول للمعادلة (34.4) هو:

$$a_2(x)y' + (a_1(x) - a_2'(x))y = \int f(x) dx + C / \quad C \in \mathbb{R} \quad (2)$$

البرهان

الجزء الأول: إثبات شرط التمام

باستعمال المؤثر التفاضلي نفرض أن :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = \frac{d}{dx} [P(x)y' + Q(x)y]. \quad (35.4)$$

حيث الخطوة 1: اشتقاق الطرف الأيمن نطبق قاعدة الضرب:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [P y' + Q y] &= \frac{d}{dx} (P y') + \frac{d}{dx} (Q y) \\ &= P' y' + P y'' + Q' y + Q y' \\ &= P y'' + (P' + Q) y' + Q' y. \end{aligned} \quad 2$$

الخطوة 2: مطابقة المعاملات نساوي معاملات y'' , y' , y في الطرفين:

$$y'' : P = a_2, \quad 3$$

$$y' : P' + Q = a_1, \quad 4$$

$$y : Q' = a_0. \quad 5$$

الخطوة 3: اشتقاق العلاقة (4) نشق المعادلة (4) بالنسبة لـ x :

$$a'_1 = P'' + Q'. \quad 6$$

وبتعويض (3) و(5) في (6):

$$a'_1 = a''_2 + a_0, \Rightarrow \boxed{a''_2 - a'_1 + a_0 = 0}. \quad 7$$

الجزء الثاني: اشتقاق التكامل الأول

عند تحقق الشرط، نقوم بتكامل المعادلة الأصلية:

$$\int (a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y) dx = \int f(x) dx. \quad (36.4)$$

وبما أن المؤثر تام:

$$\int \frac{d}{dx} [P y' + Q y] dx = P y' + Q y + c. \quad 9$$

حيث:

$$P = a_2, \quad Q = a_1 - a'_2. \quad 10$$

النتيجة النهائية:

$$\boxed{a_2 y' + (a_1 - a'_2) y = \int f(x) dx + C}. \quad (37.4)$$

مثال 2.9.4

تحقق ما إن كانت المعادلة تامة وإن كانت تامة؟ أوجد حلها.

$$y'' + \cos(x)y' + \sin(x)y = 0$$

الحل :

لنتحقق أولاً من شرط التمام :
بالمطابقة بين المعادلة (34.4) والمعادلة المعطاة نجد:

$$a_2(x) = 1 \quad a_1(x) = \cos(x) \quad a_0(x) = \sin(x)$$

لنحسب:

$$a_2''(x) - a_1'(x) + a_0(x) = 1'' - (\cos(x))' + \sin(x) = \sin(x) + \sin(x) = 2\sin(x) \neq 0$$

ومنه المعادلة ليست تامة.

مثال 3.9.4

إثبات أن المعادلة تامة و إيجاد حلها.

$$(1 + \sin x)y'' + 2\cos x y' - \sin x y = 1 + \sin x$$

1. لدينا المعاملات هي:

$$a_2 = 1 + \sin x, \quad a_1 = 2\cos x, \quad a_0 = -\sin x, \quad f(x) = 1 + \sin x$$

2. نتحقق من شرط التمام:

$$a_2''(x) - a_1'(x) + a_0(x) = (1 + \sin(x))'' - (2\cos(x))' - \sin(x) = -\sin(x) + 2\sin(x) - \sin(x) = 0$$

3. حساب التكامل:

$$\int f(x)dx = \int (1 + \sin x)dx = x - \cos x + C$$

4. المعادلة التكاملية: (بتطبيق المعادلة (38.4))

$$(1 + \sin x)y' + \cos x y = x - \cos x + C$$

5. حل المعادلة بالنسبة لـ y :

الخطوة 1: كتابة المعادلة بالشكل القياسي

$$\underbrace{\frac{\cos x}{1 + \sin x}}_{P(x)} y + y' = \underbrace{\frac{x - \cos x + c}{1 + \sin x}}_{Q(x)}$$

الخطوة 2: حساب عامل التكامل

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx}$$

$$u = 1 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \text{ نضع}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{du}{u}} = e^{\ln|1 + \sin x|} = |1 + \sin x| \approx 1 + \sin x$$

الخطوة 3: تطبيق العلاقة

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) Q(x) dx + C \right) \\ &= \frac{1}{1 + \sin x} \left(\int (1 + \sin x) \cdot \frac{x - \cos x + c}{1 + \sin x} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{1 + \sin x} \left(\int (x - \cos x + c) dx + C \right) \end{aligned}$$

الخطوة 4: إجراء التكامل

$$\int (x - \cos x + c) dx = \frac{x^2}{2} - \sin x + cx$$

الحل العام

$$y(x) = \frac{\frac{x^2}{2} - \sin x + cx + C}{1 + \sin x}$$

هذا هو الحل العام للمعادلة الأولى باستخدام نظرية التكامل الأول للمعادلة التامة.

10.4 المعادلة المزاملة Equation Adjoint :

إذا لم تكن المعادلة التفاضلية

$$D(y) = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (38.4)$$

تامة فإننا نبحث عن عامل التكامل $z(x)$ بحيث يكون $zD(y)$ تفاضل تام أي:

$$zD(y) = \frac{d}{dx} D_1(y)$$

حيث $D_1(y)$ مؤثر تفاضلي من الرتبة الأولى.

بالتكامل بالتجزئة نجد:

$$\int zD(y) dx = D_1(y),$$

إذن $D(y)z$ تصبح تفاضلاً تاماً إذا كان:

$$\bar{D}(z) = (a_2(x)z)'' - (a_1(x)z)' + a_0z = 0. \quad (**)$$

المعادلة $(**)$ تسمى معادلة مزاملة للمعادلة (38.4)، كما يسمى $\bar{D}$ بالموثر المزامل للموثر D . إذا تم إيجاد z حل للمعادلة المزاملة $(**)$ فإن z عامل التكامل للمعادلة (38.4) الذي يحولها إلى معادلة خطية يسهل حلها.

مثال 1.10.4

اكتب المعادلة المزاملة للمعادلة الآتية:

$$y'' - 2xy' + x(x+1)y = 0 \quad (39.4)$$

لدينا:

$$a_0 = x(x+1), a_1 = -2x, a_2 = 1$$

والآن بتطبيق القانون نجد:

$$a_2z = z \Rightarrow (a_2z)'' = z''$$

$$a_1z = -2xz \Rightarrow (a_1z)'' = -2z - 2xz'$$

$$a_0z = z(x^2 + x)$$

وبالتالي نجد المعادلة المزاملة:

$$z'' + 2xz' + (x^2 + x + 2)z = 0$$

 ملاحظة:

قد لا نستطيع حل المعادلة المزاملة $(**)$ كما توجد لها حالات خاصة يكون إيجاد حلها سهلاً.

11.4 المعادلة المزاملة ذاتيا Equation Adjoint Sefl :

تعريف 1.11.4:

نقول أن المعادلة (38.4) مزاملة ذاتيا إذا كانت المعادلة المزاملة (***) لها نفس صورة المعادلة الأصلية (38.4) أي:

$$\overline{D}(y) = D(y)$$

أمثلة 1.11.4

من أبرز المعادلات المزاملة ذاتيا هي معادلة بيسل (*Bessel's D.E*) إذ لها نفس صورة المعادلة الأصلية من الشكل:

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

لإزمة 1.11.4

الشرط الضروري و الكافي لتكون المعادلة (38.4) مزاملة ذاتيا هو:

$$a_2'(x) = a_1(x)$$

مثال 1.11.4

وضع المعادلة التالية في صيغة معادلة مزاملة ذاتيا:

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

نلاحظ أن:

$$a_2(x) = 1, a_1(x) = 2, a_0(x) = -3$$

والآن نحسب:

$$\mu = \frac{1}{a_2(x)} e^{\int \left(\frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx \right)}$$

$$\mu = e^{2x}$$

والآن نقوم بضرب المعادلة في μ

$$e^{2x} y'' + 2e^{2x} y' - 3e^{2x} y = 0$$

12.4 إستعمال طريقة إختزال الرتبة

طريقة حل المعادلة طريقة حل معادلة تفاضلية خطية لمتجانسة من الرتبة الثانية من الشكل :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)$$

مع شرط معرفة حل واحد
بإفترض وجود حل معلوم $y_1 = u$. نبحث عن حل ثاني y_2 بالشكل:

$$y_2 = v u \quad (1).$$

حيث u و v هي دوال للمتغير x . وعليه المشتقات تكون:

$$y_2' = v'u + vu' \quad (2)$$

$$y_2'' = v''u + 2v'u' + vu'' \quad (3)$$

بتعويض (1) و (2) و (3) في المعادلة (*) نجد:

$$(v''u + 2v'u' + vu'') + P(x)(v'u + vu') + Q(x)(vu) = 0$$

بتجميع الحدود بدلالة v'' , v' , و v :

$$v''u + v'(2u' + P(x)u) + v(u'' + P(x)u' + Q(x)u) = 0$$

بما ان $y_1 = u$ هو حل للمعادلة

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)$$

فإن

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = 0$$

تصبح المعادلة المبسطة:

$$v''u + v'(2u' + P(x)u) = 0$$

نفرض $w = v'$ وبالتالي $w' = v''$ فتصبح المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى:

$$w'u + w(2u' + P(x)u) = 0$$

$$w'u = -w(2u' + P(x)u)$$

بفصل المتغيرات:

$$\frac{w'}{w} = -\left(\frac{2u'}{u} + P(x)\right)$$

بالتكامل على الطرفين:

$$\int \frac{dw}{w} = -\int \left(\frac{2u'}{u} + P(x)\right) dx$$

$$\ln w = -2 \ln u - \int P(x) dx + \ln c$$

$$\ln w = \ln(u^{-2}) + \ln c - \int P(x) dx$$

$$w = c \cdot u^{-2} \cdot e^{-\int P(x) dx}$$

* إيجاد الحل الثاني y_2

بما أن $w = v'$ نحتاج إلى التكامل مرة أخرى لإيجاد v :

$$v = \int \frac{c \cdot e^{-\int P(x) dx}}{u^2} dx$$

بوضع $c = 1$

$$v = \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{u^2} dx$$

التحقق ان الحلان مستقلان خطياً
حساب الرونسكيان $W(y_1, y_2)$:

$$W(y_1, y_2) = W(u, uv) = \begin{vmatrix} u & uv \\ u' & (uv)' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u & uv \\ u' & u'v + uv' \end{vmatrix}$$

$$W(u, uv) = u(u'v + uv') - u'(uv)$$

$$= uu'v + u^2v' - uu'v$$

$$W(u, uv) = u^2v'$$

لدينا v' :

$$v' = \frac{e^{-\int P(x) dx}}{u^2} dx$$

نعوض قيمة v' في $W(u, uv) = u^2 v'$:

$$W(u, uv) = u^2 \left[\frac{1}{u^2} \exp \left(- \int P(x) dx \right) \right]$$

$$W(u, uv) = \exp \left[- \int P(x) dx \right]$$

وبما أن الدالة الأسية لا يمكن أن تساوي الصفر أبداً ($\exp(\cdot) \neq 0$)، فإن الرونسكيان لا يساوي الصفر

$$W(y_1, y_2) = \exp \left[- \int P(x) dx \right] \neq 0$$

وهذا يثبت أن الحلين $y_1 = u$ و $y_2 = uv$ مستقلان خطياً.
وبذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو:

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

الحل العام النهائي هو

$$y = c_1 u + c_2 uv$$

حيث:

$$v = \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{u^2} dx$$

مثال 1.12.4

نطبق طريقة إختزال الرتبة لإيجاد الحل الثاني y_2 والحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

حيث الحل الأول المعروف هو

$$y_1 = u(x) = x$$

1. تحديد المعامل $P(x)$ والفرض

المعادلة في الصورة القياسية $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. بالتالي:

$$P(x) = \frac{1}{x}$$

والحل المعروف هو $u(x) = x$. نفرض أن الحل الثاني هو $y_2 = uv = xv$.

