

Table des matières

Notations	vi
Avant-propos	vii
1 Séries numériques	1
1.1 Définitions et théorèmes généraux	1
1.1.1 Notion de séries	1
1.1.2 Nature d'une série numérique	2
1.1.3 Condition nécessaire de convergence	5
1.1.4 Propriété des séries numériques	8
1.1.5 Reste d'une série convergente	11
1.1.6 Critère de Cauchy pour les séries numériques	12
1.2 Séries numériques à termes positifs	15
1.2.1 Théorèmes de comparaison	16
1.2.2 Règle de Cauchy	21
1.2.3 Règle de d'Alembert	23
1.2.4 Règle de Duhamel	25
1.2.5 Règle de Riemann ou " $n^\alpha u_n$ "	28
1.2.6 Comparaison d'une série à une intégrale	28
1.2.7 Encadrement du reste d'une série	32
1.3 Séries alternées	33
1.3.1 Théorème de Leibniz	33
1.3.2 Encadrement du reste d'une série alternée	35
1.4 Séries à termes de signes quelconques	37

1.4.1	Convergence absolue	37
1.4.2	Semi-convergence	39
1.4.3	Règle de Cauchy et de d'Alembert pour les séries à termes de signe quelconque	39
1.4.4	Critère de convergence d'Abel	41
1.4.5	Groupement des termes	45
1.4.6	Changement de l'ordre des termes	49
1.4.7	Produit de Cauchy de deux séries	50
1.5	Exercices avec solutions	54
2	Suites et séries de fonctions	83
2.1	Suites de fonctions	83
2.1.1	Convergence simple	84
2.1.2	Convergence uniforme	85
2.1.3	Théorème de Dini pour les suites de fonctions	88
2.1.4	Critère de Cauchy pour la convergence uniforme	90
2.1.5	Convergence uniforme et continuité	91
2.1.6	Convergence uniforme et intégration sur un segment	94
2.1.7	Convergence uniforme et dérivation	96
2.2	Séries de fonctions	100
2.2.1	Domaine de convergence	100
2.2.2	Convergence simple et uniforme	101
2.2.3	Convergence absolue	104
2.2.4	Convergence normale	105
2.2.5	Lien entre les différentes notions de convergence	107
2.2.6	Continuité d'une série uniformément convergente	112
2.2.7	Intégration d'une série uniformément convergente	113
2.2.8	Dérivation d'une série uniformément convergente	113
2.2.9	Théorème de Dini pour les séries de fonctions	115
2.2.10	Critères de la convergence uniforme	115
2.2.11	Critère de Cauchy	115
2.2.12	Critère d'Abel	116

2.3 Exercices avec solutions	117
3. Séries entières	151
3.1 Suites et séries à valeurs complexes	151
3.1.1 Convergence d'une suite de complexes	152
3.1.2 Convergence d'une série à termes complexes	153
3.2 Séries entières	156
3.2.1 Rayon de convergence d'une série entière	159
3.2.2 Propriétés des séries entières	164
3.2.3 Continuité de la somme d'une série entière	165
3.2.4 Dérivation et intégration de la somme d'une série entière	165
3.2.5 Continuité au bord de l'intervalle de convergence	166
3.2.6 Opérations sur les séries entières	169
3.2.7 Développements en série entière	171
3.2.8 Développements en série entière des fonctions au voisinage de 0	176
3.2.9 Exponentielle complexe	181
3.2.10 Fonctions trigonométriques complexes	181
3.2.11 Fonctions hyperboliques complexes	182
3.2.12 Logarithme complexe	182
3.3 Exercices avec solutions	184
4. Séries de Fourier	199
4.1 Séries trigonométriques	199
4.1.1 Fonctions périodiques	199
4.1.2 Fonctions continues par morceaux	200
4.1.3 Fonctions dérivables par morceaux	200
4.1.4 Fonctions 2π -périodique continues sur \mathbb{R}	201
4.1.5 Fonctions 2π -périodique de classe C^1 sur \mathbb{R}	202
4.1.6 Séries trigonométriques	204
4.1.7 Convergence d'une série trigonométrique	204
4.1.8 Système trigonométrique	205

4.2	Séries de Fourier	206
4.2.1	Série de Fourier d'une fonction périodique	206
4.2.2	Séries de Fourier de fonctions paires et impaires	210
4.2.3	Convergence simple des séries de Fourier : Théorème de Dirichlet	214
4.2.4	Séries de Fourier de fonctions de période quelconque	218
4.2.5	Séries de Fourier sous la forme complexe	220
4.2.6	Inégalité de Bessel	221
4.2.7	Egalité de Parseval	222
4.3	Exercices avec solutions	223
5	Intégrales généralisées (ou impropres)	240
5.1	Intégrales généralisées sur une demi-droite	240
5.1.1	Propriétés des intégrales généralisées convergentes	243
5.2	Cas des fonctions de signe constant sur l'intervalle I	245
5.2.1	Critère de comparaison	246
5.2.2	Critère d'équivalence	247
5.3	Critère de convergence de Cauchy	249
5.4	Intégrales généralisées absolument convergentes	250
5.4.1	Intégrale généralisée absolument convergente	251
5.4.2	Intégrale généralisée semi-convergente	253
5.4.3	Théorème d'Abel pour les intégrales généralisées	254
5.5	Intégrales généralisées des fonctions non bornées	256
5.5.1	Intégrales généralisées de fonctions définies sur $[a, b[$	256
5.5.2	Intégrales généralisées de fonctions définies sur $]a, b]$	258
5.5.3	Intégrale généralisée de fonctions définies sur $]a, b[$	259
5.6	Calcul pratique des intégrales généralisées	260
5.6.1	Application de la fonction primitive	261
5.6.2	Intégration par parties	262
5.6.3	Changement de variable	263
5.7	Exercices avec solutions	266

6	Intégrales dépendant d'un paramètre	283
6.1	Intégrales propres à paramètre	283
6.1.1	Continuité de l'intégrale propre à paramètre	284
6.1.2	Dérivabilité de l'intégrale propre à paramètre . .	286
6.1.3	Cas où les bornes d'intégration dépendent du pa- ramètre	288
6.2	Intégrale généralisée (impropre) à paramètre	293
6.2.1	Convergence uniforme de l'intégrale généralisée à paramètre	293
6.2.2	Critère de Cauchy de la convergence uniforme . . .	294
6.2.3	Convergence normale de l'intégrale généralisée à paramètre	295
6.2.4	Continuité de l'intégrale généralisée à paramètre .	298
6.2.5	Dérivabilité de l'intégrale généralisée à paramètre .	298
6.3	Exercices avec solutions	299
	bibliographie	316