2. إيجاد الدالة $v(x)$

نستخدم الصيغة العامة لإيجاد الدالة $v(x)$ ، مع اختيار ثابت التكامل $C = 0$:

$$v(x) = \int \frac{\exp \left(- \int P(x) dx \right)}{u^2} dx$$

أولاً، حساب التكامل: $-\int P(x)dx$

$$-\int P(x)dx = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln|x| = \ln(x^{-1})$$

$$\exp\left(-\int P(x)dx\right) = \exp(\ln(x^{-1})) = \frac{1}{x}$$

ثانياً، نحسب الدالة $v(x)$ بالتعويض بقيمة $u^2 = x^2$:

$$v(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{x^2}dx = \int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx$$

$$v(x) = \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

نختار $C = 0$ فنجد الحل v :

$$v(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

3. إيجاد الحل الثاني y_2 والحل العام

الحل الثاني هو $y_2 = uv$:

$$y_2 = x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2x}$$

التحقق من الاستقلال الخطي (باستخدام رونسكيان):

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & -1/2x \\ 1 & 1/2x^2 \end{vmatrix} = x \left(\frac{1}{2x^2}\right) - 1 \left(\frac{-1}{2x}\right) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x} \neq 0$$

الحل العام هو:

$$y(x) = c_1x - c_2\frac{1}{2x}$$

13.4 تمارين مقترحة

التمرين الأول

أوجد حلول المعادلات التفاضلية الآتية :

1. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

2. $x^2 y'' + 4xy' + 4y = x^3$

3. $x^2 y'' + 3xy' - 4y = e^x$

4. $x^3 y''' - 3x^2 y'' - 5xy' - 5y = 0$

5. $x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x} \sin(\ln x)$

التمرين الثاني

حل المعادلات التالية

1. $(x + 3)^2 y'' - 2(x + 3)y' + 2y = -x$

2. $(x + 4)^2 y'' - 2(x + 4)y' = x^2$

3. $(x + 1)^2 y'' - 3(x + 1)y' + 2y = x^3 - x$

4. $(x + 5)^2 y'' - 5(x + 5)y' + 6y = -x$

التمرين الثالث

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x+1)(x-3)y'' + 5y' - 6y = (x+1)^2$$

بعد إثبات أن الحلين المستقلين للمعادلة المتجانسة هما:

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = \frac{1}{x-3}$$

التمرين الرابع

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x} = x; x > 0.$$

التمرين الخامس

إذا علم أن $y_1(x) = x$ حل خاص للمعادلة المتجانسة

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

فاوجد الحل العام للمعادلة باستخدام صيغة آبل

التمرين السادس

1. أثبت أن

$$xD^2 + (2x+3)D + 4 = (D+2)(xD+2)$$

2. أوجد الحل العام للمعادلة :

$$xy'' + (2x+3)y' + 4y = e^{2x}$$

التمرين السابع

أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة استبدال المتغير المستقل :

$$1. \quad xy'' + (x^2 - 1)y' + x^3y = 0$$

$$2. \quad \cos x y'' + \sin x y' - 2y \cos^3 x = 2 \cos^5 x$$

$$3. \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad x > 0$$

التمرين الثامن

أثبت أن المعادلات التالية تامة ثم أوجد حلها.

$$1. \quad x^2y'' + 4xy' + 2y = x$$

$$2. \quad x^3y'' + 6x^2y' + 6xy = x \ln x$$

$$3. \quad (\ln x)y'' + \frac{1}{x}y' = 1, \quad x > 0$$

$$4. \quad e^{-x}y'' + 2 \cos x \cdot e^{-x}y' - e^{-x}(2 \sin x + 2 \cos x + 1)y = 1$$

التمرين التاسع

-أكتب المعادلة المزاملة للمعادلة التالية:

$$y'' + (5x + 1)y' + 6y = 0$$

-ضع المعادلة التالية في صورة المعادلة المزاملة ذاتيا:

$$y'' - (\tan(x))y' + (\sec(x))y = 0$$

التمرين العاشر

طبق طريقة إختزال الرتبة للمعادلة:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$

$$\text{المعطى: } y_1 = u(x) = x^2$$

14.4 بعض الحلول المقترحة

حل التمرين الثاني:

إيجاد حلول المعادلة التفاضلية الآتية :

$$(x+3)^2 y'' - 2(x+3)y' + 2y = -x. \quad (40.4)$$

باستخدام التعويض $Z = x+3$ أي $x = Z-3$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dZ} \quad \text{و} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dZ^2}$$

و عليه تصبح المعادلة كما يلي :

$$Z^2 y'' - 2Zy' + 2y = -Z + 3$$

و هذه عبارة عن معادلة أولير التفاضلية

باستخدام التعويض $z = e^t$ و بوضع $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$(\theta(\theta-1) - 2\theta + 2)y = -e^t + 3$$

و منه

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = -e^t + 3 \quad (41.4)$$

و هذه المعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة وإيجاد حلولها يؤول إلى المراحل الآتية :

أولا : الحل المتجانس y_h

المعادلة المتجانسة هي :

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 0$$

المعادلة المميزة لها:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \implies r_1 = 1, r_2 = 2$$

إذن الحل المتجانس:

$$y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

ثانيا : الحل الخاص y_p

المعادلة (41.4) من الشكل :

$$\phi(\theta)y = -e^t + 3$$

حيث :

$$\phi(\theta) = \theta^2 - 3\theta + 2$$

إذن

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{1}{\phi(\theta)}(-e^t + 3) \\
 &= \frac{1}{\theta^2 - 3\theta + 2}(-e^t) + \frac{1}{\theta^2 - 3\theta + 2}(3) \\
 &= \frac{-e^t}{(\theta+1)^2 - 3(\theta+1) + 2}(1) + \frac{1}{\theta^2 - 3\theta + 2}(3) \\
 &= \frac{-e^t}{\theta^2 - \theta}(1) + \frac{1}{2(\frac{\theta^2}{2} - \frac{3\theta}{2} + 1)}(3) \\
 &= \frac{-e^t}{\theta(\theta-1)}(1) + \frac{1}{2(\frac{\theta^2}{2} - \frac{3\theta}{2} + 1)}(3) \\
 &= \frac{e^t}{\theta}(1 + \theta)(1) + \frac{1}{2}(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{3\theta}{2} + \dots)(3) \\
 y_p &= e^t(t + 1) + \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

و بذلك يكون الحل العام للمعادلة (40.4) هو :

$$y_G = C_1(x + 3) + C_2(x + 3)^2 + (x + 3)(\ln(x + 3) + 1) + \frac{3}{2}$$

حيث C_1 و C_2 عددان حقيقيان .

حل التمرين الثالث:

نعتبر المعادلة التفاضلية:

$$(x + 1)(x - 3)y'' + 5y' - 6y = (x + 1)^2. \quad (42.4)$$

معادلتها المتجانسة تعطى بالشكل:

$$(x + 1)(x - 3)y'' + 5y' - 6y = 0. \quad (43.4)$$

بعد التعويض عن كل من y_1, y_2 في المعادلة (43.4) نجد الحل المتجانس للمعادلة المتجانسة هو :

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1x^2 + C_2\frac{1}{x-3}$$

الحل الخاص لنكتب المعادلة (42.4) على الشكل:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

و ذلك بقسمتها على $(x + 1)(x - 3)$ فنجد:

$$y'' + \frac{2}{(x + 1)(x - 3)}y' - \frac{6}{(x + 1)(x - 3)}y = \frac{x + 1}{x - 3}. \quad (44.4)$$

لايجاد الحل الخاص y_p للمعادلة (44.4) فإننا نعتبر كل من C_1 و C_2 دوال ذات المتغير x ، ويكون الحل الخاص هو:

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1(x)x^2 + C_2(x)\frac{1}{x-3}$$

نعلم أن :

$$C_1(x) = - \int \frac{y_2(x)h(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

و

$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x) h(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

حساب الرونسكيان:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = x^2 \left(-\frac{1}{(x-3)^2} \right) - 2x \cdot \frac{1}{x-3} = -\frac{x^2 + 2x(x-3)}{(x-3)^2} = -\frac{3x^2 - 6x}{(x-3)^2}$$

وبما أن

$$W(y_1, y_2)(x) \neq 0$$

فإن y_1 و y_2 مستقلان خطيا.- ** حساب $C_1(x)$ و $C_2(x)$:

$$C_1(x) = - \int \frac{y_2(x) f(x)}{W(y_1, y_2)} dx = - \int \frac{\frac{1}{x-3} \cdot (x+1)^2}{-\frac{3x^2-6x}{(x-3)^2}} dx = \int \frac{(x+1)^2(x-3)}{3x^2-6x} dx$$

$$C_1(x) = \frac{1}{3} (x + 2 \ln|x| - \ln|x-2|)$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{x^2(x+1)^2}{-\frac{3x^2-6x}{(x-3)^2}} dx = - \int \frac{x^2(x+1)^2(x-3)^2}{3x^2-6x} dx$$

$$C_2(x) = \frac{1}{3} \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{2} - x^2 \right)$$

إذن:

$$y_p = \frac{1}{3} (x + 2 \ln|x| - \ln|x-2|) x^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{2} - x^2 \right) \frac{1}{x-3}$$

لدينا:

$$Y_G = Y_h + Y_p$$

ومنه: الحل العام

$$Y_G = C_1 x^2 + C_2 \frac{1}{x-3} + \frac{1}{3} (x + 2 \ln|x| - \ln|x-2|) x^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{2} - x^2 \right) \frac{1}{x-3}$$

حل التمرين الرابع:

نعتبر المعادلة الموالية:

$$y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x} = x; x > 0. \quad (45.4)$$

لإيجاد حل المعادلة التفاضلية (45.4) نستخدم التعويض :

$$\begin{cases} y = uv \\ y' = uv' + vu' \\ y'' = uv'' + 2u'v' + vu'' \end{cases}$$

بتعويض y و y' و y'' في (45.4) نجد:

$$uv'' + 2u'v' + u''v + \frac{2}{x}(u'v + v'u) - \frac{2}{x^2}(uv) = x; x > 0$$

أي:

$$uv'' + (2u' + \frac{2}{x}u)v' + (u'' + \frac{2}{x}u' + \frac{2}{x^2})v = x; x > 0. \quad (46.4)$$

نضع:

$$2u' + \frac{2}{x}u = 0$$

نجد:

$$u = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{2}{x} dx} \Rightarrow u = \frac{1}{x} \Rightarrow u' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow u'' = \frac{2}{x^3}$$

بتعويض u و u' و u'' في (46.4) نجد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}v'' - \frac{2}{x^3} &= x; x > 0, \\ v'' - \frac{2}{x^2} &= x^2; x > 0. \end{aligned}$$

وهي الصورة القياسية للمعادلة السابقة و تحل هاته الأخيرة بطريقة أويلر التي تعرفنا عليها سابقا

حل التمرين الخامس:

نتحقق أولا أن $y_1(x) = x$ حل للمعادلة، ثم نضع المعادلة من الشكل

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

حيث

$$p(x) = \frac{-x}{x-1}$$

إذا

$$e^{-\int p(x) dx} = e^{-\int \frac{x}{x-1} dx} = e^{\int 1 + \frac{1}{x-1} dx} = e^{x + \ln(x-1)} = (x-1)e^x$$

وبإستخدام صيغة آبل نبحث عن $y_2(x)$ حيث

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int_{x_0}^t p(z) dz}}{(y_1(t))^2} dt$$

$$= \int \frac{(x-1)e^x}{x^2} dx = x \int \left[\frac{1}{x} e^x - \frac{1}{x^2} e^x \right] dx$$

و لحساب $\int [\frac{1}{x}e^x]$ نستعمل التكامل بالتجزئة: نأخذ

$$u = \frac{1}{x} \rightarrow du = -\frac{1}{x^2}dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

أي:

$$\int \frac{1}{x}e^x = \frac{1}{x}e^x + \int \frac{1}{x^2}e^x dx$$

و عليه فإن:

$$y_2(x) = x[\frac{1}{x}e^x] = e^x$$

ومنه يكون الحل العام هو:

$$y(x) = c_1x + c_2e^x$$

حل التمرين السادس:

1. إثبات المساواة

$$\begin{aligned} (D+2)(xD+2)y &= D(xD)y + D(2y) + 2xDy + 4y \\ &= xD^2y + Dy + 2Dy + 2xDy + 4y \\ &= [xD^2 + (2x+3)D + 4]y \\ xD^2 + (2x+3)D + 4 &= (D+2)(xD+2) \end{aligned}$$

2. حل المعادلة يؤول إلى وضعها على الصيغة :

$$(D+2)(xD+2)y = e^{2x} \quad (47.4)$$

بإستعمال طريقة تغير المتغير نضع:

$$(xD+2)y = z. \quad (48.4)$$

بالتعويض في المعادلة (47.4) نجد:

$$(D+2)z = e^{2x} \quad (49.4)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ويكون معاملها التكامل هو :

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

أي :

$$\int e^{2x} e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{4x}$$

إذن:

$$e^{2x} z = \frac{1}{4} e^{4x} + C_1$$

وبالتالي فإن حل المعادلة (49.4) هو :

$$z = C_1 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x}$$

بالتعويض عن z في (48.4) نجد :

$$(xD + 2)y = C_1 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x} \quad (50.4)$$

أو:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{C_1}{x} e^{-2x} + \frac{1}{4x} e^{2x} \quad (51.4)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ويكون معامل التكامل لها هو :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

و على ذلك نجد:

$$\begin{aligned} \int x^2 \left[\frac{C_1}{x} e^{-2x} + \frac{1}{4x} e^{2x} \right] dx &= \int (C_1 x e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}) dx \\ &= C_1 \left[\frac{-1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right] \end{aligned}$$

وبالتالي فإن حل المعادلة (51.4) هو :

$$y = -\frac{C_1}{4} (2x + 1) e^{-2x} + \frac{1}{16} (2x - 1) e^{2x}$$

ومنه حل المعادلة (47.4) هو :

$$y = \frac{-C_1}{4} (2x + 1) e^{-2x} + \frac{1}{16} (2x - 1) e^{2x} + C_2.$$

حل التمرين السابع

نعتبر المعادلة:

1. الوضع في الصورة القياسية ($y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$) بقسمة طرفي المعادلة على معامل y'' وهو x :

$$y'' + \left(\frac{x^2-1}{x}\right)y' + \frac{x^3}{x}y = 0$$

$$y'' + \left(x - \frac{1}{x}\right)y' + x^2y = 0$$

وبالتالي: $P(x) = x - \frac{1}{x}$ و $Q(x) = x^2$.

2. اختيار متغير التحويل (z) نختار z بحيث $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = Q(x)$:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = x^2 \implies \frac{dz}{dx} = x$$

بالتكامل نجد z :

$$z = \frac{x^2}{2}$$

3. حساب المعاملات الجديدة (P_1, Q_1) المعادلة المحولة هي: $\frac{d^2y}{dz^2} + P_1 \frac{dy}{dz} + Q_1 y = 0$.

3.1. حساب Q_1 :

$$Q_1 = \frac{Q(x)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

3.2. حساب P_1 : باستخدام $P(x) = x - \frac{1}{x}$ و $\frac{dz}{dx} = x$ و $\frac{d^2z}{dx^2} = 1$:

$$P_1 = \frac{\frac{d^2z}{dx^2} + P(x)\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)(x)}{x^2}$$

$$P_1 = \frac{1 + x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

بما أن $P_1 = 1$ و $Q_1 = 1$ ، فإن المعادلة تحولت إلى معادلة ذات معاملات ثابتة.

4. حل المعادلة الجديدة المعادلة الجديدة بدلالة z هي:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + y = 0$$

المعادلة المساعدة: $m^2 + m + 1 = 0$. الجذور:

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الحل بدلالة z هو:

$$y(z) = e^{-z/2} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \right)$$

5. الحل العام النهائي بالتعويض العكسي عن $z = x^2/2$ في الحل:

$$y(x) = e^{-(x^2/2)/2} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right) \right)$$

الحل العام:

$$y(x) = e^{-x^2/4} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right) \right)$$

حل المعادلة 02

المعادلة: $\cos x y'' + \sin x y' - 2y \cos^3 x = 2 \cos^5 x$

1. الشكل القياسي

نقسم المعادلة على $\cos x$ للحصول على الشكل القياسي $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$:

$$y'' + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)y' - \left(\frac{2 \cos^3 x}{\cos x}\right)y = \left(\frac{2 \cos^5 x}{\cos x}\right)$$

$$y'' + (\tan x)y' - (2 \cos^2 x)y = 2 \cos^4 x$$

2. اختيار تبديل المتغيرات نختار التبديل الذي يحول المعادلة إلى معادلة ذات معاملات ثابتة:

$$z = \sin x$$

مشتقات التبديل:

$$\frac{dz}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\sin x$$

3. تحويل المشتقات (قاعدة السلسلة) المشتق الأول:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = (\cos x) \frac{dy}{dz}$$

المشتق الثاني:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\cos x \frac{dy}{dz} \right) \\
 &= (-\sin x) \frac{dy}{dz} + \cos x \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dz} \right) \right) \\
 &= (-\sin x) \frac{dy}{dz} + \cos x \left(\frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} \right) \\
 &= (-\sin x) \frac{dy}{dz} + \cos^2 x \frac{d^2y}{dz^2}
 \end{aligned}$$

4. التعويض في المعادلة والتبسيط بالتعويض في المعادلة القياسية (الخطوة 1):

$$\left[(-\sin x) \frac{dy}{dz} + \cos^2 x \frac{d^2y}{dz^2} \right] + (\tan x) \left(\cos x \frac{dy}{dz} \right) - 2 \cos^2 x y = 2 \cos^4 x$$

إلغاء الحد الأوسط:

$$\cos^2 x \frac{d^2y}{dz^2} - 2 \cos^2 x y = 2 \cos^4 x$$

نقسم على $\cos^2 x$ ونستخدم $\cos^2 x = 1 - z^2$:

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 2y = 2 \cos^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 2y = 2(1 - z^2)$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 2y = 2 - 2z^2 \quad \text{المعادلة المحولة ذات المعاملات الثابتة}$$

5. حل المعادلة المحولة ذات المعاملات الثابتة

أ. الحل المتجانس (y_H) المعادلة المميزة: $\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{2}$.

$$y_H = C_1 e^{\sqrt{2}z} + C_2 e^{-\sqrt{2}z}$$

ب. الحل الخاص (y_P) لأن الطرف الأيمن $(2 - 2z^2)$ دالة تربيعية، نفترض:

$$y_P = Az^2 + Bz + C \Rightarrow \frac{d^2y_P}{dz^2} = 2A$$

بالتعويض:

$$2A - 2(Az^2 + Bz + C) = 2 - 2z^2$$

$$-2Az^2 - 2Bz + (2A - 2C) = -2z^2 + 0z + 2$$

بمقارنة المعاملات:

$$z^2 : -2A = -2 \Rightarrow A = 1$$

$$z : -2B = 0 \Rightarrow B = 0 \cdot$$

$$\text{ثابت : } 2A - 2C = 2 \Rightarrow 2(1) - 2C = 2 \Rightarrow C = 0 \cdot$$

$$y_P = z^2$$

ج. الحل العام بدلالة z

$$y(z) = y_H + y_P$$

$$y(z) = C_1 e^{\sqrt{2}z} + C_2 e^{-\sqrt{2}z} + z^2$$

6. الحل النهائي (الإرجاع إلى x)

نعود إلى المتغير الأصلي x باستخدام التبديل $z = \sin x$

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{2} \sin x} + C_2 e^{-\sqrt{2} \sin x} + \sin^2 x$$

حل المعادلة 03

$$\text{المعادلة: } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

(أ) تحديد نوع المعادلة والتبديل الأساسي:

> هذه معادلة أويلر-كوشي، حيث قوة x تساوي رتبة الاشتقاق.

> التبديل الثابت والمحدد لهذا النوع هو اللوغاريتم الطبيعي.

التبديل المعتمد: $z = \ln x$ ($\Rightarrow x = e^z$).

(ب) تحويل الحد الأول ($x \frac{dy}{dx}$) بالتفصيل:

$$\text{> قاعدة السلسلة: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\text{> مشتقة التبديل: } \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{> النتيجة: } x \frac{dy}{dx} = x \left(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$$

(ج) تحويل الحد الثاني ($x^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$) بالتفصيل:

➤ البداية: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dz} \right)$

➤ قاعدة الضرب والسلسلة: بعد تطبيق قواعد الاشتقاق (كما هو موضح سابقاً) والضرب في x^2 .

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$$

(د) المعادلة المحولة (تبسيط نهائي): بالتعويض في المعادلة الأصلية ($x^2 y'' + x y' + y = 0$) نجد أن:

$$\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right) + y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + y = 0$$

(هـ) الحل النهائي: الجذور المميزة هي $\lambda = \pm i$. الحل النهائي بالتعويض $z = \ln x$

$$y(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$$

حل التمرين الثامن

$$x^2 y'' + 4x y' + 2y = x. \quad (52.4)$$

1. المعاملات: 1. المعادلة على الصورة $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$

$$a_2 = x^2, \quad a_1 = 4x, \quad a_0 = 2, \quad f(x) = x$$

2. التحقق من شرط التمام: يجب أن يتحقق الشرط $a_2'' - a_1' + a_0 = 0$.

$$a_2' = 2x \quad a_1' = 4$$

$$a_2'' = 2 \quad a_0 = 2$$

$$a_2'' - a_1' + a_0 = 2 - 4 + 2 = 0$$

المعادلة تامة .

3. المعادلة التكاملية (التكامل الأول):

$$a_2 y' + (a_1 - a_2') y = \int f(x) dx + C_1$$

* حساب $a_1 - a_2'$

$$a_1 - a_2' = 4x - 2x = 2x$$

* حساب $\int f(x)dx$:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1$$

المعادلة الخطية الناتجة:

$$x^2 y' + 2xy = \frac{x^2}{2} + C_1$$

4. حل المعادلة بالنسبة لـ y :

الخطوة 1: كتابة المعادلة بالشكل القياسي

$$y' + \underbrace{\frac{2}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{C_1}{x^2}}_{Q(x)}$$

الخطوة 2: حساب عامل التكامل $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln|x|} = x^2$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) Q(x) dx + C_2 \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\int x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{C_1}{x^2} \right) dx + C_2 \right) \quad \text{الخطوة 3: تطبيق العلاقة}$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx + C_2 \right)$$

$$\int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + C_1 x \quad \text{الخطوة 4: إجراء التكامل النهائي}$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right) \quad \text{الحل العام}$$

$$= \frac{x}{6} + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$$

$$y(x) = \frac{x}{6} + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$$

حل المعادلة 02

$$x^3 y'' + 6x^2 y' + 6xy = x \ln x$$

1. تحديد المعاملات:

$$a_2 = x^3, \quad a_1 = 6x^2, \quad a_0 = 6x, \quad f(x) = x \ln x$$

2. التحقق من شرط التمام:

* حساب المشتقات:

$$a_2' = 3x^2, \quad a_2'' = 6x$$

$$a'_1 = 12x$$

* التحقق:

$$a''_2 - a'_1 + a_0 = 6x - 12x + 6x = 0$$

المعادلة تامة. (Exact)

3. المعادلة التكاملية (التكامل الأول):

$$a_2 y' + (a_1 - a'_2)y = \int f(x)dx + C_1$$

* حساب $a_1 - a'_2$:

$$a_1 - a'_2 = 6x^2 - 3x^2 = 3x^2$$

* حساب $\int f(x)dx = \int x \ln x dx$ (باستخدام التكامل بالتجزئة):

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C_1$$

المعادلة الخطية الناتجة:

$$x^3 y' + 3x^2 y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C_1$$

4. حل المعادلة بالنسبة لـ y :

الخطوة 1: كتابة المعادلة بالشكل القياسي

$$y' + \underbrace{\frac{3}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{\ln x}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{C_1}{x^3}}_{Q(x)}$$

الخطوة 2: حساب عامل التكامل $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln |x|} = x^3$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) Q(x) dx + C_2 \right)$$

$$= \frac{1}{x^3} \left(\int x^3 \left(\frac{\ln x}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{C_1}{x^3} \right) dx + C_2 \right) \quad \text{الخطوة 3: تطبيق العلاقة}$$

$$= \frac{1}{x^3} \left(\int \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C_1 \right) dx + C_2 \right)$$

الخطوة 4: إجراء التكامل النهائي يجب حساب $\int \frac{x^2}{2} \ln x dx$ بالتجزئة مرة أخرى $(u = \ln x, dv = \frac{x^2}{2} dx)$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{2} \ln x dx &= \frac{x^3}{6} \ln x - \int \frac{x^3}{6} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{6} \ln x - \frac{1}{6} \int x^2 dx = \frac{x^3}{6} \ln x - \frac{x^3}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C_1 \right) dx &= \left(\frac{x^3}{6} \ln x - \frac{x^3}{18} \right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + C_1 x \\
 &= \frac{x^3}{6} \ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^3}{12} + C_1 x \\
 &= \frac{x^3}{6} \ln x + x^3 \left(-\frac{2}{36} - \frac{3}{36} \right) + C_1 x \\
 &= \frac{x^3}{6} \ln x - \frac{5x^3}{36} + C_1 x
 \end{aligned}$$

التكامل الكلي:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{1}{x^3} \left(\frac{x^3}{6} \ln x - \frac{5x^3}{36} + C_1 x + C_2 \right) \\
 &= \frac{\ln x}{6} - \frac{5}{36} + \frac{C_1 x}{x^3} + \frac{C_2}{x^3}
 \end{aligned}$$

الحل العام بالتعويض في $y(x) = \frac{1}{x^3}(\dots) + \frac{C_2}{x^3}$

$$y(x) = \frac{\ln x}{6} - \frac{5}{36} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3}$$

حل المعادلة 03

$$(\ln x) y'' + \frac{1}{x} y' = 1, \quad x > 0$$

1. اختزال الرتبة (التعويض): المعادلة مفقودة المتغير y (حيث $a_0 = 0$)، لذلك نستخدم التعويض $u = y'$

$$u' = y'' \iff u = y' \text{ نفرض}$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية، نحصل على معادلة خطية من الرتبة الأولى بدلالة u :

$$(\ln x) u' + \frac{1}{x} u = 1$$

2. حل المعادلة الخطية لـ u :

الخطوة 1: كتابة المعادلة بالشكل القياسي بالقسمة على $\ln x$:

$$u' + \underbrace{\frac{1}{x \ln x}}_{P(x)} u = \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{Q(x)}$$

الخطوة 2: حساب عامل التكامل $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x \ln x} dx}$$

باستخدام التعويض $t = \ln x \implies dt = \frac{1}{x} dx$ ، يصبح التكامل $\int \frac{1}{t} dt = \ln |\ln x|$

$$\mu(x) = e^{\ln |\ln x|} = \ln x \quad (x > 1)$$

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) Q(x) dx + C_1 \right) \\
 &= \frac{1}{\ln x} \left(\int \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} dx + C_1 \right) \quad \text{الخطوة 3: تطبيق العلاقة وإيجاد } u(x) \\
 &= \frac{1}{\ln x} \left(\int 1 dx + C_1 \right)
 \end{aligned}$$

الخطوة 4: إيجاد الحل لـ $u(x)$

$$u(x) = \frac{x + C_1}{\ln x}$$

3. إيجاد الحل العام y : بما أن $y(x) = \int u(x) dx$

$$y(x) = \int \frac{x + C_1}{\ln x} dx$$

بما أن هذا التكامل غير أولي (Non-elementary) يُترك الحل بصيغة التكامل.

$$\boxed{y(x) = \int \frac{x + C_1}{\ln x} dx + C_2} \quad \text{الحل العام النهائي}$$

حل المعادلة 04

$$e^{-x} y'' + 2 \cos x \cdot e^{-x} y' - e^{-x} (2 \sin x + 2 \cos x + 1) y = 1$$

الحل :

1. تحديد المعاملات:

$$a_2 = e^{-x}, \quad a_1 = 2 \cos x \cdot e^{-x}, \quad a_0 = -e^{-x} (2 \sin x + 2 \cos x + 1), \quad f(x) = 1$$

2. التحقق من شرط التمام: يجب أن يتحقق الشرط $a_2'' - a_1' + a_0 = 0$ * حساب المشتقات:

$$a_2' = -e^{-x}, \quad a_2'' = e^{-x}$$

$$a_1' = \frac{d}{dx} (2 \cos x \cdot e^{-x}) = 2(-\sin x \cdot e^{-x} + \cos x \cdot (-e^{-x}))$$

$$a_1' = -2e^{-x} (\sin x + \cos x)$$

* التحقق:

$$a_2'' - a_1' + a_0 = e^{-x} - (-2e^{-x} (\sin x + \cos x)) + (-e^{-x} (2 \sin x + 2 \cos x + 1))$$

$$= e^{-x} + 2e^{-x} \sin x + 2e^{-x} \cos x - 2e^{-x} \sin x - 2e^{-x} \cos x - e^{-x}$$

$$= 0$$

المعادلة تامة. (Exact)

3. المعادلة التكاملية (التكامل الأول):

$$a_2 y' + (a_1 - a_2') y = \int f(x) dx + C_1$$

* حساب $a_1 - a_2'$:

$$a_1 - a_2' = 2 \cos x \cdot e^{-x} - (-e^{-x}) = e^{-x} (2 \cos x + 1)$$

* حساب $\int f(x) dx$:

$$\int 1 dx = x + C_1$$

المعادلة الخطية الناتجة:

$$e^{-x} y' + e^{-x} (2 \cos x + 1) y = x + C_1$$

4. حل المعادلة بالنسبة لـ y :الخطوة 1: كتابة المعادلة بالشكل القياسي بالقسمة على e^{-x} (والضرب في e^x):

$$y' + \underbrace{(2 \cos x + 1)}_{P(x)} y = \underbrace{(x + C_1)}_{Q(x)} e^x$$

الخطوة 2: حساب عامل التكامل $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int (2 \cos x + 1) dx} = e^{2 \sin x + x}$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) Q(x) dx + C_2 \right)$$

$$= e^{-(2 \sin x + x)} \left(\int e^{2 \sin x + x} \cdot (x + C_1) e^x dx + C_2 \right) \quad \text{الخطوة 3: تطبيق العلاقة}$$

$$= e^{-(2 \sin x + x)} \left(\int (x + C_1) e^{2 \sin x + 2x} dx + C_2 \right)$$

الخطوة 4: الحل العام بما أن التكامل $\int (x + C_1) e^{2 \sin x + 2x} dx$ هو تكامل غير أولي، يُترك الحل بدلالة التكامل.

$$y(x) = e^{-(2 \sin x + x)} \left(\int (x + C_1) e^{2 \sin x + 2x} dx + C_2 \right)$$

حل التمرين التاسع:

- إيجاد المعادلة المزاملة:

$$y'' + (5x + 1)y' + 6y = 0$$

لدينا:

$$a_2(x) = 1, a_1(x) = 5x + 1, a_0(x) = 6$$

اذن:

$$z'' - ((5x + 1)z)' + 6z = 0$$

ومنه المعادلة المزاملة من الشكل:

$$z'' - (5x + 1)z' + z = 0$$

- كتابة المعادلة على شكل مزامل ذاتيا:

$$y'' - (tan(x))y' + (sec(x))y = 0$$

لدينا:

$$a_2(x) = 1, a_1(x) = -tan(x), a_0(x) = sec(x)$$

نحسب:

$$\mu = \frac{1}{1} e^{\int \left(\frac{-tan(x)}{1} dx \right)}$$

اذن:

$$\mu = \cos(x)$$

ومنه المعادلة المزاملة الذاتية هي:

$$\cos(x)y'' - \cos(x)tan(x)y' + \cos(x)sec(x)y = 0$$

حل التمرين العاشر

نقسم على x^2 لوضع المعادلة في الصورة القياسية:

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

$$P(x) = -\frac{3}{x}$$

نفرض أن الحل الثاني هو $y_2 = x^2 v$

2. إيجاد الدالة $v(x)$

$$-\int P(x)dx = -\int \left(-\frac{3}{x}\right)dx = 3 \ln |x| = \ln(|x|^3) \quad \text{لدينا :}$$

$$\exp\left(-\int P(x)dx\right) = x^3 \quad \text{ومنه :}$$

$$u^2 = (x^2)^2 = x^4 \quad \text{ومن جهة اخرى :}$$

وعليه

$$v(x) = \int \frac{x^3}{x^4} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$v(x) = \ln |x|$$

(باختيار ثابت التكامل $C = 0$)

3. إيجاد الحل العام الحل الثاني هو:

$$y_2 = uv = x^2 \cdot \ln |x|$$

$$y_2 = x^2 \ln |x|$$

ومنه الحل العام هو:

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln |x|$$

الفصل الخامس

نحويل لأبلاس ونكيبقانه في حل معادله تفاضلية

تمهيد

تعتبر تحويلات لابلاس طريقة مهمة في حل المعادلات التفاضلية الخطية و مسائل ذات القيم الحدودية و القيم الابتدائية التي تظهر في الكثير من التطبيقات الهندسية، حيث يتم تحويل المعادلة التفاضلية الاعتيادية إلى معادلة جبرية و التي ستكون أسهل للحل. و باستعمال تحويل لابلاس نتمكن من توفير الكثير من الوقت و الجهد عند حل المعادلات و ذلك لتوفر جداول خاصة بتحويل لابلاس باستطاعتنا إستعمالها. بالإضافة للمعادلات التفاضلية الاعتيادية يمكننا إستعمال طريقة تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الجزئية أيضا.

1.5 تحويل لابلاس :

تعريف 1.1.5: يعرف تحويل لابلاس بأنه عبارة عن تكامل خطي لدالة f بدلالة المتغير t مع معامل أسّي من الشكل

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p) \quad (1.5)$$

حيث أن الرمز $\mathcal{L}$ يشير إلى معامل تحويل لابلاس، p عبارة عن متغير ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة. الدالة $F(p)$ تمثل ناتج تحويل لابلاس بدلالة المتغير p .

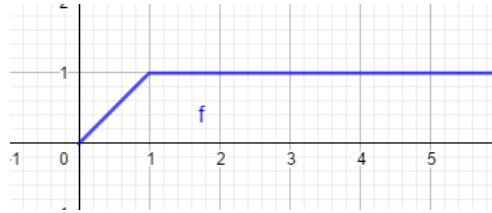
مثال 1.1.5

نحسب تحويل لابلاس للدالة $f(t) = 1$ لدينا:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(p) &= \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^a \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\left(-\frac{e^{-pa}}{p} \right) - \left(-\frac{e^{-p \cdot 0}}{p} \right) \right] = 0 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

مثال 2.1.5

نحسب تحويل لابلاس للدالة f المعطاة بالشكل التالي :



من خلال الشكل تكون عبارة الدالة كالتالي :

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

بتطبيق تحويل لابلاس عن الدالة f نجد أن :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(p) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \\ &= \int_0^1 te^{-pt} dt + \int_1^{+\infty} e^{-pt} dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

لحساب الطرف الأول من التكامل نستعمل طريقة التكامل بالتجزئة حيث أنه من أجل متغيرين u و v فإن $\int v du = vu - \int u dv$: بفرض أن $v = t$ و $du = e^{-pt}$ وبالتعويض في المعادلة (2.5) نجد أن :

$$\begin{aligned} \int_0^1 te^{-pt} dt &= \left[-\frac{te^{-pt}}{p} \right]_0^1 + \frac{1}{p} \int_0^1 e^{-pt} dt \\ &= \left[-\frac{te^{-pt}}{p} - \frac{1}{p} \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^1 \end{aligned}$$

من جهة أخرى :

$$\int_1^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{p} \right]_1^{+\infty}$$

و منه نجد أن تحويل لابلاس للدالة f يكون :

$$\begin{aligned} F(p) &= \left[-t \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{p} \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^1 - \left[\frac{e^{-pt}}{p} \right]_1^{+\infty} \\ &= -\frac{pe^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p} \end{aligned}$$

نتحصل في الأخير على تحويل لابلاس التالي :

$$F(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p^2}$$

1.1.5 شرط التقارب :

تعريف 2.1.5: يمكن تطبيق تحويل لابلاس على عدد كبير من الدوال لكن هناك البعض من هذه الدوال لا يمكن حساب تحويل لابلاس الموافق لها .

أمثلة 1.1.5

نحسب تحويل لابلاس للدالة $f(t) = e^{t^2}$ بتطبيق $F(p) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} f(t)e^{-pt} dt$ على الدالة f نجد :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{t^2} e^{-pt} dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{t^2 - pt} dt \end{aligned}$$

نلاحظ أن التكامل يؤول إلى مالانهاية و ذلك من أجل أي قيمة للمتغير p .
فإنه لا يمكن حساب تحويل لابلاس في هذه الحالة للدالة f .

2.1.5 التقارب المطلق :

تعريف 3.1.5: لا يمكن حساب تحويل لابلاس للدالة f إلا إذا كان التكامل متقاربا تماما حيث أن شرط التقارب يعطى بالمتراجحة التالية :

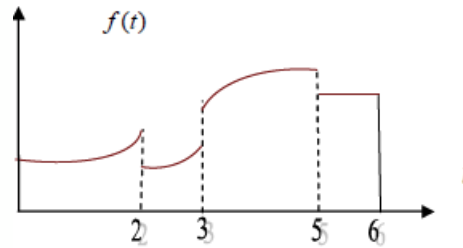
$$\left| \int_0^{\tau} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\tau} |f(t)e^{-pt}| dt < \infty$$

3.1.5 الإستمرار المقطعي :

تعريف 4.1.5: نقول أن الدالة f مستمرة بالقطع على المجال المغلق $[a, b]$ ، إذا كانت الدالة f على كل مجال جزئي من هذا المجال بحيث :

✓ الدالة f مستمرة على مجال جزئي مفتوح $c < t < d$

✓ تكون كل من النهايتين $\lim_{t \rightarrow c} f(t)$ و $\lim_{t \rightarrow d} f(t)$ موجودتان.



4.1.5 الرتبة الأسية :

تعريف 5.1.5: نقول أن الدالة f ذات رتبة أسية عندما $t \rightarrow +\infty$ ، إذا كان لأي ثابتين b ، M تحقق المتراجحة :

$$|f(t)| < Me^{bt} \quad t \geq t_0$$

و عليه يمكن القول أن الدالة f ذات رتبة أسية (من المرتبة e^{bt}) ويمكن سياق التعريف بصورة أخرى كالآتي :

يقال أن الدالة f ذات رتبة أسية إذا كان هناك عدنان ثابتان b ، M بحيث أن :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-bt} |f(t)| \rightarrow M$$

أمثلة 2.1.5

نثبت أن $f(t) = t^3$ ذات رتبة أسية عندما $t \rightarrow +\infty$:

من خلال التعريف السابق :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-bt} t^3 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{e^{bt}} \rightarrow 0$$

يمكن إثبات ذلك عن طريق تطبيق نظرية لوبيتال :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-bt} t^3 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{e^{bt}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t^2}{be^{bt}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6t}{b^2 e^{bt}} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-bt} t^3 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6}{b^3 e^{bt}} \rightarrow 0\end{aligned}$$

وعليه فإن الدالة $f(t) = t^3$ ذات رتبة أسية.

5.1.5 نظرية الوجود :

نظرية 1.1.5: إذا كانت الدالة f تحقق :

① الدالة f مستمرة بالقطع في أي مجال محدود من المجال $t > 0$.

② الدالة f ذات رتبة أسية لجميع قيم $t > t_0$ مهما كانت قيمة t_0 .

فإن تحويل لابلاس $\mathcal{L}(f)(p)$ موجود.

ملاحظة 1.1.5

الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس هو أن تكون الدالة f متصلة على فترات أو متقطعة الإتصال على فترة محدودة $[0, b]$ وكان $|f(t)| \leq ce^{\beta t} \quad \forall t \geq t_0$ حيث c, β, t_0 ثوابت. لكن هذين الشرطين ليسا ضروريين لوجود تحويل لابلاس حيث أن الدالة $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ليست ذات رتبة أسية و مع ذلك فإن تحويل لابلاس موجود لها.

$$\mathcal{L}(f)(p) \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \right\} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-pt} dt$$

لإجراء هذا التكامل نستخدم التعويض $y = pt$ و منه $t = \frac{y}{p}$ بالتالي $dt = \frac{dy}{p}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(p) \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \right\} &= p^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

تذكير: الرمز Γ يدل على دالة جاما تعرف على أنها التكامل المعتل : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y} dy$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad p > 0 \quad \text{و} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

6.1.5 جدول لابلاس :

$F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{\sqrt{p-a}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at}$
$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(p-a)^2}$	$t e^{at}$
$\frac{1}{(p-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$
$(a \neq \frac{p}{(p-a)(p-b)} b)$	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$
$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\cosh(at)$

2.5 خصائص تحويل لابلاس :

1.2.5 خاصية الخطية :

خاصية 1.2.5

إذا كانت a و b ثوابت فإن :

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)](p) = a\mathcal{L}[f(t)](p) + b\mathcal{L}[g(t)](p)$$

برهان.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[af(t) + bg(t)](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} [af(t) + bg(t)] dt \\ &= a \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt + b \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t) dt \\ &= a\mathcal{L}[f(t)](p) + b\mathcal{L}[g(t)](p)\end{aligned}$$

□

أمثلة 1.2.5

إيجاد تحويل لابلاس للدالة : $4t^3 + 7t - 8 + 2e^{5t} + 10 \sin 3t + 5 \cosh 2t$

بإستخدام الصيغة الخطية نحصل على :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[4t^3 + 7t - 8 + 2e^{5t} + 10 \sin 3t + 5 \cosh 2t](p) &= 4\mathcal{L}(t^3)(p) + 7\mathcal{L}(t)(p) - 8\mathcal{L}(1)(p) + 2\mathcal{L}(e^{5t})(p) + 10\mathcal{L}(\sin 3t)(p) + 5\mathcal{L}(\cosh 2t)(p) \\ &= 4 \cdot \frac{3!}{p^4} + 7 \cdot \frac{1}{p^2} - 8 \cdot \frac{1}{p} + 2 \cdot \frac{1}{p-5} + 10 \cdot \frac{3}{p^2+9} + 5 \cdot \frac{2}{p^2-4} \\ &= \frac{24}{p^4} + \frac{7}{p^2} - \frac{8}{p} + \frac{2}{p-5} + \frac{30}{p^2+9} + \frac{10}{p^2-4}\end{aligned}$$

2.2.5 خاصية الإزاحة الأولى :

خاصية 2.2.5

إذا كان $\mathcal{L}(f)(p) = F(p)$ فإن $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(p) = F(p-a)$

برهان.

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \\
 F(p-a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} f(t) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} [e^{at} f(t) dt] \\
 &= \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(p).
 \end{aligned}$$

□

و تبعا لهذه الخاصية يمكن الحصول على النتائج التالية كما مبينة في الجدول :

$F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$	$f(t)$
$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$e^{at} t^n$
$\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$	$e^{at} \sin bt$
$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$	$e^{at} \cos bt$
$\frac{b}{(p-a)^2 - b^2}$	$e^{at} \sinh bt$
$\frac{p-a}{(p-a)^2 - b^2}$	$e^{at} \cosh bt$

أمثلة 2.2.5

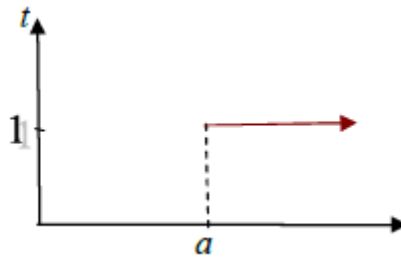
لنجد تحويل لابلاس للدالة $f(t) = e^{kt}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \\
 \mathcal{L}[e^{kt}](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{kt} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-(p-k)t} dt \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-(p-k)t}}{-(p-k)} \right]_0^t \\
 &= \frac{0}{-(p-k)} + \frac{e^0}{p-k} = \frac{1}{p-k} \\
 &= \frac{1}{p-k}
 \end{aligned}$$

دالة الوحدة الدرجية :

تعريف 1.2.5: الدالة الآتية :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

تسمى دالة الوحدة الدرجية ويرمز لها بالرموز الآتية $u(t-a)$ أو u_a و تمثل بيانيا كالاتي :

و يحسب لها محول لابلاس كالاتي :

$$\mathcal{L}[u_a](p) = \int_0^a 0 \times e^{-pt} dt + \int_a^{\infty} 1 \times e^{-pt} dt$$

و عليه يكون محول لابلاس للدالة على الصورة :

$$\mathcal{L}[u_a](p) = \frac{e^{-ap}}{p}$$

أمثلة 3.2.5

نعتبر عن الدالة $f(t) = \begin{cases} \cos t & t < \pi \\ \cos t + 7 & t > \pi \end{cases}$ بدلالة دالة الوحدة و نبث عن تحويل لابلاس لها.

$$f(t) = \cos t + \begin{cases} 0 & t < \pi \\ 7 & t > \pi \end{cases}$$

و من تم نجد :

$$f(t) = \cos t + 7 \begin{cases} 0 & t < \pi \\ 1 & t > \pi \end{cases}$$

و منه :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(\cos t)(p) + 7\mathcal{L}(u(t-\pi))(p)$$

باستخدام تحويل لابلاس للدالة الدرجة نجد :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{7e^{-\pi p}}{p}$$

3.2.5 خاصية الإزاحة الثانية :

3.2.5 خاصية

إذا كانت $\mathcal{L}(f(t))(p) = F(p)$ فإن $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(p) = e^{-ap}F(p)$ حيث u دالة الوحدة الدرجة.

برهان.

نعلم أن تحويل لابلاس للدالة f كالتالي :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u) du$$

بضرب الطرفين بالدالة e^{-ap}

$$\begin{aligned} e^{-ap} F(p) &= e^{-ap} \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-p(u+a)} f(u) du \end{aligned}$$

بأخذ التعويض $u + a = t$ نحصل على :

$$e^{-ap} F(p) = e^{-ap} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-a) dt$$

باستعمال الدالة الدرجة u_a تصبح المعادلة :

$$e^{-ap} F(p) = e^{-ap} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-a) u_a(t) dt$$

و بتعريف تحويل لابلاس نحصل على :

$$e^{-ap} F(p) = \mathcal{L}\{f(t-a)u_a(t)\}$$

أمثلة 4.2.5

لنجد تحويل لابلاس للدالة f :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \end{cases}$$

يمكن كتابة الدالة f على الشكل التالي :

$$f(t) = \sin t \begin{cases} 0 & t < 2\pi \\ 1 & t > 2\pi \end{cases}$$

أي:

$$f(t) = \sin t \cdot u_{2\pi}(t)$$

إذن بأخذ محول لابلاس للطرفين :

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \mathcal{L}\{\sin t \cdot u_{2\pi}(t)\}(p)$$

يصبح لدينا :

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \mathcal{L}\{\sin(t - 2\pi) \cdot u_{2\pi}(t)\}(p)$$

حسب نظرية الإزاحة الثانية:

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u_a(t)\}(p) = e^{-ap}F(p)$$

نحصل على ما يلي :

$$\mathcal{L}\{\sin(t - 2\pi) \cdot u_{2\pi}(t)\} = \frac{e^{-2\pi p}}{p^2 + 1}$$

4.2.5 خاصية تغير المقياس :

خاصية 4.2.5

إذا كانت

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = F(p)$$

فإن :

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(p) = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

برهان.
لدينا:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

نضع $u = at$ و منه $du = a dt$ لما $t = 0$ فإن $u = 0$ و لما $t \rightarrow +\infty$ فإن $u \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\}(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}u} f(u) \frac{du}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}u} f(u) du \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \end{aligned}$$

□

5.2.5 خاصية تحويل لابلاس للمشتقات :

خاصية 5.2.5

إذا كان : $\mathcal{L}(f)(p) = F(p)$
فإن : $\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) = p\mathcal{L}f(t) - f(0) = pF(p) - f(0)$

برهان.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-pt} f(t)]_0^t + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \\ &= -f(0) + pF\{f(t)\} \\ &= f(0) + pF(p)\end{aligned}$$

إذن :

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) = pF(p) - f(0)$$

□

يمكن الإستنتاج بأن :

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(p) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

و كذلك :

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\}(p) = p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

بصورة عامة :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(p) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

أمثلة 5.2.5

لنجد تحويل لابلاس للدالة $f(t) = e^{2t}$ بواسطة المشتقات حيث لدينا:

$$f'(t) = 2e^{2t} \text{ و } f(t) = e^{2t}$$

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = p\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

$$\mathcal{L}[2e^{2t}](p) = p\mathcal{L}[e^{2t}] - f(0)$$

و منه يصبح لدينا :

$$2\mathcal{L}[e^{2t}] - p\mathcal{L}[e^{2t}] = -1$$

$$\mathcal{L}[e^{2t}](2-p) = -1$$

$$\mathcal{L}[e^{2t}](p) = \frac{1}{p-2}$$

6.2.5 خاصية تحويل لابلاس للتكاملات :

خاصية 6.2.5

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^1 f(u)du\right\}(p) = \frac{1}{p}F(p) : \text{ فإن } \mathcal{L}(f)(p) = F(p) : \text{ إذا كان}$$

برهان.
نفرض أن :

$$\phi(t) = \int_0^t f(u)du$$

نضع $\phi'(t) = f(t)$ و $\phi(0) = 0$ و منه :

$$\mathcal{L}\{\phi'(t)\}(p) = p\mathcal{L}\{\phi(t)\} - \phi(0)$$

و منه نجد :

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = p\mathcal{L}\{\phi(t)\}$$

بالتالي :

$$F(p) = p\mathcal{L}\left\{\int_0^1 f(u)du\right\}(p)$$

□

أمثلة 6.2.5

لنبحث عن $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin(2u)du\right\}(p)$:

الحل: نعلم من جدول لابلاس أن :

$$\mathcal{L}\{\sin(2u)du\}(p) = \frac{2}{p^2 + 4}$$

ومنه بتطبيق خاصية لابلاس للتكامل :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}(p) = \frac{1}{p}F(p)$$

نجد أن :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin(2u)du\right\}(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}$$

7.2.5 خاصية الضرب في t :

خاصية 7.2.5

$$\mathcal{L}\{t f(t)\}(p) = -\frac{d}{dp}F(p) \quad \text{فإن} \quad \mathcal{L}(f)(p) = F(p) \quad \text{إذا كان}$$

برهان.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

بتفاضل الطرفين نسبة إلى p نحصل على:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dp}F(p) &= \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} e^{-pt} f(t) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} -t e^{-pt} f(t) dt \\
 &= - \int_0^{+\infty} e^{-pt} \{t f(t)\} dt \\
 &= -\mathcal{L}\{t f(t)\}(p)
 \end{aligned}$$

إذن :

$$\mathcal{L}\{t f(t)\}(p) = -\frac{d}{dp}F(p)$$

□

يمكن إستنتاج أيضا :

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(p) = (-1)^2 \frac{d^2}{dp^2}F(p)$$

و كذلك :

$$\mathcal{L}\{t^3 f(t)\}(p) = (-1)^3 \frac{d^3}{dp^3}F(p)$$

بصورة عامة :

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(p) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}F(p)$$

أمثلة 7.2.5

نحسب تحويل لابلاس للدالة التالية : $t \cos(at)$

نعلم أن : $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(p) = \frac{p}{p^2 + a^2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t \cos(at)\}(p) &= -\frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + a^2} \right) \\ &= -\frac{(p^2 + a^2) - 2(2p)}{(p^2 + a^2)^2} \\ &= \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}\end{aligned}$$

أمثلة 8.2.5

نحسب تحويل لابلاس للدالة التالية : $t^2 \sin t$

نعلم أن : $\mathcal{L}\{\sin t\}(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2 \sin t\}(p) &= (-1)^2 \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right) \\ &= \frac{d}{dp} \left[\frac{-2p}{(p^2 + 1)^2} \right] \\ &= \frac{6p^2 - 2}{(p^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

8.2.5 خاصية القسمة على t :

خاصية 8.2.5

إذا كان : $\mathcal{L}(f)(p) = F(p)$ فإن : $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(p) = \int_0^{+\infty} F(p) dp$

برهان.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

بتكامل الطرفين نسبة إلى p (من p إلى $+\infty$) نحصل على :

$$\int_p^{+\infty} F(p) dp = \int_p^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right] dp$$

يمكن تغيير التكامل في الطرف الأيمن بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} \int_p^{+\infty} F(p) dp &= \int_0^{+\infty} \left[\int_p^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right] dp \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{e^{-pt}}{-t} \right]_p^{+\infty} f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left[\frac{f(t)}{t} \right] dt \\ &= \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{t} f(t) \right\} (p) \end{aligned}$$

إذن :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{t} f(t) \right\} (p) = \int_p^{+\infty} F(p) dp$$

□

أمثلة 9.2.5

لنجد $\mathcal{L} \left[\frac{\sin t}{t} \right] (p)$

$$\mathcal{L} [\sin t] (p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

بما أن النهاية $\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin t}{t} \right] = 1$ حقيقية و موجودة و بتطبيق :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{\sin t}{t} \right] (p) &= \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} [\tan^{-1} u]_p^u \\ &= \tan^{-1} \frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{\sin t}{t} \right] (p) = \tan^{-1} \frac{1}{p} \quad \text{إذن :}$$

3.5 تحويل لابلاس العكسي :

تعريف 1.3.5: إذا كان : $\mathcal{L}(f)(p) = F(p)$ فإن $f(t)$ يطلق عليها معكوس تحويل لابلاس للدالة $F(p)$ ويمكن كتابته ذلك بالشكل :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$$

أمثلة 1.3.5

❶ لدينا : $\mathcal{L}(3t)(p) = \frac{3}{p^2}$ فإن : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{p^2}\right\}(p) = 3t$

❷ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-5}\right\}(p) = e^{5t}$

1.3.5 خواص تحويل لابلاس العكسي :

خاصية 1.3.5

في حالة وجود كل من تحويلات لابلاس $F(p)$ و $G(p)$ للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ و تحويل لابلاس العكسي لـ : $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ و $\mathcal{L}^{-1}\{G(p)\}$ فإن :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(p) + \beta G(p)\}(x) = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(x) + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\}(x)$$

حيث α و β ثوابت.

أمثلة 2.3.5

لنجد $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p-6}{p^2+9}\right\}(x)$ لدينا:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p-6}{p^2+9}\right\}(x) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+9}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{p^2+9}\right\} \\ &= 2\cos(3x) - 2\sin(3x) \end{aligned}$$

2.3.5 جدول تحويل لابلاس العكسي :

$F(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(x)$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
$\frac{1}{(p-a)^n}$	$e^{ax} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin ax$
$\frac{s}{p^2 + a^2}$	$\cos ax$
$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\sinh ax$
$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\cosh ax$
$\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$	$e^{ax} \sin bx$

3.3.5 طرق إيجاد تحويل لابلاس العكسي :

توجد عدة طرق متاحة لإيجاد تحويلات لابلاس العكسي للدوال، أهم هذه الطرق تجزئة الكسور وطرق أخرى.

3.3.5.1 طريقة تجزئة الكسور :

يتم تحليل الدالة إلى كسور جزئية و من ثم أخذ التحويلات العكسية والتي تكون سهلة للحل.

أمثلة 3.3.5

لنجد تحويل لابلاس العكسي للعبارة : $\frac{3p+7}{p^2+6p+9}$ لدينا:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3p+7}{p^2+6p+9}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(p+3)-2}{(p+3)^2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{p+3}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+3)^2}\right\} \\ &= 3e^{3x} - 2e^{3x}x \\ &= e^{3x}(3-2x)\end{aligned}$$

أمثلة 4.3.5

لنجد تحويل لابلاس العكسي للعبارة : $\frac{3p+7}{p^2-2p-3}$ نضع :

$$\frac{3p+7}{p^2-2p-3} = \frac{3p+7}{(p-3)(p+1)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p+1}$$

بعد توحيد المقام نحصل على :

$$3p+7 = (A+B)p + A - 3B$$

بالمطابقة نجد : $A=4$ و $B=-1$ ومنه :

$$\frac{3p+7}{p^2-2p-3} = \frac{4}{p-3} - \frac{1}{p+1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3p+7}{p^2-2p-3}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{p-3} - \frac{1}{p+1}\right\} \\ &= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} \\ &= 4e^{3x} - e^{-x}\end{aligned}$$

3.3.5.2 باستخدام خاصية الضرب في x :

$$\mathcal{L}\{x f(x)\} = -\frac{d}{dp}F(p)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d}{dp} F(p) \right\} = -x f(x)$$

و بصورة عامة :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d^n}{dp^n} F(p) \right\} = (-1)^n x^n f(x)$$

أمثلة 5.3.5

لنجد تحويل لابلاس العكسي للعبارة : $\frac{p}{(p^2 + 1)^2}$
لدينا :

$$\frac{d}{dp} \left\{ \frac{1}{p^2 + 1} \right\} = \frac{-2p}{(p^2 + 1)^2}$$

إذن :

$$\frac{p}{(p^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dp} \left\{ \frac{1}{p^2 + 1} \right\}$$

ونعلم أن :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 + 1} \right\} = \sin t$$

باستعمال الخاصية نجد :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \right\} &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} (-t f(t)) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{2} (t f(t))$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{2} t \sin t$$

بأستعمال الخاصية التفاضلية :

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(u) du \right\} = \frac{F(p)}{p}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\} = \int_0^t f(u) du$$

أمثلة 6.3.5

لنجد : $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p^2 + 1)} \right\}$
لدينا:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} = \sin t$$

و منه حسب الخاصية :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right\} &= \int_0^t \sin t \, dt \\ &= [-\cos t]_0^t \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right\} &= 1 - \cos t \end{aligned}$$

بأسعمال قاعدة المشتقة :

لدينا :

$$\mathcal{L} \{f'(t)\}(p) = pF(p) - f(0)$$

عندما تكون : $f(0) = 0$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{pF(p)\} &= \frac{d}{dt} (f(t)) = \frac{d}{dt} \{\mathcal{L}^{-1}F(s)\} \\ \mathcal{L}^{-1} \{pF(p)\} &= \frac{d}{dt} \{L^{-1}F(p)\} \end{aligned}$$

أمثلة 7.3.5

لنجد : $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p+3} \right\}$

لدينا من جدول لابلاس العكسي :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p+3} \right\} = e^{-3t}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p+3} \right\} &= \frac{d}{dt} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p+3} \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \{ e^{-3t} \} \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p+3} \right\} &= -3e^{-3t} \end{aligned}$$

4.5 التلاف:

تتجلى أهمية التلاف في حل المعادلات التكاملية و التفاضلية ذات الشروط الابتدائية و كما أن لهذا المفهوم أهمية خاصة في كثير من المجالات الهندسية و البرامج على الكمبيوتر.

تعريف 1.4.5: لتكن الدالتين f و g معرفتان في الفترة $[0, t]$ فإن تلاف الدالتين f, g يعرف على أنه الدالة h كالاتي

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

و يرمز لها :

$$h(t) = (f * g)(t)$$

مثال:

أوجد $(f * g)(t)$ عندما $f(t) = e^{3t}$ و $g(t) = e^{2t}$:

الحل:

لدينا $f(\tau) = e^{3\tau}$ و $g(t - \tau) = e^{2(t-\tau)}$ و منه :

$$\begin{aligned}
 f(t) * g(t) &= \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\
 &= \int_0^t e^{3\tau}e^{2(t-\tau)}d\tau \\
 &= \int_0^t (e^{3\tau}e^{2t}e^{-2\tau})d\tau \\
 &= e^{2t} \int_0^t e^{\tau}d\tau \\
 &= e^{2t} [e^{\tau}]_{\tau=0}^{\tau=t} \\
 &= e^{2t}(e^t - 1) \\
 f(t) * g(t) &= e^{3t} - e^{2t}
 \end{aligned}$$

1.4.5 خواص التلاف :

خاصية 1.4.5

الإبدال: للتكن الدالتين f و g معرفتان في المجال $[0, t]$ فإن : $f * g = g * f$

برهان.

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

نضع : $x = t - \tau$ و منه : $\tau = t - x$ بالتعويض نجد :

$$(f * g)(t) = \int_t^0 f(t - x)g(x)(-dx)$$

$$= - \int_t^0 f(t - x)g(x)(dx)$$

$$= - \int_t^0 g(x)f(t - x)(dx)$$

$$= \int_0^t g(x)f(t - x)(dx)$$

$$(f * g)(t) = (g * f)(t)$$

□

خاصية 2.4.5

التوزيع: للتكن الدوال f ، g_1 و g_2 التالية و منه :

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$$

برهان.

$$\begin{aligned}
 [f * (g_1 + g_2)](t) &= \int_0^t f(\tau)[g_1(t - \tau) + g_2(t - \tau)]d\tau \\
 &= \int_0^t [f(\tau)g_1(t - \tau) + f(\tau)g_2(t - \tau)]d\tau \\
 &= \int_0^t f(\tau)g_1(t - \tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)g_2(t - \tau)d\tau \\
 f * (g_1 + g_2) &= (f * g_1)(t) + (f * g_2)(t)
 \end{aligned}$$

□

خاصية 3.4.5

التجميع: لتكن الدوال التالية f ، g و h لدينا :

$$f * (g * h) = (f * g) * h = f * g * h$$

خاصية 4.4.5

الصفء عنصر ماحي: لتكن الدالة f معرفة في الفترة $[0, t]$:

$$f * 0 = 0 * f$$

برهان.

$$(f * 0)(t) = \int_0^t f(\tau).0d\tau = 0$$

□

2.4.5 نظرية التوزيع (نظرية التلاف) :

نظرية 1.4.5: نعتبر الدالتين:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(p)\} = g(t) \text{ و } \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t)$$

$$\text{فإن : } \mathcal{L}^{-1}\{F(p).G(p)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

برهان.

لبرهان ذلك يكفي البرهان أن :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = F(p).G(p) \quad (3.5)$$

حيث : $G(p) = \mathcal{L}g(t)(p)$ و $F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f(u)g(t-u)dudt$$

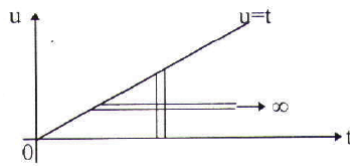
$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt$$

بتبديل رتبة التكامل تبعا للشكل أدناه فيصبح هذا التكامل :

$$\int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} f(u)g(t-u)dudt = \int_0^\infty e^{-su} f(u) \int_u^\infty e^{-s(t-u)} g(t-u)dudt$$

بوضع : $t - u = v$

$$\int_0^\infty e^{-su} f(u) \int_0^\infty e^{-sv} g(v)dvdu = \int_0^\infty e^{-su} f(u)du G(s) = F(s)G(s)$$



□

مثال:
أوجد : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$
الحل:

لدينا : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = 1$ و $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \times \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\} \\ &= 1 \times \sin t\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin u \, du = 1 - \cos t$$

5.5 تطبيقات على حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويلات لابلاس :

من تطبيقات تحويل لابلاس إيجاد حلول بعض المعادلات التفاضلية المعطاة مع شروط ابتدائية و تشمل المعادلات التفاضلية العادية و الجزئية و سنرى بعض الحالات لحل معادلات خطية ذات معاملات ثابت و غير ثابتة، حيث تكون خطوات الحل كما يلي :

- ① استخدام تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية المعطاة .
- ② استخدام الشروط الابتدائية لتعطي بعد تبسيطها المعادلة الجبرية .
- ③ حل المعادلة الجبرية ذات المتغير p حيث : $\mathcal{L}y(p) = F(p)$
- ④ تطبيق تحويل لابلاس العكسي للطرفين في الخطوة الثالثة ليعطي $y = f(x)$ و هو الحل المطلوب .

1.5.5 حل معادلات تفاضلية عادية ذات معاملات ثابتة :

أمثلة 1.5.5

1- حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

حيث : $y(0) = 1$

بأخذ مؤثر لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية نجد :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\}(p) + 2\mathcal{L}\{y\}(p) = \mathcal{L}\{\cos x\}(p)$$

بإستخدام خاصية المشتقات لتحويل لابلاس نجد أن :

$$p\mathcal{L}\{y\}(p) - y(0) + 2\mathcal{L}\{y\}(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$$

بتعويض الشروط الابتدائية نجد :

$$(p + 2)\mathcal{L}\{y\}(p) - 1 = \frac{p}{p^2 + 1}$$

إذن

$$\mathcal{L}\{y\}(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)(p + 2)} + \frac{1}{(p + 2)}$$

بالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن :

$$\mathcal{L}\{y\}(p) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p^2 + 1}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{p}{p^2 + 1}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{p + 2}\right)$$

بإستخدام مؤثر لابلاس العكسي للطرفين نحصل على :

$$y(x) = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + 1}\right\} + \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{p^2 + 1}\right\} + \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p + 2}\right\}$$

نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة كالتالي :

$$y(x) = \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{3}{5}e^{-2x}$$

2- حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

حيث : $y(0) = 2$ و $y'(0) = 1$

بأخذ محول لابلاس للطرفين :

$$\mathcal{L}\{y''(x) + 5y'(x) + 6y(x)\}(p) = \mathcal{L}\{0\}(p)$$

أي :

$$\mathcal{L}\{y''(x)\}(p) + 5\mathcal{L}\{y'(t)\}(p) + 6\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = 0$$

بتطبيق تحويل لابلاس للمشتقات نجد :

$$p^2 \mathcal{L}\{y(x)\}(p) - py(0) - y'(0) + 5[p \mathcal{L}\{y(x)\}(p) - y(0)] + 6\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = 0 \dots (*)$$

باستخدام الشروط الابتدائية و التعويض في (*) نجد :

$$p^2 \mathcal{L}\{y(x)\}(p) - 2p - 1 + 5p \mathcal{L}\{y(x)\}(p) - 10 + 6\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = 0$$

إذن :

$$[p^2 + 5p + 6]\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = 2p + 11$$

باستخدام طريقة تجزئة الكسور :

$$\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \frac{2p + 11}{p^2 + 5p + 6} = \frac{A}{p + 3} + \frac{B}{p + 2} = \frac{-5}{p + 3} + \frac{7}{p + 2}$$

بأخذ محول لابلاس العكسي نجد :

$$y(x) = -5e^{-3x} + 7e^{-2x}$$

3- حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x}$$

حيث : $y(0) = -3$ و $y'(0) = 5$

باستخدام مؤثر لابلاس على المعادلة :

$$\mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{4e^{2x}\}$$

نحصل على :

$$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 4\mathcal{L}\{e^{2x}\}$$

باستخدام خاصية المشتقات نجد أن :

$$p^2 \mathcal{L}\{y(x)\}(p) - py(0) - y'(0) - 3p \mathcal{L}\{y(x)\}(p) - y(0) + 2\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \frac{4}{p - 2}$$

بتعويض الشروط الابتدائية نجد :

$$p^2 \mathcal{L}\{y(x)\}(p) + 3p - 5 - 3[p \mathcal{L}\{y(x)\}(p) + 3] + 2\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \frac{4}{p - 2}$$

و منه :

$$[p^2 - 3p + 2]\mathcal{L}\{y(x)\}(p) + 3p - 14 = \frac{4}{p - 2}$$

أي :

$$[p^2 - 3p + 2]\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \frac{4}{p-2} - 3p + 14$$

بالقسمة على $p^2 - 3p + 2$ و توحيد المقام نجد :

$$\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \frac{3p^2 + 20p - 24}{(p-2)(p^2 - 3p + 2)}$$

بتحليل العبارة

$$p^2 - 3p + 2 = (p-1)(p-2)$$

بالتعويض نجد :

$$\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \frac{3p^2 + 20p - 24}{(p-1)(p-2)^2}$$

بالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن :

$$\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \frac{-7}{p-1} + \frac{4}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2}$$

باستخدام تحويل لابلاس العكسي للطرفين :

$$y(x) = L^{-1} \left\{ \frac{-7}{p-1} + \frac{4}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2} \right\}$$

نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة كالتالي :

$$y(x) = -7e^x + 4e^{2x} + 4xe^{2x}$$

2.5.5 حل معادلات تفاضلية عادية ذات معاملات متغيرة :

من السهولة استخدام محول لابلاس لحل المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات المتغيرة اعتماداً

$$\frac{d^n}{dp^n} F(p) = (-1)^n \mathcal{L}\{x^n f(x)\} \quad \text{على القاعدة الآتية :}$$

و أيضاً اعتماداً على المشتقة التالية :

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(x)\} = p^n \mathcal{L}\{y(x)\}(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

مثال 1.5.5

إيجاد حلول المعادلة التفاضلية

$$xy'' + (2-x)y = 0$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$
 مع

$$\mathcal{L}\{xy''\}(p) + 2\mathcal{L}\{y\}(p) - \mathcal{L}\{xy\}(p) = 0$$

بأخذ محول لابلاس للطرفين :
بتطبيق خاصية المشتقة :

$$\mathcal{L}\{y''\}(p) = p^2 \mathcal{L}\{y\}(p) - py(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{xy''\}(p) = (-1) \frac{d}{dp} [p^2 \mathcal{L}\{y\}(p) - py(0) - y'(0)]$$

$$\mathcal{L}\{xy''\}(p) = (-1)[p^2 \mathcal{L}\{y'\}(p) + 2p \mathcal{L}\{y\}(p) - y(0)]$$

باستخدام الشروط الابتدائية نحصل على :

$$\mathcal{L}\{xy''\}(p) = -p^2 \mathcal{L}\{y'\}(p) + 2p \mathcal{L}\{y\}(p)$$

$$\mathcal{L}\{y''\}(p) = -\frac{d}{dp} \mathcal{L}\{y\}(p) = -\mathcal{L}\{y'\}(p)$$

و عليه بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$(1-p^2)\mathcal{L}\{y'\}(p) + 2(1-p)\mathcal{L}\{y\}(p) = 0$$

أي:

$$\mathcal{L}\{y'\}(p) = \frac{-2}{1+p} \mathcal{L}\{y\}(p)$$

و بوضع $\mathcal{L}\{y\}(p) = F(p)$ و $\mathcal{L}\{y'\}(p) = F'(p)$ نحصل على المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى :

$$\frac{dF}{F} = \frac{-2}{1+p} dp$$

وبإجراء التكامل نجد:

$$\ln F + \ln(1+p)^2 = \ln A$$

أي :

$$F(p) = \frac{A}{(1+p)^2}$$

بأخذ محول لابلاس العكسي :

$$y(x) = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+p)^2}x\right\} \quad (4.5)$$

$$y(x) = Axe^{-x} \quad (5.5)$$

المراجع العلمية

- [1] د . حسن العويضي د . عبد الوهاب عباس رجب د . سناء علي زارع: المعادلات التفاضلية، الجزء الأول، دار الرشد 2005 .
- [2] أ . عبد المعطي البدري : المعادلات التفاضلية العادية وتطبيقاتها، دار الراتب الجامعية، بيروت 1985.
- [3] أ . محمد حازي : المعادلات التفاضلية العادية من الرتبتين الأولى و الثانية تقعيد نظري، ديوان المطبوعات الجامعية، سنة 1434 هـ 2013 م.
- [4] أ . عبد الحفيظ مقران : المعادلات التفاضلية، قسم الرياضيات المدرسة العليا للأساتذة، القبة، سنة 2014 م.
- [5] معن عبد المجيد ابراهيم : مبادئ المعادلات التفاضلية، مؤسسة الوراق للنشر و التوزيع، 2009 م.
- [6] د. فالح بن عمران الدوسري: إلكترونيات و كهرباء (رياضيات تخصصية-2)، المؤسسة العامة للتعليم الفني و التدريب المهني، المملكة العربية السعودية.

قائمة المراجع باللغة الانجليزية

- [7] RICHARD C.DIPRIMA ZILLIAM E. BOYCE , ELEMENTARY DIFFERENTIAL Equations and boundary value problmes, john wiloysons, 2012.
- [8] Steven C. Chapra and Raymond P. Canale, Numerical Methods for Engineers, New York, 2015.
- [9] Yehuda Pinehover and Jacob Rubinstein, An Introduction to Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2005.